উচ্চমাধ্যমিক উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অধ্যায়-১: বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা

প্রশ্ন ▶ ১ $f(x) = x - 1$ যেখানে $x \in \mathbb{R}$. /চ. বো. ১৭/

ক. $-2 < 2 - f(x) < 8$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. $|f(x)| < \frac{1}{10}$ হলে, দেখাও যে, $|f(x).f(x+2)| < \frac{21}{100}$. ৪

গ. $|3f(x) - 1| < 2$ অসমতাকে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$

$\therefore \quad -2 < 2 - f(x) < 8$

বা, $\quad -2 < 2 - x + 1 < 8$

বা, $\quad -2 < 3 - x < 8$

বা, $\quad -2 - 3 < 3 - 3 - x < 8 - 3$

[অসমতা চিহ্নের প্রত্যেক পার্শ্বের সংখ্যার সাথে (-3) যোগ করে পাই]

বা, $\quad -5 < -x < 5$

বা, $\quad 5 > x > -5$

বা, $\quad -5 < x < 5$

$\therefore \quad |x| < 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$

$\therefore f(x+2) = x + 2 - 1 = x + 1$

এখন, $|f(x)| < \frac{1}{10}$ বা, $|x - 1| < \frac{1}{10}$

বা, $-\frac{1}{10} < x - 1 < \frac{1}{10}$

বা, $-\frac{1}{10} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{10} + 1$

বা, $\frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$ বা, $\frac{81}{100} < x^2 < \frac{121}{100}$

বা, $\frac{81}{100} - 1 < x^2 - 1 < \frac{121}{100} - 1$

বা, $\frac{81 - 100}{100} < x^2 - 1 < \frac{121 - 100}{100}$

বা, $-\frac{19}{100} < (x+1)(x-1) < \frac{21}{100}$

বা, $-\frac{21}{100} < f(x)\, f(x+2) < \frac{21}{100}$ $\left[\because \frac{-19}{100} > \frac{-21}{100}\right]$

$\therefore |f(x)\, f(x+2)| < \frac{21}{100}$ **(দেখানো হলো)**

গ $|3f(x) - 1| < 2$

বা, $\quad |3(x-1) - 1| < 2$

বা, $\quad |3x - 3 - 1| < 2$

বা, $\quad |3x - 4| < 2$

বা, $\quad -2 < 3x - 4 < 2$

বা, $\quad -2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 2 + 4$ [প্রত্যেক পার্শ্বে 4 যোগ করে]

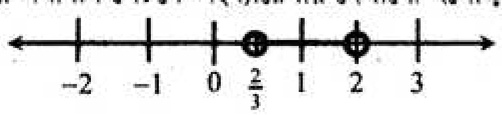
বা, $\quad 2 < 3x < 6$

বা, $\quad \frac{2}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{6}{3}$ [প্রত্যেক পার্শ্বকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \quad \frac{2}{3} < x < 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} < x < 2\right\}$

নিম্নে সমাধান সেটকে সংখ্যারেখায় দেখানো হলো :



প্রশ্ন ▶ ২ দৃশ্যকল্প-১ : $L = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 5x < 0\}$ /দি. বো. ১৭/

দৃশ্যকল্প-২ : $f(x) = x^2 - x$

ক. সমাধান কর : $|2x - 7| > 5$ ২

খ. L এর সমাধান সেটের অসমতাটিকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ৪

গ. সংখ্যারেখার সাহায্যে $f(x) \le 0$ এর সমাধান কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $|2x - 7| > 5$

$\therefore \; 2x - 7 > 5$ অথবা, $2x - 7 < -5$

বা, $2x > 5 + 7$ বা, $2x < -5 + 7$

বা, $2x > 12$ বা, $2x < 2$

বা, $x > \frac{12}{2}$ বা, $x < \frac{2}{2}$

$\therefore \; x > 6$ $\therefore \; x < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x > 6$ অথবা $x < 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $L = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 5x < 0\}$

এখানে, $2x^2 + 5x < 0$

বা, $\quad x^2 + \frac{5}{2}x < 0$

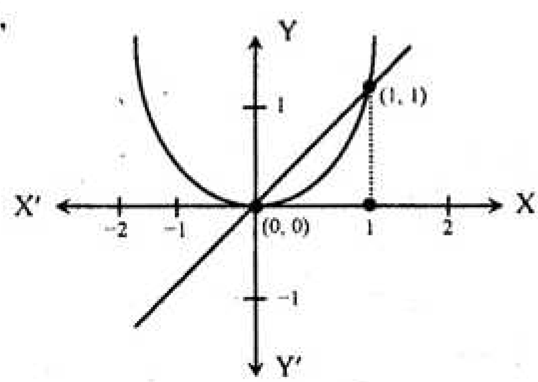
বা, $\quad x^2 + 2.\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2$

বা, $\quad \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\therefore \quad \left|x + \frac{5}{4}\right| < \frac{5}{4}$

যা নির্ণেয় পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ। **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,



$f(x) = x^2 - x$

$\therefore f(x) \le 0$

বা, $x^2 - x \le 0$

ধরি $g(x) = x^2$ এবং $h(x) = x$

এখন $g(x)$ ও $h(x)$ এর লেখচিত্র সংখ্যারেখায় বসাই।

সংখ্যারেখা থেকে আমরা দেখতে পাই যে $g(x)$ ও $h(x)$ ফাংশনদ্বয় $(0, 0)$ ও $(1, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং

$[0, 1]$ সীমায় $g(x) - h(x) \le 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $[0, 1]$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $f(x) = x$ এবং $g(x) = x - 5, x \in \mathbb{R}$ */মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল/*

ক. সমাধান কর : $|7x - 5| < 2$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $|f(a) + f(b)| \le |f(a)| + |f(b)|$ ৪

গ. যদি $|g(y)| < \frac{1}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $|8y^3 + 29| < 1360$ ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $|7x - 5| < 2$

বা, $-2 < 7x - 5 < 2$

বা, $-2 + 5 < 7x - 5 + 5 < 2 + 5$

বা, $3 < 7x < 7$

বা, $\frac{3}{7} < \frac{7x}{7} < \frac{7}{7}$

$\therefore$ $\frac{3}{7} < x < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{7} < x < 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x$

$\therefore f(a) = a$

এবং $f(b) = b$

$\therefore$ $(|f(a)| + |f(b)|)^2 = (|a| + |b|)^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2$
$[\because |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a||b| = |ab|]$

বা, $(|a| + |b|)^2 \ge a^2 + 2ab + b^2$ $[\because |ab| \ge ab]$

বা, $(|a| + |b|)^2 \ge (a + b)^2$

বা, $(|a| + |b|)^2 \ge (|a + b|)^2$

বা, $|a + b|^2 \le (|a| + |b|)^2$

$\therefore$ $|a + b| \le |a| + |b|$

$\therefore$ $|f(a) + f(b)| \le |f(a)| + |f(b)|$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = x - 5$

$\therefore g(y) = y - 5$

$\therefore$ $|g(y)| < \frac{1}{2}$

বা, $|y - 5| < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} < y - 5 < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} + 5 < y - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$ [প্রত্যেক পক্ষে 5 যোগ করে]

বা, $\frac{-1 + 10}{2} < y < \frac{1 + 10}{2}$

বা, $\frac{9}{2} < y < \frac{11}{2}$

বা, $\left(\frac{9}{2}\right)^3 < y^3 < \left(\frac{11}{2}\right)^3$ [প্রত্যেক পক্ষকে ঘন করে]

বা, $\frac{729}{8} < y^3 < \frac{1331}{8}$

বা, $729 < 8y^3 < 1331$ [প্রত্যেক পক্ষকে 8 দ্বারা গুণ করে]

বা, $729 + 29 < 8y^3 + 29 < 1331 + 29$ [প্রত্যেক পক্ষে 29 যোগ করে]

বা, $758 < 8y^3 + 29 < 1360$

বা, $-1360 < 758 < 8y^3 + 29 < 1360$

$\therefore$ $|8y^3 + 29| < 1360$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪ $x, y \in \mathbb{R}$ */পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা/*

ক. বাস্তব সংখ্যার অভেদকের অস্তিত্ব কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $|x + y| \le |x| + |y|$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $|x - y| \le |x| + |y|$ ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **অভেদকের অস্তিত্ব (Existence of identity) :** একটি মাত্র সংখ্যা 0 (শূন্য) $\in \mathbb{R}$ বিদ্যমান, যেন সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য $a + 0 = 0 + a = a$ এবং একটি মাত্র সংখ্যা $1 \in \mathbb{R}$ বিদ্যমান যেন সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য $a.1 = 1.a = a$ । 0 এবং 1 কে যথাক্রমে যোগ ও গুণনের অভেদক বলা হয়।

খ $(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$
$= x^2 + 2|xy| + y^2$ $[\because |x|^2 = x^2, |y|^2 = y^2, |x||y| = |xy|]$

বা, $(|x| + |y|)^2 \ge x^2 + 2xy + y^2$ $[\because |xy| \ge xy]$

বা, $(|x| + |y|)^2 \ge (x + y)^2$

বা, $(|x| + |y|)^2 \ge (|x + y|)^2$

বা, $|x + y|^2 \le (|x| + |y|)^2$

$\therefore$ $|x + y| \le |x| + |y|$ **(প্রমাণিত)**

গ $|-xy| \ge -xy$ $[\because |a| \ge a]$

বা, $2|xy| \ge -2xy$ $[\because |-a| = |a|]$

বা, $x^2 + y^2 + 2|x||y| \ge x^2 + y^2 - 2xy$ $[\because |xy| = |x||y|]$

বা, $|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \ge (x - y)^2$

বা, $(|x| + |y|)^2 \ge |x - y|^2$

যেহেতু $|x| + |y| \ge 0$ এবং $|x - y| \ge 0$

সুতরাং উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে পাই, $|x - y| \le |x| + |y|$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $f(x) = x^2 - 2x + 2, g(x) = x - 8$ */পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা/*

ক. $f(x) = 0$ এর কতটি মূল রয়েছে? কেন? ২

খ. $-8 < g(x) - 3 < 10$ অসমতাটি পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ৪

গ. $f(x) < 17$ অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 2x + 2$

এখন, $f(x) = 0$

বা, $x^2 - 2x + 2 = 0$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণের 2টি মূল রয়েছে। কারণ, সমীকরণটির ঘাত 2। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = x - 8$

$\therefore$ $-8 < g(x) - 3 < 10$

বা, $-8 < x - 8 - 3 < 10$

বা, $-8 < x - 11 < 10$

বা, $-8 + 11 < x - 11 + 11 < 10 + 11$

বা, $3 < x < 21$

বা, $-21 < x < 21$ $[\because -21 < 3]$

বা, $|x| < 21$ $[\because -\alpha < x < \alpha \Rightarrow |x| < \alpha]$

$\therefore$ $|x| < 21$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 2x + 2$

$\therefore$ অসমতাটি হল : $f(x) < 17$

বা, $x^2 - 2x + 2 < 17$

বা, $x^2 - 2x + 2 - 17 < 0$

বা, $x^2 - 2x - 15 < 0$

বা, $x^2 - 5x + 3x - 15 < 0$

বা, $x(x - 5) + 3(x - 5) < 0$

বা, $(x - 5)(x + 3) < 0$

শর্ত	$(x + 3)$ এর চিহ্ন	$(x - 5)$ এর চিহ্ন	$(x + 3)(x - 5)$ এর চিহ্ন
$x < -3$	−	−	+
$-3 < x < 5$	+	−	−
$x > 5$	+	+	+

নির্ণেয় সমাধান: $-3 < x < 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 5\}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $f(x) = 3x - 2, |x + y| < \frac{7}{3}$ */ঢাকা কলেজ, ঢাকা/*

ক. যদি $p, q, r \in \mathbb{R}$, $pq = rq$ এবং $q \ne 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $p = r$। ২

খ. $\frac{1}{|f(x - 2) + 3|} > 3$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. দেখাও যে, $|f(2x) + f(2y)| < 10$ ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু $q \ne 0$, সুতরাং q এর গুণাত্মক বিপরীতক বা, q^{-1} এর অস্তিত্ব আছে।

কল্পনানুসারে, $pq = rq$

বা, $(pq)q^{-1} = (rq)q^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা বিধি]

বা, $p(qq^{-1}) = r(qq^{-1})$ [সংযোজন যোগ্যতা বিধি অনুসারে]

বা, $p.1 = r.1$ [গুণের বিপরীতক]

$\therefore$ $p = r$ [গুণের অভেদক] **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - 2$

$\therefore f(x - 2) = 3(x - 2) - 2$
$= 3x - 6 - 2 = 3x - 8$

$\therefore$ $\frac{1}{|f(x - 2) + 3|} > 3$

বা, $|f(x - 2) + 3| < \frac{1}{3}$

বা, $|3x - 8 + 3| < \frac{1}{3}$

বা, $|3x - 5| < \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} < 3x - 5 < \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{3} + 5$

বা, $\frac{-1+15}{3} < 3x < \frac{1+15}{3}$

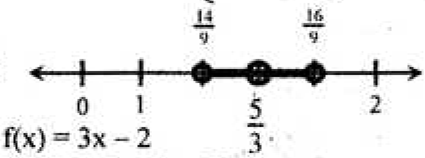
বা, $\frac{14}{3} < 3x < \frac{16}{3}$

বা, $\frac{14}{9} < x < \frac{16}{9}$ [উভয় পক্ষকে $\left(\frac{1}{3}\right)$ দ্বারা গুণ করে]

∴ নির্ণেয় সমাধান : $\frac{14}{9} < x < \frac{16}{9}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{14}{9} < x < \frac{16}{9} \text{ এবং } x \neq \frac{5}{3}\right\}$

সংখ্যারেখায় :



গ দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - 2$

∴ $f(2x) = 3(2x) - 2 = 6x - 2$

এবং $f(2y) = 3(2y) - 2 = 6y - 2$

এখন, $|x + y| < \frac{7}{3}$

বা, $\frac{-7}{3} < x + y < \frac{7}{3}$

বা, $\frac{-6 \times 7}{3} < 6(x + y) < 6 \times \frac{7}{3}$ [উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করে]

বা, $-14 < 6x + 6y < 14$

বা, $-14 - 4 < 6x + 6y - 4 < 14 - 4$ [উভয় পক্ষে 4 বিয়োগ করে]

বা, $-18 < 6x - 2 + 6y - 2 < 10$

বা, $-10 < f(2x) + f(2y) < 10$ [∵ $-18 < -10$]

∴ $|f(2x) + f(2y)| < 10$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৭ $f(x) = 3x$ *[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]*

ক. যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a + c = b + c$ হয় তবে দেখাও যে, $a = c$ ২

খ. সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও,

$\frac{1}{|f(x) - 5|} > 2, \left(x \neq \frac{5}{3}\right)$ ৪

গ. $|f(x) - 2x - 1| < \frac{1}{10}$ হলে দেখাও যে, $|[(\frac{1}{3}) f(x)]^2 - 1| < 1$ ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a + c = b + c$ [কল্পনা]

বা, $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$ [যোগের অনন্যতা বিধি]

বা, $a + \{c + (-c)\} = b + \{c + (-c)\}$ [যোগের সংযোগ বিধি]

বা, $a + 0 = b + 0$ [যোগের বিপরীতক]

∴ $a = c$ **(দেখানো হলো)** [যোগের অভেদক]

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 3x$

∴ $\frac{1}{|f(x) - 5|} > 2 \left(x \neq \frac{5}{3}\right)$

বা, $\frac{1}{|3x - 5|} > 2 \left(x \neq \frac{5}{3}\right)$

বা, $|3x - 5| < \frac{1}{2}$ বা, $-\frac{1}{2} < 3x - 5 < \frac{1}{2}$

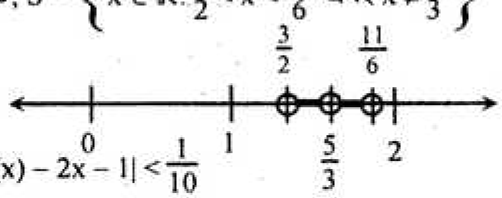
বা, $-\frac{1}{2} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$

বা, $\frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2}$ ∴ $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$

নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6} \text{ এবং } x \neq \frac{5}{3}\right\}$

সংখ্যারেখায়:



গ দেওয়া আছে, $|f(x) - 2x - 1| < \frac{1}{10}$

বা, $|3x - 2x - 1| < \frac{1}{10}$ [∵ $f(x) = 3x$]

বা, $|x - 1| < \frac{1}{10}$ .... (i)

বা, $|x - 1| + 2 < \frac{1}{10} + 2$

এখন, $|x - 1| + 2 \geq |x - 1 + 2| \geq |x + 1|$

∴ $|x + 1| < \frac{1}{10} + 2$ বা, $|x + 1| < \frac{1 + 20}{10}$

বা, $|(x + 1)| < \frac{21}{10}$ .... (ii)

(i) × (ii) হতে, $|x - 1| |x + 1| < \frac{1}{10} \times \frac{21}{10}$

বা, $|(x - 1)(x + 1)| < \frac{21}{100}$ [∵ $|a| |b| = |ab|$]

বা, $|x^2 - 1| < \frac{21}{100}$ বা, $\left|\left(\frac{3x}{3}\right)^2 - 1\right| < \frac{21}{100}$

বা, $\left|\left[\frac{1}{3} f(x)\right]^2 - 1\right| < \frac{21}{100}$

∴ $\left|\left[\frac{1}{3} f(x)\right]^2 - 1\right| < 1$ $\left[∵ \frac{21}{100} < 1\right]$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $f(x) = x - 1$ একটি ফাংশন।

[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]

ক. $-3 < f(x) < 5$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{1}{|f(x) - 1|} \geq 5$ অসমতাটি সমাধান কর ও সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও। ৪

গ. $|f(x)| < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $|x^2 - 1| < \frac{11}{25}$ ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$

প্রশ্নমতে, $-3 < f(x) < 5 \Rightarrow -3 < x - 1 < 5$

$\Rightarrow -3 - 1 < x - 1 - 1 < 5 - 1$ [1 বিয়োগ করে]

$\Rightarrow -4 < x - 2 < 4$

∴ $|x - 2| < 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\frac{1}{|f(x) - 1|} \geq 5$

$\Rightarrow \frac{1}{|x - 2|} \geq 5$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ হলে প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়ে যাবে।

∴ $x \neq 2$

এখন, $\frac{1}{|x - 2|} \geq 5 \Rightarrow |x - 2| \leq \frac{1}{5}$ [ব্যস্তকরণ করে]

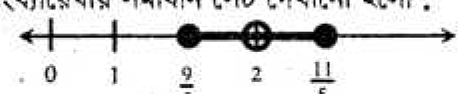
$\Rightarrow -\frac{1}{5} \leq x - 2 \leq \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + 2 \leq x - 2 + 2 \leq \frac{1}{5} + 2$

∴ $\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{11}{5}$

∴ নির্ণেয় সমাধান $= \frac{9}{5} \leq x \leq \frac{11}{5}$ এবং $x \neq 2$

∴ সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{9}{5} \leq x \leq \frac{11}{5} \text{ এবং } x \neq 2\right\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলো :



গ দেওয়া আছে, $|f(x)| < \frac{1}{5}$

$\Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{5}$ .... (i)

∴ $|x + 1| = |x - 1 + 2| \leq |x - 1| + 2 < \frac{1}{5} + 2$

∴ $|x + 1| < \frac{11}{5}$ .... (ii)

(i) ও (ii) গুণ করে পাই, $|x - 1| |x + 1| < \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{5}$

$\Rightarrow |(x - 1)(x + 1)| < \frac{11}{25}$

∴ $|x^2 - 1| < \frac{11}{25}$ **(দেখানো হলো)**

★★ বাস্তব সংখ্যা ও বাস্তব সংখ্যার উপসেট, বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য ভিত্তিক বর্ণনা, অসমতা সম্পর্কিত স্বীকার্য

১. নিচের কোনটিকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায়? (মধ্যম)
ক $\sqrt{2}$ খ $\sqrt[3]{11}$
গ π ঘ $\sqrt{0.1}$ **ঘ**

২. বাস্তব সংখ্যায় বিনিময় বিধি স্বীকার্য কোনটি? (মধ্যম)
ক $2 \times 2^{-1} = 1$
খ $2 \times 1 = 2$
গ $2 \times 3 = 3 \times 2$
ঘ $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$ **গ**

৩. বাস্তব সংখ্যায় অভেদকের অস্তিত্ব স্বীকার্য কোনটি? (মধ্যম)
ক $2 + 3 = 3 + 2$ খ $2 \times 1 = 2$
গ $2 + (-2) = 0$ ঘ $2 \times 2^{-1} = 1$ **খ**

৪. বাস্তব সংখ্যায় বিপরীতকের অস্তিত্ব স্বীকার্য কোনটি? (মধ্যম)
ক $2 + 0 = 2$ খ $2 \times 1 = 2$
গ $2 + 3 = 3 + 2$ ঘ $2 + (-2) = 0$ **ঘ**

৫. কোনটি সীমিত সেট? (মধ্যম)
ক $\{0, \pm 1, \pm 2....\}$
খ $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$
গ $\left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ এবং } q \neq 0\right\}$
ঘ $\{x : x \in \mathbb{R}, x < 1$ বা, $x > 2\}$ **খ**

৬. $A = \{x : x \in \mathbb{N}$ এবং $x =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ$\}$ হলে এবং বৃত্তের পরিধির সেট B হলে, B কোন সেটের উপসেট হবে? (মধ্যম)
ক $\mathbb{N}$ খ $\mathbb{R}^-$
গ $\mathbb{Q}$ ঘ $\mathbb{Q}'$ **ঘ**

৭. $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ও $\mathbb{Q}$ সেটগুলোর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক $\mathbb{R} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ খ $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
গ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ঘ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ **গ**

৮. $a, b \in \mathbb{R}$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক $|a + b| \geq |a| + |b|$ খ $|a - b| \geq |a| + |b|$
গ $|a - b| \leq |a| + |b|$ ঘ $|a - b| \leq |a| - |b|$ **গ**

৯. $\mathbb{Z}$ ও $\mathbb{N}$ এর জন্য নিচের কোনটি প্রযোজ্য? (মধ্যম)
ক $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_{<0} = \mathbb{Z}$
খ $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_{>0} = \mathbb{Z}$
গ $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_{<0} = \mathbb{Z}$
ঘ $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_{\leq 0} - \{0\} = \mathbb{Z}$ **গ**

১০. $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 5\}$ হলে A এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম যথাক্রমে কত? (মধ্যম)
ক 6 ও 1 খ 5 ও 2
গ $[5, \infty)$ ও $[-\infty, 2)$ ঘ $(-\infty, 2)$ ও $(5, \infty)$ **খ**

১১. $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ হলে Sup B কোনটি? (মধ্যম)
ক 0 খ 1
গ 2 ঘ -1 **খ**

১২. $A = [1, 5)$ এর উর্ধ্বসীমার সেট কোনটি? (সহজ)
ক $[5, \infty)$ খ $(5, \infty)$
গ $(-\infty, 1]$ ঘ $(-\infty, 1)$ **ক**

১৩. $D = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ এর নিম্নসীমার সেট কোনটি? (সহজ)
ক $(1, \infty)$ খ $[0, \infty)$
গ $(-5, \infty)$ ঘ $(-\infty, -5]$ **ঘ**

১৪. $A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ হলে A এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম যথাক্রমে কত? (মধ্যম)
ক 0 ও ∞ খ 1 ও $\frac{1}{2}$
গ $\frac{1}{2}$ ও 0 ঘ 0 ও 1 **খ**

১৫. $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ সেটটির গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (Inf S) কোনটি? (মধ্যম)
ক 0 খ $\frac{1}{4}$
গ 1 ঘ ∞ **ক**

১৬. $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 11x + 24 < 0\}$ সেটটির ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা (Sup S) নিচের কোনটি? (মধ্যম)
ক 0 খ 3
গ 8 ঘ 24 **গ**

১৭. কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল অমূলদ সংখ্যা (সহজ)
ক 169 খ 625
গ 676 ঘ 680 **ঘ**

১৮. $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ হলে, S এর লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা কত? (মধ্যম)
ক 1 খ -1
গ 2 ঘ 0 **ঘ**

১৯. $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a > b$ হয় তবে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক $a + c < b + c$ খ $a + c > b + c$
গ $a + c \not> b + c$ ঘ $a + c = b + c$ **খ**

২০. নিচের কোনটি মূলদ সংখ্যা? (সহজ)
ক $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ খ $\sqrt{2} \times \sqrt{4}$
গ $\sqrt{3} \times \sqrt{9}$ ঘ $\sqrt{2} \times \sqrt{9}$ **ক**

২১. সেট $S = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ এর সুপ্রিমাম হলো— (মধ্যম) *[এম.সি. কলেজ, সিলেট]*

ⓚ $\frac{3}{2}$ ⓚ খ) 0
গ) 1 ঘ) অসংজ্ঞায়িত **ক**

২২. $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ও $\mathbb{Q}$ সেটগুলোর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক) $\mathbb{R} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
খ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
গ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
ঘ) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ **গ**

২৩. নিচের কোনটি মূলদ সংখ্যা? (সহজ)

ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ গ) π ঘ) e **খ**

২৪. $a < b$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক) $ac < bc$ যখন $c > 0$
খ) $ac > bc$ যখন $c > 0$
গ) $ac < bc$ যখন $c < 0$
ঘ) $ab > ac$ যখন $c < 0$ **ক**

২৫. $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x + 21 < 0\}$ হলে—

i. $\text{Inf } S = 3$
ii. $\text{Sup } S = 7$
iii. $S = [3, 7]$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম) *[আনন্দ মোহন কলেজ, ময়মনসিংহ]*

ক) i ও ii খ) i ও iii
গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii **ক**

২৬. $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\dots\dots\right\}$ সেটটির গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (Inf S) কোনটি? (মধ্যম)

ক) 0 খ) $\frac{1}{4}$ গ) 1 ঘ) ∞ **ক**

২৭. $A = \{x : x = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$—

i. সেটটির সুপ্রিমাম 1
ii. সেটটি সীমিত
iii. সেটটি স্বাভাবিক সংখ্যার

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম) *[দিনাজপুর সরকারি কলেজ, দিনাজপুর]*

ক) i ও ii খ) i ও iii
গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii **ক**

২৮. $c < 0$ এবং $a < b$ হলে—

i. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ii. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
iii. $ac > bc$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক) i ও ii খ) i ও iii
গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii **গ**

২৯. দেওয়া আছে, $x < -2$ এবং

i. x একটি বাস্তব সংখ্যা
ii. x একটি ঋণাত্মক সংখ্যা
iii. x একটি পূর্ণ সংখ্যা।

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক) i ও ii খ) ii ও iii
গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৩০ ও ৩১)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$a = \frac{1}{2}$ ও $b = \frac{9}{2}$

৩০. সংখ্যা দুইটিকে –2 দ্বারা ভাগ দিলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক) $-\frac{a}{2} < -\frac{b}{2}$ খ) $-\frac{a}{2} > -\frac{b}{2}$
গ) $-\frac{a}{2} = -\frac{b}{2}$ ঘ) $-\frac{a}{2} \geq -\frac{b}{2}$ **খ**

৩১. সংখ্যা দুইটির মাঝে স্বাভাবিক সংখ্যা কয়টি? (মধ্যম)

ক) 4 খ) 3 গ) 2 ঘ) 1 **ক**

৩২. বাস্তব সংখ্যায় $0 < |x - 3| < 4$ অসমতাটির সমাধান নিচের কোনটি? (মধ্যম) *[নটর ডেম কলেজ, ঢাকা]*

ক) $\{x : -1 < x < 7\}$
খ) $\{x : -1 \leq x \leq 7\}$
গ) $\{x : -1 < x < 3\} \cap \{x : 3 < x < 7\}$
ঘ) $\{x : -1 < x < 3\} \cup \{x : 3 < x < 7\}$ **ঘ**

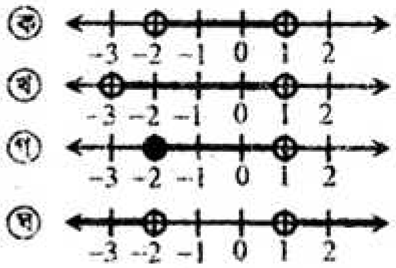
৩৩. $|-5-7| - |-2+9| - |-3|$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক) –3 খ) 1
গ) 2 ঘ) 9 **গ**

৩৪. $-5 < x < 2$ অসমতাটির পরমমান আকারে প্রকাশ কোনটি ? (মধ্যম)

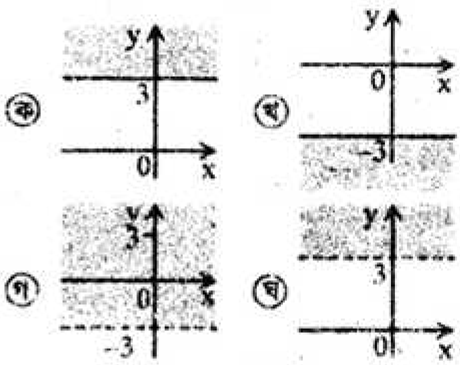
ক) $|2x + 3| < 7$ খ) $|2x + 3| > 7$
গ) $|4x + 3| < 7$ ঘ) $|4x + 3| > 7$ **ক**

৩৫. $|2x + 1| < 3$ এর সংখ্যারেখা নিচের কোনটি? (কঠিন)



উত্তর: ক

৩৬. $y - 3 > 0$ অসমতাটির লেখচিত্র কোনটি? (মধ্যম)



উত্তর: ঘ

৩৭. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|3x + 1|} \geq 5$ অসমতাটির সমাধান কোনটি? (সহজ)

ক $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{5}\right)$

খ $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$

গ $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{15}\right)$

ঘ $\left[-\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$

উত্তর: ঘ

৩৮. $S = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq 3 - x \leq 8\}$ হলে,

i. $|x| \leq 5$

ii. $S = \{x \in \mathbb{R} : x \in [-5, 5]\}$

iii. $\text{Inf } S = 5$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

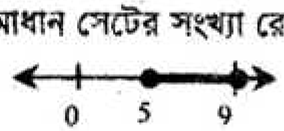
ক i　খ ii　গ i ও ii　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: গ

৩৯. $|x - 7| \leq 2$ অসমতাটির—

i. সমাধান: $5 \leq x \leq 9$

ii. সমাধান সেটের সংখ্যা রেখা:



iii. গরিষ্ঠ নিম্নসীমা 5

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii　খ i ও iii　গ ii ও iii　ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ

নিচের তথ্যের আলোকে (৪০ ও ৪১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$a = 14 + |-1 - 4| - 3 - |-8|;\ 2 \leq x \leq 8$

৪০. a এর মান কত? (মধ্যম)

ক 7　খ 8　গ 9　ঘ 10

উত্তর: খ

৪১. উদ্দীপকে উল্লেখিত অসমতাটিকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে? (মধ্যম)

ক $|x - 5| \leq 3$　খ $|x - 4| \leq 3$

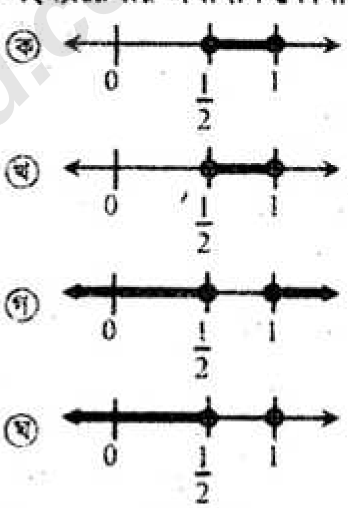
গ $|x - 5| \geq 3$　ঘ $|x - 3| \leq 4$

উত্তর: ক

নিচের তথ্যের আলোকে (৪২ ও ৪৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

৪২. সংখ্যারেখায় সমাধান কোনটি? (মধ্যম)



উত্তর: গ

৪৩. নিচের কোন অসমতার সমাধান সেট প্রদত্ত অসমতার সমাধান সেটের পূরক সেট নির্দেশ করে? (কঠিন)

ক $\left|x - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$　খ $\left|x - \frac{3}{4}\right| > \frac{1}{4}$

গ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 1$　ঘ $|x - 1| < \frac{1}{2}$

উত্তর: ক

৪৪. x-এর কোন বাস্তব মানের জন্য $6 + 5x - x^2 > 0$? (মধ্যম) *[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]*

ক $2 < x < 6$　খ $-1 < x < 6$

গ $-6 < x < 1$　ঘ $0 < x < 6$

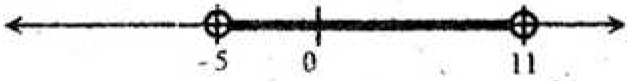
উত্তর: খ

৪৫. x এর বাস্তব মানের জন্য $3x - x^2 + 4$ এর গরিষ্ঠ মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{17}{4}$　খ $\frac{21}{4}$　গ $\frac{25}{4}$　ঘ $\frac{-15}{4}$

উত্তর: গ

নিচের তথ্যের আলোকে (৪৬ ও ৪৭)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৪৬. সংখ্যারেখার অসমতায় প্রকাশ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $x < -5$ ⓚh $-5 < x < 11$

ⓖ $x < 11$ ⓖh $|x - 3| < 8$ **(খ)**

৪৭. সংখ্যারেখাটির উর্ধ্বসীমা কোনটি? (সহজ)

(ক) -5 (খ) 0

(গ) 8 (ঘ) 11 **(ঘ)**

৪৮. $x - y \geq 2$ সরলরেখা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল ---

i. সরলরেখাস্থ সকল বিন্দুর জন্য সত্য

ii. সরলরেখা থেকে মূলবিন্দুর বিপরীত দিকের সকল অঞ্চল

iii. সরলরেখা থেকে মূলবিন্দুর দিকের সকল অঞ্চল

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(ক)**

নিচের তথ্যের আলোকে (৪৯ ও ৫০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = |2x - 6|$ একটি পরমমান ফাংশন।

৪৯. নিম্নোক্ত কোন শর্তে $f(x) > 2x$ হবে? (কঠিন)

(ক) $x < 3$ (খ) $x > 1.5$

(গ) $x < 1.5$ (ঘ) $x > 3$ **(গ)**

৫০. x এর কোন মানের জন্য $f(x) < x + 3$ হবে? (কঠিন)

(ক) $1 < x < 9$ (খ) $1 \leq x \leq 9$

(গ) $x > 1$ (ঘ) $x < 9$ **(ক)**

অধ্যায়-২: যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম

প্রশ্ন ▶ ১ দৃশ্যকল্প-১: $p = x - 5, x \in \mathbb{R}$. [রা. বো. ১৭]

দৃশ্যকল্প-২: $f = 2x + 3y$, $g = 5x + 3y$ যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$.

ক. বাস্তব সংখ্যায় বিপরীত এর অস্তিত্ব ব্যাখ্যা কর। ২

খ. $\frac{1}{|p|} \geq 3$ হলে $(x \neq 5)$ সমাধান সেট নির্ণয় করে সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. দৃশ্যকল্প ২ এর আলোকে $f \leq 12$, $g \geq 15$ এবং $x, y \geq 0$ হলে লেখচিত্রের মাধ্যমে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি নির্বাচন কর। শর্তে কী পরিবর্তন করলে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি চতুর্ভুজ হবে? ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বিপরীতকের অস্তিত্বশীলতা: সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, একটি মাত্র $-a \in \mathbb{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a + (-a) = (-a) + a = 0$ হবে। এখানে, $-a$ কে a এর যোগের বিপরীতক বলা হয়। আবার, সকল $a \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$ এর জন্য একটি মাত্র $a^{-1} \in \mathbb{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, এখানে, a^{-1} কে a এর গুণনের বিপরীতক বলা হয়।

খ দেওয়া আছে, $p = x - 5$

$\therefore \frac{1}{|p|} \geq 3$

বা, $\frac{1}{|x-5|} \geq 3$

বা, $|x-5| \leq \frac{1}{3}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $-\frac{1}{3} \leq x - 5 \leq \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + 5 \leq x - 5 + 5 \leq \frac{1}{3} + 5$ [5 যোগ করে]

বা, $\frac{15-1}{3} \leq x \leq \frac{1+15}{3}$

বা, $\frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}$ এবং $x \neq 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3} \text{ এবং } x \neq 5\right\}$ **(Ans.)**

সংখ্যারেখা :



গ দেওয়া আছে, $f = 2x + 3y$

$g = 5x + 3y$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $2x + 3y \leq 12$

$5x + 3y \geq 15$

এবং $x, y \geq 0$

অসমতাগুলিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি, $2x + 3y = 12$

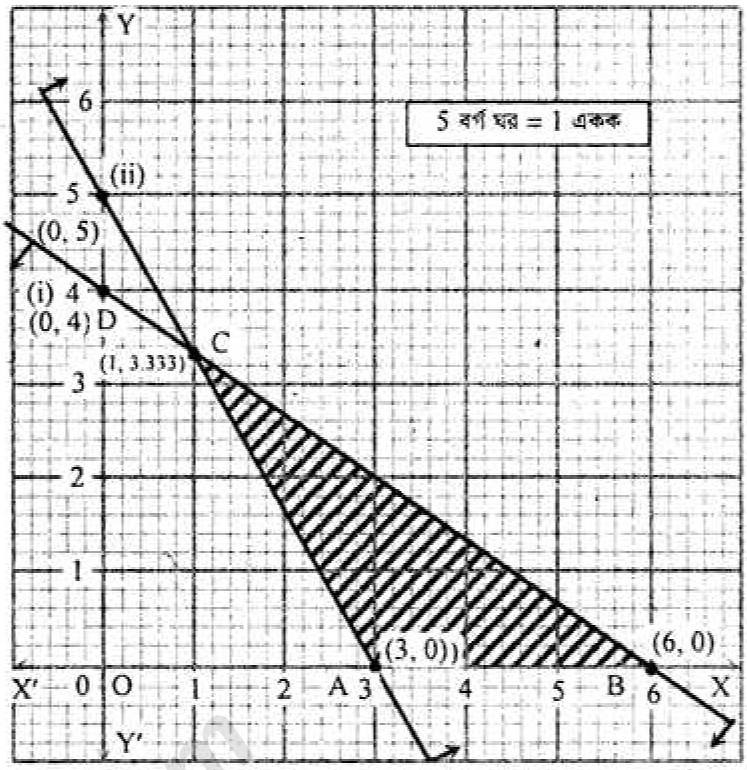
বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ .... (i)

$5x + 3y = 15$

বা, $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ .... (ii)

$x = 0$ .... (iii)

$y = 0$ .... (iv)



লেখচিত্রে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি ABC যা ত্রিভুজাকৃতির। **(Ans.)**

শর্তে $g \geq 15$ এর স্থলে $g \leq 15$ বিবেচনা করলে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি হবে OACD যা একটি চতুর্ভুজ।

প্রশ্ন ▶ ২ A ও B দুই ধরনের খাবার আছে যার মধ্যে প্রোটিন ও শ্বেতসার নিম্নরূপ: [দি. বো. ১৭]

খাদ্য	প্রোটিন	শ্বেতসার	প্রতি এককের দাম
A	4	5	40 টাকা
B	6	3	50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	16	11	

ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বলতে কি বুঝ? ২

খ. সমস্যাটির একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর। ৪

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সমাধান কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming):** সর্বনিম্ন বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জনের লক্ষ্যে কোনো পরিকল্পনাকে (i) উদ্দেশ্য ফাংশন (objective function) (ii) সিদ্ধান্ত চলক (Decision variable) ও (iii) শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints) এই তিনটি তথ্যকে ক্যানটোরোভিচের নিয়মে গাণিতিক মডেলে রূপদান করলে যে সমাধান যোগ্য গাণিতিক সমস্যা পাওয়া যায় তাকে **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming)** বলা হয়।

খ মনে করি, A খাবার x কেজি এবং B খাবার y কেজি প্রয়োজন।

দেওয়া আছে,

A এবং B খাবারে প্রোটিন আছে যথাক্রমে 4 একক ও 6 একক। দৈনিক ন্যূনতম প্রোটিন প্রয়োজন 16 একক।

A ও B দৈনিক শ্বেতসার আছে যথাক্রমে 5 একক ও 3 একক। প্রত্যেহ ন্যূনতম শ্বেতসার প্রয়োজন 11 একক।

A খাবারের প্রতি এককের দাম = 40 টাকা

B ,, ,, ,, ,, = 50 টাকা

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, অভীষ্ট ফাংশন, $z = 40x + 50y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $4x + 6y \geq 16$

$5x + 3y \geq 11$

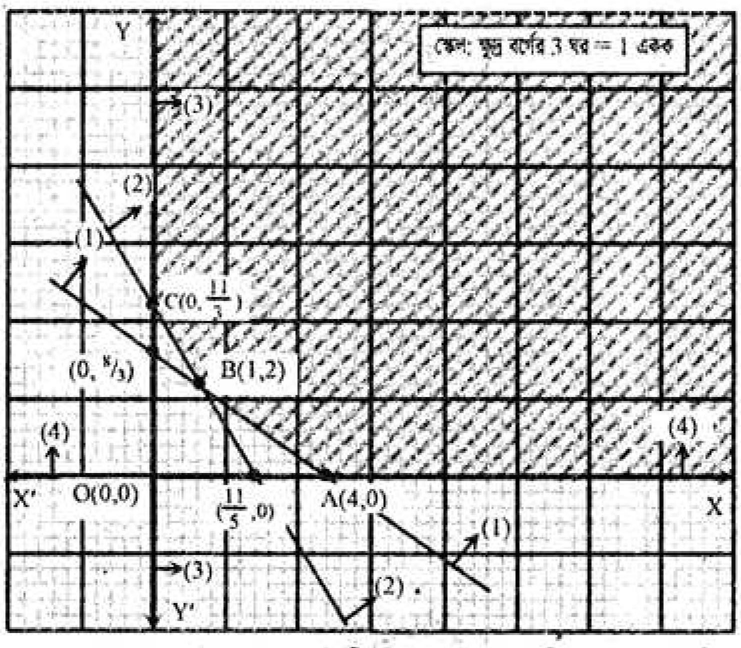
$x \geq 0, y \geq 0$

গ অভীষ্ট ফাংশন, $z = 40x + 50y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $4x + 6y \geq 16$

$5x + 3y \geq 11$

$x \geq 0, y \geq 0$



প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই, $4x + 6y = 16$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1 \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$5x + 3y = 11$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1 \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

$x = 0 \;\ldots\ldots\ldots (3)$

$y = 0 \;\ldots\ldots\ldots (4)$

লেখচিত্রে দেখা যায় (1), (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $4x + 6y \geq 16$ এবং $5x + 3y \geq 11$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডানের সমস্ত এলাকা। যেখানে A (4, 0), B হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদ বিন্দু।

$\therefore$ B (1, 2) এবং C $(0, \frac{11}{3})$

এখন A (4, 0) বিন্দুতে $z = (40 \times 4) + (50 \times 0) = 160$

B (1, 2) " $z = (40 \times 1) + (50 \times 2) = 140$

এবং C $\left(0, \frac{11}{3}\right)$ " $z = (40 \times 0) + \left(50 \times \frac{11}{3}\right) = 183.33$

স্পষ্টতঃ B (1, 2) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্নমান পাওয়া যায়।

A খাদ্য 1 কেজি; B খাদ্য 2 কেজি; মোট সর্বনিম্ন খরচ 140 টাকা **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $f(x) = ax + by + c,\ g(x) = lx + my + n$ [কু. বো. ১৭]

ক. $|2x - 1| < \frac{1}{3}$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ২

খ. উদ্দীপকে $a = 1,\ b = c = 0,\ |f(x) - 1| < \frac{1}{11}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$ ৪

গ. $a = 1, b = -1, c = 2, f(x) \geq 0, l = 1, m = 1, n = -4, g(x) \leq 0$ এবং $x, y \geq 0$ হলে, $z = x + 2y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

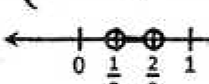
ক $|2x - 1| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < 2x - 1 < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 < 2x < \frac{1}{3} + 1$ [সকল পক্ষে 1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{2}{3} < 2x < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$

সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$

সংখ্যারেখা: 

(Ans.)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = ax + by + c$

এবং $a = 1, b = c = 0, |f(x) - 1| < \frac{1}{11}$

তাহলে, $f(x) = x$

$\therefore \{f(x)\}^2 = x^2$

এখন, $|x - 1| < \frac{1}{11}$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} < x - 1 < \frac{1}{11}$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{11} + 1$ [1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{10}{11} < x < \frac{12}{11}$

$\Rightarrow \frac{100}{121} < x^2 < \frac{144}{121}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{100}{121} - 1 < x^2 - 1 < \frac{144}{121} - 1$ [1 বিয়োগ করে]

$\Rightarrow \frac{100 - 121}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{144 - 121}{121}$

$\Rightarrow -\frac{21}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{23}{121}$

$\Rightarrow -\frac{23}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{23}{121}$ $\left[\because -\frac{23}{121} < \frac{-21}{121}\right]$

$\therefore |\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $f(x) = ax + by + c$

$g(x) = lx + my + n$

এখানে, $a = 1, b = -1, c = 2$ হলে

$f(x) = x - y + 2$

এবং $l = 1, m = 1, n = -4$ হলে

$g(x) = x + y - 4$

তাহলে, আমরা পাই,

অভিষ্ট ফাংশন: $z = x + 2y$

শর্ত: $x - y + 2 \geq 0$ বা, $x - y \geq -2$

$x + y - 4 \leq 0$ বা, $x + y \leq 4$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রাপ্ত অসমতাগুলির সমাধানযোগ্য সমীকরণ,

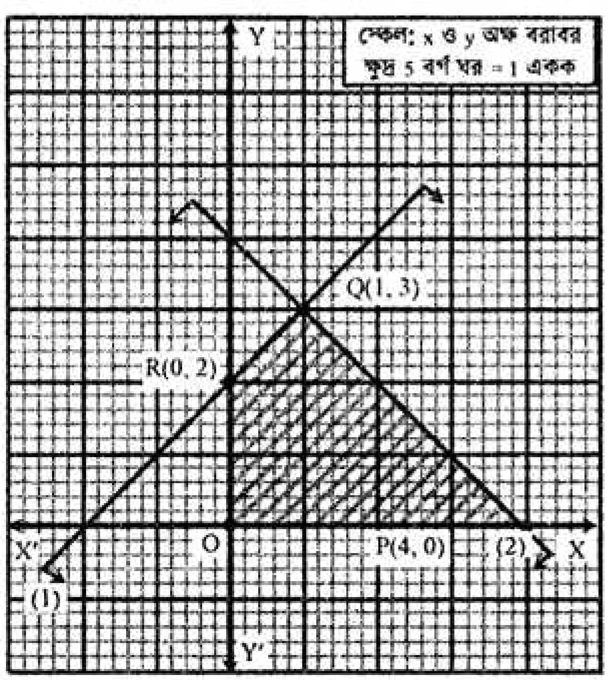
$x - y = -2 \;\ldots\ldots\ldots$ (i)

$x + y = 4 \;\ldots\ldots\ldots$ (ii)

$x = 0 \;\ldots\ldots\ldots$ (iii)

$y = 0 \;\ldots\ldots\ldots$ (iv)

গ্রাফ কাগজে i, ii, iii ও iv নম্বর রেখা অঙ্কন করি।



সমীকরণ (1) $\Rightarrow 0 - 0 \geq -2$ সত্য

সমীকরণ (2) $\Rightarrow 0 + 0 \leq 4$ সত্য

$\therefore$ সমাধান অঞ্চল সরলরেখা i, ii, iii, iv এর যেদিক মূলবিন্দু সেদিকে অবস্থিত।

সমাধান অঞ্চল: OPQR

P বিন্দু নির্ণয়: (ii) ও (iv) নং রেখার ছেদবিন্দু:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(4, 0)$

Q বিন্দু নির্ণয়: i ও ii নং রেখার ছেদবিন্দু:

$\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(1, 3)$

R বিন্দু নির্ণয়: i ও iii নং রেখার ছেদবিন্দু:

$\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(0, 2)$

O বিন্দু নির্ণয়: iii ও iv নং রেখার ছেদবিন্দু O(0, 0)

এখন সমাধান অঞ্চল হতে প্রাপ্ত OPQR বিন্দুগুলো $z = x + 2y$ এ বসিয়ে z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করি।

	O(0, 0)	P(4, 0)	Q(1, 3)	R(0, 2)
$z = x + 2y$	0	4	7	4

∴ Q(1, 3) বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ 7 হয়। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ দৃশ্যকল্প-১ : $f(x) = |x - 3|$ [সি. বো. ১৭]

দৃশ্যকল্প-২ : $4x + y \geq 16$, $4x + 7y \geq 40$, $x, y \geq 0$.

ক. $-4 < 2x - 1 < 12$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. $f(x) < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $f(x^2 - 6) < \frac{31}{25}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে লেখচিত্রের সাহায্যে $Z = 4x + 2y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $-4 < 2x - 1 < 12$

বা, $-4 - 4 < 2x - 1 - 4 < 12 - 4$

বা, $-8 < 2x - 5 < 8$

∴ $|2x - 5| < 8$ **(Ans.)**

খ $f(x) = |x - 3|$

$f(x^2 - 6) = |x^2 - 6 - 3| = |x^2 - 9|$

এখন, $f(x) < \frac{1}{5}$

বা, $|x - 3| < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} < x - 3 < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} + 3 < x - 3 + 3 < \frac{1}{5} + 3$

বা, $\frac{14}{5} < x < \frac{16}{5}$

বা, $\frac{196}{25} < x^2 < \frac{256}{25}$

বা, $\frac{196}{25} - 9 < x^2 - 9 < \frac{256}{25} - 9$

বা, $-\frac{29}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$

বা, $-\frac{31}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$ $\left[\because -\frac{31}{25} < -\frac{29}{25}\right]$

বা, $|x^2 - 9| < \frac{31}{25}$

∴ $f(x^2 - 6) < \frac{31}{25}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $4x + y \geq 16$ ... ... (i)

$4x + 7y \geq 40$ ... ... (ii)

(i) নং অসমতার অনুরূপ সমীকরণ,

$4x + y = 16$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} = 1$

যা A (4, 0) এবং B(0, 16) বিন্দু দিয়ে যায়

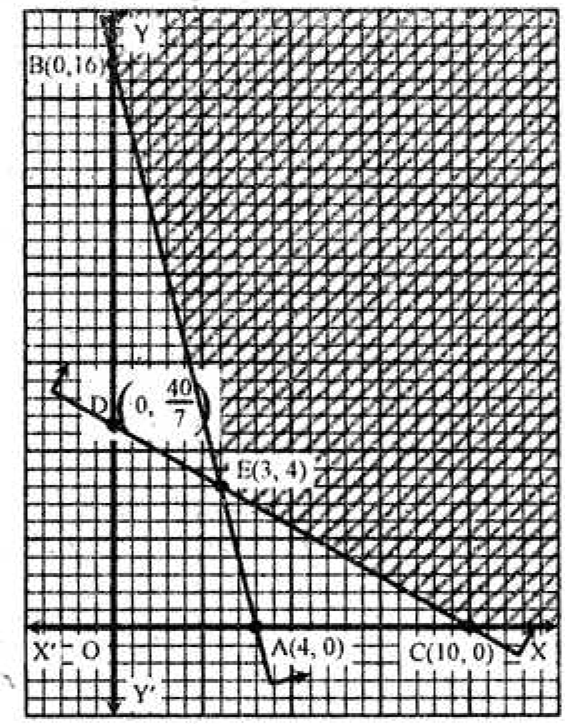
আবার (ii) নং অসমতার অনুরূপ সমীকরণ,

$4x + 7y = 40$

বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{\frac{40}{7}} = 1$

যা C(10, 0) এবং $D\left(0, \frac{40}{7}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ ছক কাগজে স্থাপন করি।



ছায়াঘেরা অংশের কৌণিক বিন্দুগুলো C(10, 0) E(3, 4), B (0, 16)

$z = 4x + 2y$

B বিন্দুতে $z = 4.0 + 2.16 = 32$

C বিন্দুতে $z = 4.10 + 2.0 = 40$

E বিন্দুতে $z = 4.3 + 2.4 = 20$

∴ z এর সর্বনিম্ন মান, $z_{min} = 20$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫ দৃশ্যকল্প-১: দুই প্রকার খাদ্য F_1 এবং F_2 তে ভিটামিন A ও C পাওয়া যায়। এক একক F_1 খাদ্যে 7- একক ভিটামিন A ও 3-একক ভিটামিন C পাওয়া যায়। আবার প্রতি একক F_2 খাদ্যে 2-একক ভিটামিন A ও 5-একক ভিটামিন C পাওয়া যায়। F_1 ও F_2 খাদ্যের প্রতি এককের দাম যথাক্রমে 25 টাকা ও 18 টাকা। একজন লোকের দৈনিক ন্যূনতম 45 একক ভিটামিন A এবং 60-একক ভিটামিন C প্রয়োজন।

দৃশ্যকল্প-২: দুই চলকের যোগাশ্রয়ী

অসমতা: $x + y - 7 \leq 0$

$x - 2y - 4 \geq 0$ [ব. বো. ১৭]

ক. 1 এর ঘনমূল নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $x, y \geq 0$ শর্তে $z = 3x + 4y$ এর সর্বনিম্ন মান লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন-এর চাহিদা মেটানোর জন্য একটি যোগাশ্রয়ী সমস্যা গঠন কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$

তাহলে, $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

∴ $x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$

$= \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

খ প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন, $Z = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y - 7 \leq 0$

∴ $x + y \leq 7$

$x - 2y - 4 \geq 0$

∴ $x - 2y \geq 4$

$x, y \geq 0$.

প্রথমে অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + y \le 7$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x + y = 7$

$$\therefore \frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1 \ldots\ldots (1)$$

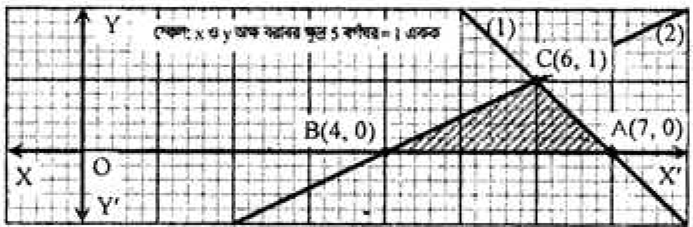
$x - 2y \ge 4$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x - 2y = 4$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1 \ldots\ldots (2)$$

$x \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x = 0 \ldots\ldots (3)$

$y \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $y = 0 \ldots\ldots (4)$

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি। প্রতি 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরা হলো।



লেখচিত্র হতে দেখা যায় ABC সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল। সমাধান অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো A(7, 0), B(4, 0) এবং C(6, 1)

A(7, 0) বিন্দুতে, $z = 3 \times 7 + 4 \times 0 = 21$

B(4, 0) বিন্দুতে, $z = 3 \times 4 + 4 \times 0 = 12$

C(6, 1) বিন্দুতে, $z = 3 \times 6 + 4 \times 1 = 18 + 4 = 22$

$\therefore$ z এর সর্বনিম্ন মান 12 **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত তথ্যসমূহ নিম্নোক্তভাবে সাজানো হলো:

খাদ্য	ভিটামিন A	ভিটামিন C	প্রতি এককের মূল্য
F_1	7	3	25 টাকা
F_2	2	5	18 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	45	60	

মনে করি, F_1 খাদ্য x একক এবং F_2 খাদ্য y একক।

অভীষ্ট ফাংশন, $z_{min} = 25x + 18y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $7x + 2y \ge 45$

$3x + 5y \ge 60$

$x \ge 0, y \ge 0$

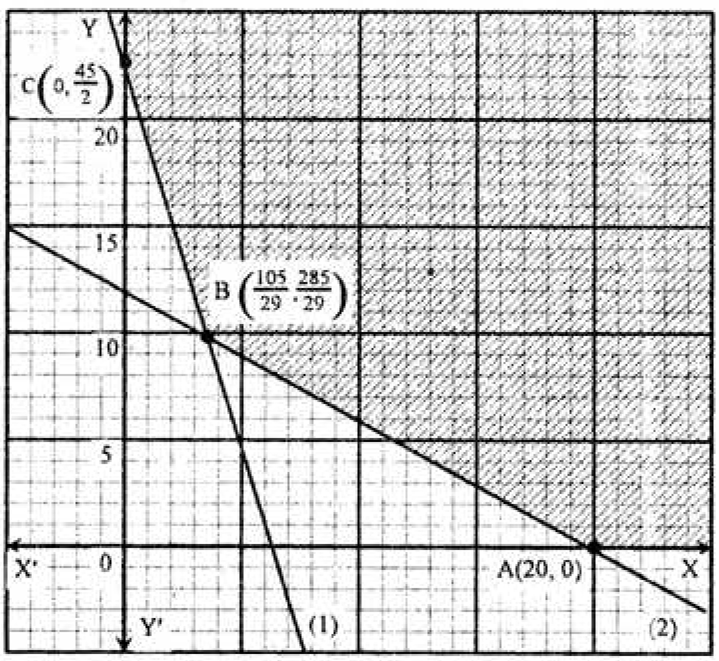
প্রাপ্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণ গঠন করি এবং ছক কাগজে স্থাপন করে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি। ছক কাগজে 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরা হল।

$$7x + 2y = 45 \Rightarrow \frac{x}{\frac{45}{7}} + \frac{y}{\frac{45}{2}} = 1 \ldots\ldots (1)$$

$$3x + 5y = 60 \Rightarrow \frac{x}{20} + \frac{y}{12} = 1 \ldots\ldots (2)$$

$x = 0 \ldots\ldots (3)$

$y = 0 \ldots\ldots (4)$



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, (1) ও (2) নং এর যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশের বিন্দুসমূহ সমাধান এলাকা গঠন করে। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা ABC হতে শুরু করে ১ম চতুর্ভাগের ডানদিকের সমস্ত এলাকা। এখানে A(20, 0), $C\left(0, \frac{45}{2}\right)$ এবং (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ সম্ভাব্য সমাধান বিন্দু।

A(20, 0) বিন্দুতে $z = 25 \times 20 + 18 \times 0 = 500$

$B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ বিন্দুতে, $z = 25 \times \frac{105}{29} + 18 \times \frac{285}{29}$

$$= \frac{7755}{29} = 267.414$$

$C\left(0, \frac{45}{2}\right)$ বিন্দুতে, $z = 25 \times 0 + 18 \times \frac{45}{2} = 405.$

স্পষ্টত $B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বনিম্ন 267.414 টাকা খরচ করে ন্যূনতম চাহিদা মেটানো সম্ভব। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $z = 5x + y$

শর্ত : $x + y \le 5 \ldots\ldots\ldots (i)$

$x + 2y \ge 8 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$x \ge 0, y \ge 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$ *[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]*

ক. সরল সমীকরণ এবং দুই চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ কী? ২

খ. z এর সর্বনিম্ন মান কত? ৪

গ. (i) ও (ii) নং অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **সরল সমীকরণ :** যে সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 1 তাকে সরল সমীকরণ বলে।

দুই চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ : যে সরল সমীকরণের চলক 2টি তাকে দুই চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ বলে।

খ সর্বনিম্নকরণ, $z = 5x + y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \le 5$; $x + 2y \ge 8$; $x \ge 0, y \ge 0$

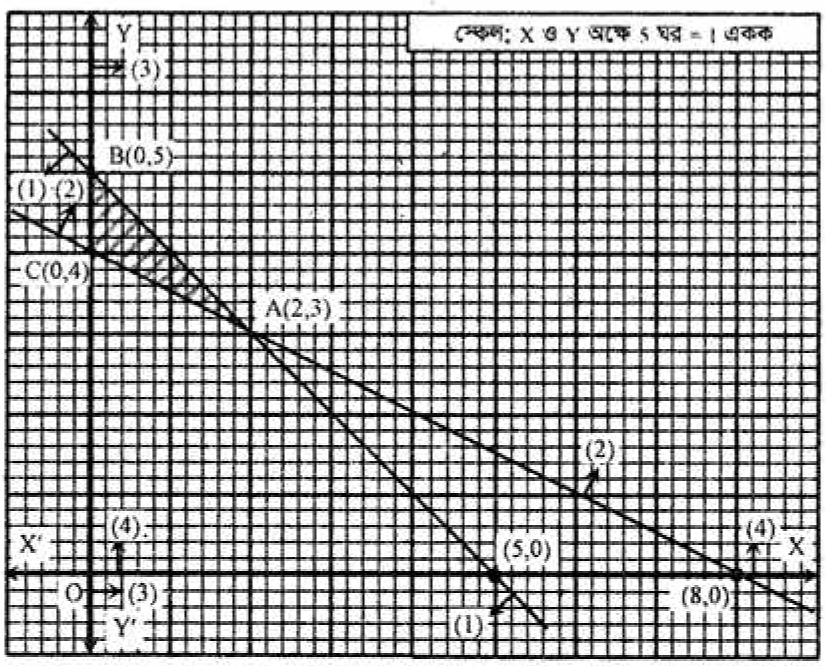
প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব, আমরা পাই, $x + y = 5 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \quad \ldots\ldots (1)$

$x + 2y = 8 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \quad \ldots\ldots (2)$

$x = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

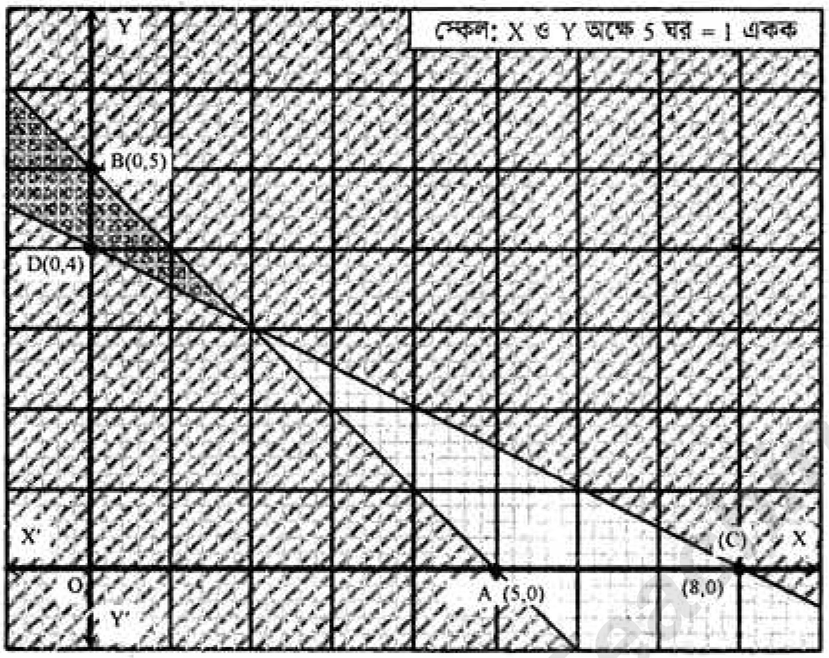
$y = 0 \quad \ldots\ldots (4)$



লেখচিত্র হতে দেখা যায় (1) এর সকল বিন্দু এবং (1) এর যে পার্শ্বে মূল বিন্দু সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \le 5$ সত্য। আবার (2) এর সকল বিন্দু এবং (2) এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + 2y \ge 8$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC।
∴ A হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদবিন্দু।
B হচ্ছে (1) ও (3) এর ছেদবিন্দু।
এবং C হচ্ছে (2) ও (3) এর ছেদবিন্দু।
∴ A(2, 3), B(0, 5) ও C(0, 4)
এখন A(2, 3) বিন্দুতে $z = 5 \times 2 + 3 = 13$
B(0, 5) " $z = 5 \times 0 + 5 = 5$
C(0, 4) " $z = 5 \times 0 + 4 = 4$
স্পষ্টত C(0, 4) এর জন্য Z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।
∴ z এর সর্বনিম্ন মান = 4 **(Ans.)**

গ প্রদত্ত অসমতাদ্বয়, $x + y \leq 5$ ……… (i)
$x + 2y \geq 8$ ……… (ii)
প্রদত্ত অসমতাদ্বয়কে সমতা আকারে লিখে লেখচিত্র অঙ্কন করি।
(i) হতে পাই, $x + y = 5$
∴ $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$
(ii) হতে পাই, $x + 2y = 8$
বা, $\frac{x}{8} + \frac{2y}{8} = 1$
∴ $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$



উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য আনুভূমিক ও উলম্ব রেখা বরাবর প্রতি 5 বর্গ ঘর সমান 1 একক ধরে A(5, 0) ও B(0, 5) বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে $x + y = 5$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।
আবার, C(8, 0) ও D(0, 4) বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে, $x + 2y = 8$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।
(0, 0) বিন্দুর জন্য $0 + 0 \leq 5$ যা সত্য।
∴ $x + y \leq 5$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $x + y = 5$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে, রেখাটিসহ সেই পাশের অঞ্চল।
আবার, (0, 0) বিন্দুর জন্য $0 + 2 \times 0 \geq 8$ যা সত্য নয়।
∴ $x + 2y \geq 8$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $x + 2y = 8$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে, রেখাটিসহ তার বিপরীত পাশের অঞ্চল।
অতএব, লেখচিত্রে অসমতা দুইটি দ্বারা সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই উপরোক্ত অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

প্রশ্ন ▶ ৭ $z = 6x + 12y$
শর্ত : $x + y \leq 7$
$2x + 5y \leq 20$
$x \geq 0, y \geq 0$
[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]
ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যাখ্যা কর। ২
খ. z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪
গ. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সুবিধাগুলো কী? ৪

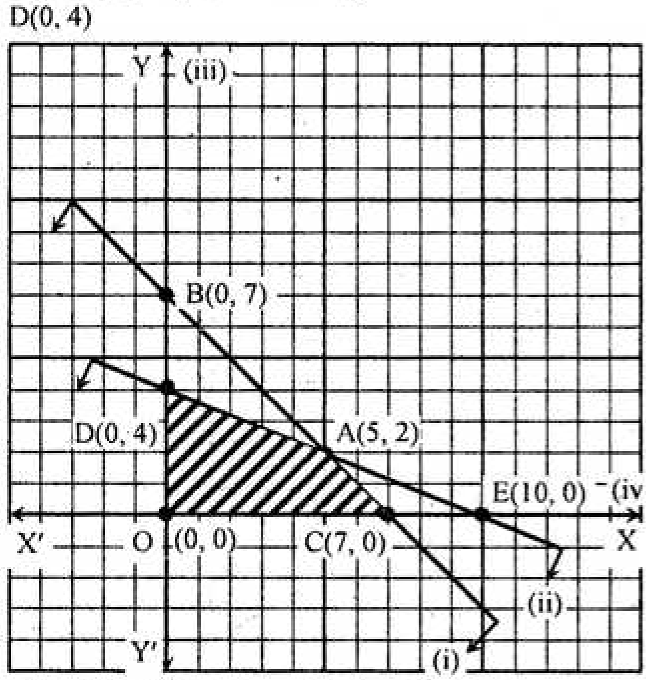
৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম:** যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম হচ্ছে কোনো শর্তাধীনে ও সীমাবদ্ধতায় একাধিক স্বাধীন চলকের রৈখিক অসমতা ও অভীষ্ট ফাংশন গঠনের মাধ্যমে সবচেয়ে সুবিধাজনক মানের জন্য স্বাধীন চলকগুলির নির্দিষ্ট মান নির্ণয়ের একটি বিশেষ বীজগণিতীয় পদ্ধতি।
যেমন, A ও B দুই প্রকারের খাদ্যে প্রতি কিলোগ্রামে প্রোটিন ও শ্বেতসার এবং এর মূল্য নিম্নরূপ:

খাদ্য	প্রোটিন	শ্বেতসার	কিলোগ্রাম প্রতি মূল্য
A	2	5	40 টাকা
B	3	3	50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	8	11	

সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক খাদ্যের প্রয়োজন মেটাতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন করলে প্রোগ্রামটি দাঁড়ায়, Minimize $z = 40x + 50y$
শর্তসমূহ $2x + 3y \geq 8$, $5x + 3y \geq 11$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
এখানে, x, y চলক, রৈখিক অসমতা বা শর্ত $2x + 3y \geq 8$, $5x + 3y \geq 11$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ এবং অভিষ্ট ফাংশন
$z = 40x + 50y$

খ সর্বোচ্চকরণ, $z = 6x + 12y$
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $x + y \leq 7$; $2x + 5y \leq 20$;
$x \geq 0$; $y \geq 0$;
প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।
অতএব, আমরা পাই, $x + y = 7$
বা, $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ……… (i)
$2x + 5y = 20$
বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (ii)
$x = 0$ ……… (iii)
$y = 0$ ……… (iv)
লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) ও (ii) নং এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাদ্বয় সত্য। এখানে, O হচ্ছে মূলবিন্দু।
∴ O(0, 0)
A হচ্ছে (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু
∴ A(5, 2)
C হচ্ছে (i) ও (iv) এর ছেদবিন্দু
∴ C(7, 0)
D হচ্ছে (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু
∴ D(0, 4)



এখন, O(0, 0) বিন্দুতে, $z = 6 \times 0 + 12 \times 0 = 0$
A(5, 2) বিন্দুতে, $z = 6 \times 5 + 12 \times 2 = 54$
C(7, 0) বিন্দুতে, $z = 6 \times 7 + 12 \times 0 = 42$

এবং D(0, 4) বিন্দুতে, $z = 6 \times 0 + 12 \times 4 = 48$
স্পষ্টত A(5, 2) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।
$\therefore$ z এর সর্বোচ্চ মান = 54 **(Ans.)**

গ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মূল সুবিধা হলো সর্বনিম্ন বিনিয়োগে সর্বোচ্চ সুবিধাজনক অবস্থায় রূপদান। বিষয়টি নিচে বর্ণনা করা হলো।

i. সীমিত অর্থ, কাঁচামাল, জনবল এবং যন্ত্র দক্ষতার সাথে সঠিক ব্যবহার ও কাঙ্ক্ষিত লক্ষ্য অর্জন।
ii. তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ভবিষ্যত উৎপাদনকে টেকসই ও অধিকতর লাভজনক করার জন্য দক্ষতা ও দূরদৃষ্টি বৃদ্ধিকরণ।
iii. উৎপাদন ও বিপণনে সকল প্রকার দৃশ্যমান প্রতিবন্ধকতার সঙ্গে পরিচয় এবং তা অতিক্রমের পন্থা অবলম্বনের জ্ঞান অর্জন।
iv. অনাকাঙ্ক্ষিত প্রতিবন্ধকতা চিহ্নিত ও দূরীকরণের দ্বারা উৎপাদন বা বিপণন ব্যয় কমানো এবং মুনাফা বৃদ্ধি।
v. প্রাপ্ত তথ্য, উপাত্ত, সম্পদ, মূলধন ও সুবিধা-অসুবিধাকে বিবেচনা করে ভবিষ্যত পরিকল্পনাকে আরও টেকসই ও বেগবান করা।

প্রশ্ন ▶ ৮ $z = 2x + 3y$; শর্ত: $x + 2y \leq 10$, $t \leq 6$, $x \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, যেখানে, $t = x + y$. *[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]*

ক. পরমমান চিহ্ন ব্যতিত অসমতাটিকে প্রকাশ কর : $|x - 2| \leq \frac{1}{3}$ ২

খ. যদি $y = -1$ এবং $|t| < \frac{1}{13}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $|x^2 - 1| < \frac{27}{169}$. ৪

গ. z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $|x - 2| \leq \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} \leq x - 2 \leq \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + 2 \leq x - 2 + 2 \leq \frac{1}{3} + 2$ [সকল পক্ষে 2 যোগ করে]

$\therefore \frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $t = x + y$
$y = -1$ হলে, $t = x - 1$
এখন, $|t| < \frac{1}{13}$

বা, $|x - 1| < \frac{1}{13}$

বা, $\frac{-1}{13} < x - 1 < \frac{1}{13}$

বা, $-\frac{1}{13} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{13} + 1$ [সকল পক্ষে 1 যোগ করে পাই]

বা, $\frac{12}{13} < x < \frac{14}{13}$

বা, $\frac{144}{169} < x^2 < \frac{196}{169}$

বা, $\frac{144}{169} - 1 < x^2 - 1 < \frac{196}{169} - 1$ [সকল পক্ষে 1 বিয়োগ করে পাই]

বা, $-\frac{25}{169} < x^2 - 1 < \frac{27}{169}$

বা, $-\frac{27}{169} < x^2 - 1 < \frac{27}{169}$ $\left[\because -\frac{25}{169} > -\frac{27}{169}\right]$

$\therefore |x^2 - 1| < \frac{27}{169}$ **(প্রমাণিত)**

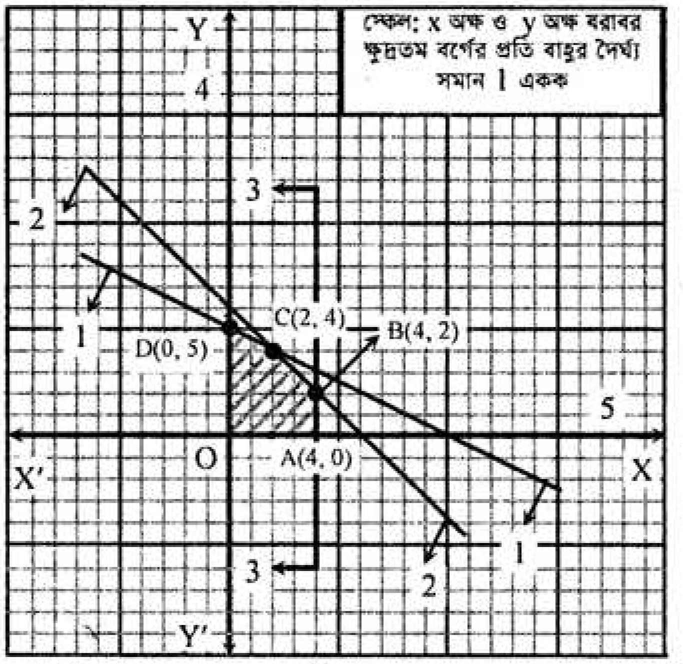
গ দেওয়া আছে, $t = x + y$
আবার, দেওয়া আছে, অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x + 3y$
এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + 2y \leq 10$, $x + y \leq 6$, $x \leq 4$, $x, y \geq 0$
প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে প্রাপ্ত সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।
অতএব আমরা পাই, $x + 2y = 10$

$\Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ .... (1)

$x + y = 6$

$\Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ .... (2)

$x = 4$ .... (3)
$x = 0$ .... (4)
$y = 0$ .... (5)



লেখচিত্রে দেখা যায় যে, সমীকরণ (1), (2) ও (3) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য। যেখানে
O(0, 0) হচ্ছে মূল বিন্দু।
চিত্রানুসারে, A, B, C ও D যথাক্রমে (3) ও (5); (2) ও (3); (1) ও (2) এবং (1) ও (4) এর ছেদ বিন্দু।
তাহলে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে OABCDO যা চিত্রে ছায়া ঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে-
O(0, 0), A(4, 0), B(4, 2), C(2, 4) এবং D(0, 5)
এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$
A(4, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 3 \times 0 = 8$
B(4, 2) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$
C(2, 4) বিন্দুতে $z = 2 \times 2 + 3 \times 4 = 16$
D(0, 5) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 3 \times 5 = 15$
স্পষ্টত: C(2, 4) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।
অতএব সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি C(2, 4) এবং
সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 16$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ দৃশ্যকল্প-১: $P = |a - b|$; যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$.
দৃশ্যকল্প-২: একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য সিমফোনি ও স্যামসাং ব্রান্ডের মোট 100টি মোবাইল সেট কিনতে পারেন। সিমফোনি ও স্যামসাং এর প্রত্যেকটির ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 40 ডলার ও 120 ডলার। প্রতিটি সিমফোনি ও স্যামসাং সেটে লাভ যথাক্রমে 16 ডলার ও 32 ডলার। *[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]*

ক. $\frac{-11}{3} \leq x \leq \frac{19}{3}$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $P \leq |a| + |b|$ ৪

গ. সর্বোচ্চ 10400 ডলার বিনিয়োগ করে তিনি সর্বোচ্চ কত লাভ করতে পারেন? ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{-11}{3} \leq x \leq \frac{19}{3}$ .... (i)

(i) নং এর প্রত্যেক পক্ষে $\left\{-\left(\frac{-\frac{11}{3} + \frac{19}{3}}{2}\right)\right\}$ বা $\left(-\frac{4}{3}\right)$ দ্বারা যোগ করে পাই,

$\frac{-11}{3} - \frac{4}{3} \leq x - \frac{4}{3} \leq \frac{19}{3} - \frac{4}{3}$

বা, $\frac{-11 - 4}{3} \leq \frac{3x - 4}{3} \leq \frac{19 - 4}{3}$

বা, $\frac{-15}{3} \le \frac{3x-4}{3} \le \frac{15}{3}$

বা, $-15 \le 3x - 4 \le 15$ [প্রত্যেক পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore |3x - 4| \le 15$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$P = |a - b|$,

$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2$

$[\because |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a||b| = |ab|]$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \ge a^2 + 2ab + b^2$ $[\because |ab| \ge ab]$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \ge (a + b)^2$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \ge (|a + b|)^2$

$\Rightarrow |a + b|^2 \le (|a| + |b|)^2$

$\therefore |a + b| \le |a| + |b|$

$|a + b| \le |a| + |b|$ সম্পর্কে b এর পরিবর্তে $-b$ বসালে পাই,

$|a + (-b)| \le |a| + |(-b)|$

$\therefore |a - b| \le |a| + |b|$ $[\because |(-b)| = |b|]$

$\therefore P \le |a| + |b|$. **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, সিমফোনি x টি এবং স্যামসাং y টি কিনতে হবে।

অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Max}(16x + 32y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \le 100$;

$40x + 120y \le 10400$;

$x \ge 0, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$x + y = 100 \Rightarrow \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = 1$ ……… (1)

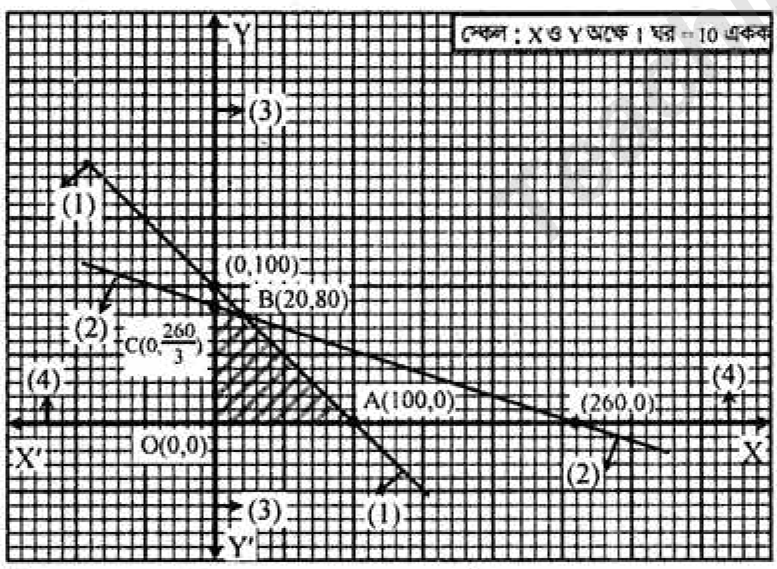
$40x + 120y = 10400$

$\Rightarrow x + 3y = 260$

$\therefore \frac{x}{260} + \frac{y}{\frac{260}{3}} = 1$ ……… (2)

$x = 0$ ……… (3)

$y = 0$ ……… (4)



লেখচিত্র হতে দেখা যায় (1) এবং (2) এর সকলবিন্দু এবং (1) ও (2) এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \le 100$ এবং $40x + 120y \le 10400$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই, সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OABC।

যেখানে O হচ্ছে মূলবিন্দু, A (100, 0)।

B হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদ বিন্দু। $\therefore$ B(20, 80)

এখন O(0, 0)	বিন্দুতে	$z = 0$
A (100, 0)	"	$z = 1600$
B (20, 80)	"	$z = (16 \times 20) + (32 \times 80) = 2880$
$C\left(0, \frac{260}{3}\right)$	"	$z = 0 + 2773.33 = 2773.33$

স্পষ্টত B (20, 80) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান হয়।

$\therefore$ সিমফোনি 20 টি, স্যামসাং 80 টি এবং লাভ 2880 ডলার। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১০ দৃশ্যকল্প-১: $|x - 1| < \frac{1}{3}$

দৃশ্যকল্প-২: $F = 2y - x$, যেখানে, $3y - x \le 10$

$x + y \le 6$

$x - y \le 2$

$x \ge 0, y \ge 0$

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

ক. যদি $P = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{-1})$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $P^6 + P^4 + P^2 + 1 = 0$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $|x^2 - 1| < \frac{7}{9}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে লেখচিত্রের সাহায্যে F এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$

$\therefore P^2 = \frac{1 - 1 + 2i}{2} = \frac{2i}{2} = i$ $[\because i = \sqrt{-1}]$

বামপক্ষ $= P^6 + P^4 + P^2 + 1 = (P^2)^3 + (P^2)^2 + P^2 + 1$

$= (i)^3 + (i)^2 + i + 1 = i^3 + i^2 + i + 1$

$= -i - 1 + i + 1$ $[\because i^2 = -1, i^3 = -i]$

$= 0$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $|x - 1| < \frac{1}{3}$ ……… (i)

$\therefore$ $|x + 1| = |x - 1 + 2| \le |x - 1| + |2| < \frac{1}{3} + 2$ $[\because |a + b| \le |a| + |b|]$

$\Rightarrow$ $|x + 1| < \frac{7}{3}$ ……… (ii)

(i) ও (ii) গুণ করে পাই, $|x - 1||x + 1| < \frac{1}{3} \times \frac{7}{3}$

$\Rightarrow$ $|(x - 1)(x + 1)| < \frac{7}{9}$ $[\because |ab| = |a||b|]$

$\therefore$ $|x^2 - 1| < \frac{7}{9}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $F = -x + 2y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $-x + 3y \le 10$

$x + y \le 6$

$x - y \le 2$

$x \ge 0, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

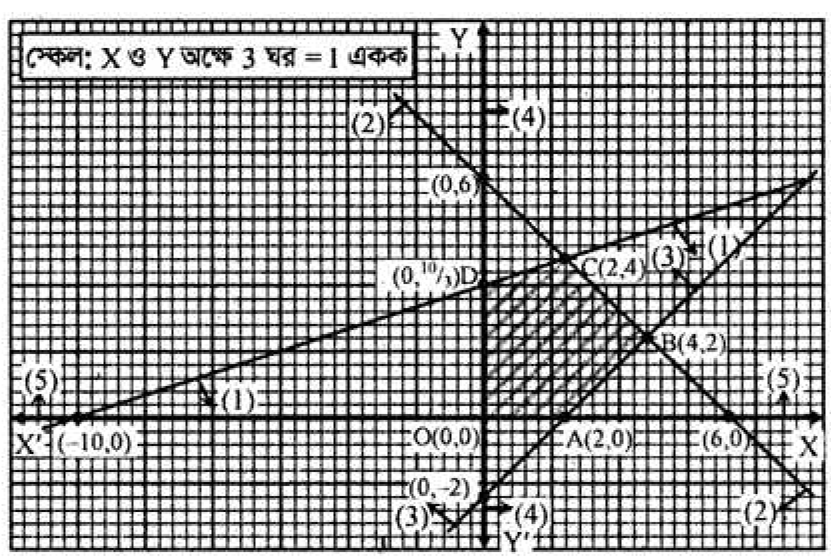
$-x + 3y = 10 \Rightarrow \frac{x}{-10} + \frac{y}{\frac{10}{3}} = 1$ ……… (1)

$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ ……… (2)

$x - y = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ ……… (3)

$x = 0$ ……… (4)

$y = 0$ ……… (5)



লেখচিত্রে দেখা যায় (1), (2), (3) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য এদের আনুষঙ্গিক অসমতাগুলো সত্য। লেখচিত্র হতে পাই, সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OABCD। যেখানে O হচ্ছে মূল বিন্দু। ∴ O (0, 0), A(2, 0)

B হচ্ছে (2) এবং (3) এর ছেদবিন্দু। ∴ B(4, 2)

C " (1) " (2) " "

∴ C(2, 4) এবং $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$

এখন O(0, 0) বিন্দুতে z = 0

A(2, 0) " $z = -2 + 0 = -2$

B(4, 2) " $z = -4 + (2 \times 2) = 0$

C(2, 4) " $z = -2 + (2 \times 4) = 6$

এবং $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$ " $z = -0 + \left(2 \times \frac{10}{3}\right) = 6.67$

স্পষ্টত $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$ বিন্দুতে F এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

∴ $F_{max} = 6.67$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ দৃশ্যকল্প-১: A এবং B দুই ধরনের খাদ্যে প্রতি কিলোতে প্রোটিন ও ফ্যাট নিম্নরূপ:

খাদ্য	প্রোটিন	ফ্যাট	কিলো প্রতি মূল্য
A	1	3	20 টাকা
B	3	2	30 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	9	12	

দৃশ্যকল্প-২: $f(a, b) = a + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ *[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]*

ক. দৈনিক A এবং B খাদ্যের যথাক্রমে x কেজি এবং y কেজির জন্য সমস্যাটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যায় প্রকাশ কর। ২

খ. সমস্যাটি লেখচিত্র এর মাধ্যমে সমাধান করে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক খাদ্যের প্রয়োজন কিভাবে মিটানো যাবে তা নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $|f(a, b)| \le |a| + |b|$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, দৈনিক ন্যূনতম খাদ্য চাহিদা মেটানোর জন্য x কেজি পরিমাণ A খাদ্য এবং y কেজি পরিমাণ B খাদ্য প্রয়োজন।

সুতরাং $x, y \ge 0$

A ও B হতে দৈনিক মোট প্রোটিন পাওয়া যায় $x + 3y$

আবার, A ও B হতে দৈনিক মোট ফ্যাট পাওয়া যায়

$3x + 2y$

শর্তানুসারে, $x + 3y \ge 9$ এবং $3x + 2y \ge 12$

যেহেতু লক্ষ্য বা উদ্দেশ্য হলো সবচেয়ে কম খরচে ন্যূনতম প্রয়োজন মিটানো কাজেই এই ফাংশনটি গঠন হবে খরচ কেন্দ্রিক।

মনে করি, অভিষ্ট ফাংশন z

এখানে মোট খরচ : (1) x কেজি A এর মূল্য 20x টাকা

(2) y কেজি B এর মূল্য 30y টাকা।

∴ $z_{min} = 20x + 30y$

খ 'ক' হতে পাই, $z_{min} = 20x + 30y$ টাকা

প্রাপ্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

∴ আমরা পাই,

$x + 3y = 9$

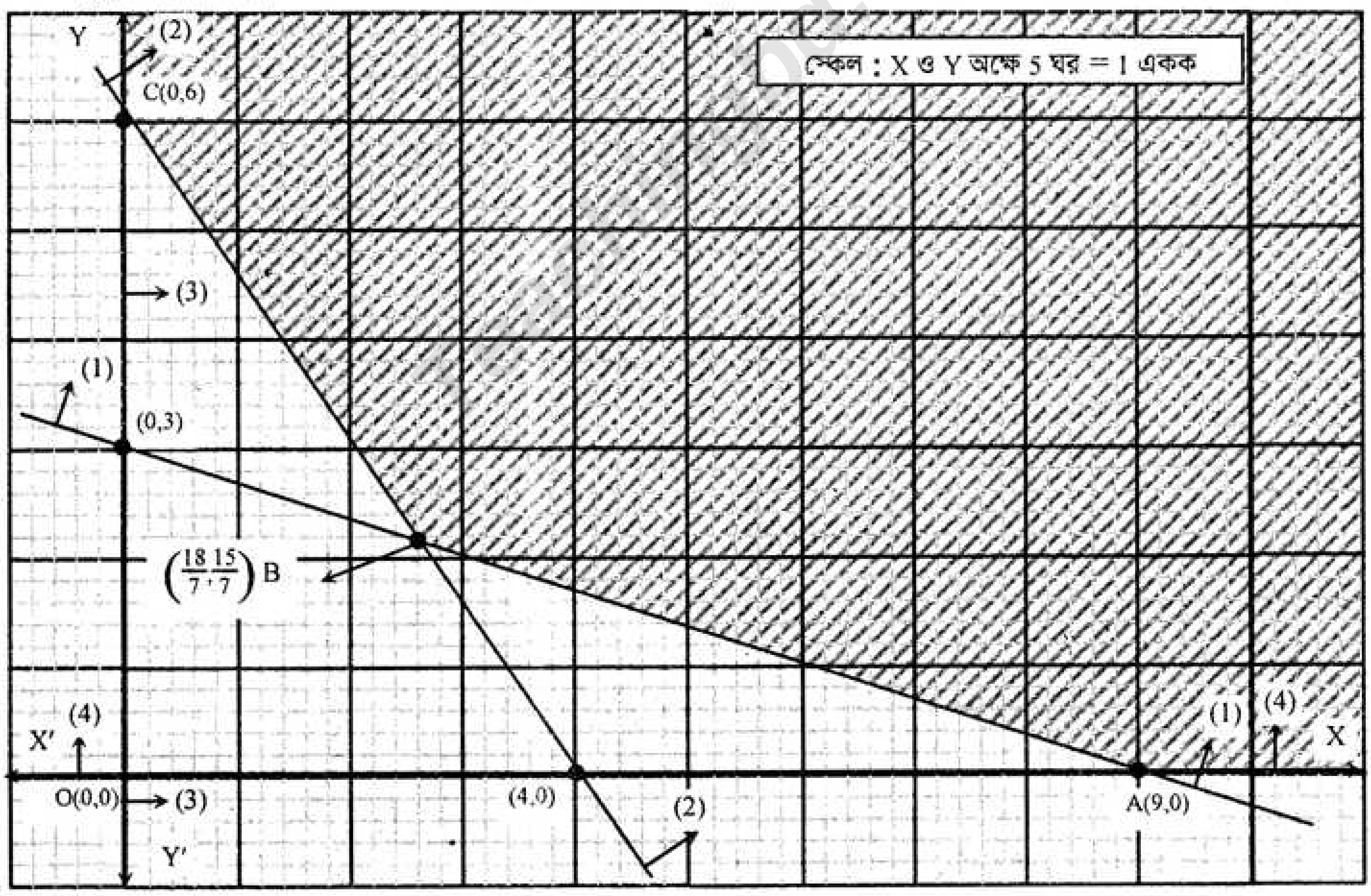
বা, $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$ ... ... (i)

$3x + 2y = 12$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ ... ... (ii)

$x = 0$ ... ... (iii)

$y = 0$ ... ... (iv)



লেখচিত্রে দেখা যায় (i), (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + 3y \ge 9$ এবং $3x + 2y \ge 12$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC হতে শুরু করে ১ম চতুর্ভাগের ডান দিকের সমস্ত এলাকা

সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো A, B, C।

যেখানে A (9, 0), B হচ্ছে (i), (ii) এর ছেদবিন্দু।

∴ $B\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ এবং C (0, 6)

এখন A(9, 0) বিন্দুতে $z = (20 \times 9) + (30 \times 0) = 180$

$B\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ বিন্দুতে $z = (20 \times \frac{18}{7}) + (30 \times \frac{15}{7}) = 115.714$

C (0, 6) বিন্দুতে $z = (20 \times 0) + (30 \times 6) = 180$

∴ স্পষ্টত $B\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক খাদ্যের চাহিদা মিটানোর জন্য $\frac{18}{7}$ কেজি পরিমাণ খাদ্য A এবং $\frac{15}{7}$ কেজি পরিমাণ খাদ্য B প্রয়োজন। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(a, b) = a + b; a, b \in \mathbb{R}$

$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2$

$[\because |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a||b| = |ab|]$

বা, $(|a| + |b|)^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \; [\because |ab| \geq ab]$

বা, $(|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2$

বা, $(|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$

বা, $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$\therefore$ $|a + b| \leq |a| + |b|$

সুতরাং $|f(a, b)| \leq |a| + |b|$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ১২ (i) $h(x) = 3x + 2$

(ii) $x + y - 1 \leq 0,\; x - 2y - 2 \leq 0,\; 2y \geq 1,\; x \geq 0,\; y \geq 0$

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. $-2 < x < 4$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{1}{|h(x)|} \geq \frac{1}{7}$ সমাধান করে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. (ii) থেকে $z = 3x - 2y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-2 < x < 4$

বা, $-2 - 1 < x - 1 < 4 - 1$ $\left[\text{প্রত্যেক পক্ষ থেকে } \frac{-2+4}{2} \text{ বা 1 বিয়োগ করে}\right]$

বা, $-3 < x - 1 < 3$

$\therefore$ $|x - 1| < 3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $h(x) = 3x + 2$

এখন, $\frac{1}{|h(x)|} \geq \frac{1}{7}$

বা, $\frac{1}{|3x + 2|} \geq \frac{1}{7}$ [যখন $3x + 2 \neq 0$]

বা, $|3x + 2| \leq 7$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-7 \leq 3x + 2 \leq 7$

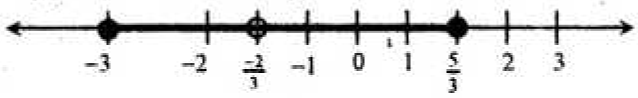
বা, $-7 - 2 \leq 3x + 2 - 2 \leq 7 - 2$ [প্রত্যেক পক্ষে -2 যোগ করে]

বা, $-9 \leq 3x \leq 5$

বা, $-\frac{9}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$

বা, $-3 \leq x \leq \frac{5}{3}$ $\left[\text{যখন } 3x + 2 \neq 0 \text{ বা, } x \neq \frac{-2}{3}\right]$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট :



গ সর্বোচ্চকরণ, $z = 3x - 2y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $x + y - 1 \leq 0;\; x - 2y - 2 \leq 0;\; 2y \geq 1;\; x \geq 0;\; y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

আমরা পাই, $x + y - 1 = 0$

বা, $x + y = 1$

বা, $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$ ……… (i)

এবং $x - 2y - 2 = 0$

বা, $x - 2y = 2$

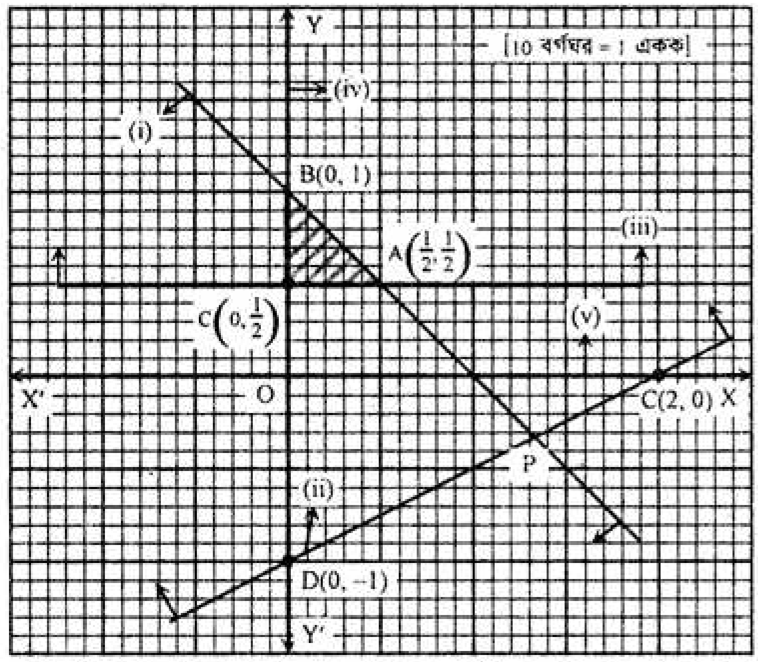
বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{\frac{2}{-2}} = 1$

বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$ ……… (ii)

$y = \frac{1}{2}$ ……… (iii)

আবার, $x = 0$ ……… (iv)

$y = 0$ ……… (v)



লেখচিত্র হতে দেখা যায় (i) এর সকল বিন্দু এবং (i) এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + y - 1 \leq 0$ সত্য। আবার (ii) এর সকল বিন্দু এবং (ii) এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x - 2y - 2 \leq 0$ সত্য। (iii), (iv) ও (v) এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই, সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC

B হচ্ছে (i) ও (iv) এর ছেদবিন্দু।

A হচ্ছে (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু।

C হচ্ছে (iii) ও (iv) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $B(0, 1)$, $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$

এখন, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুতে, $z = 3 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$B(0, 1)$ বিন্দুতে, $z = 3 \times 0 - 2 \times 1 = -2$

$C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুতে, $z = 3 \times 0 - 2 \times \frac{1}{2} = -1$

$\therefore$ স্পষ্টত $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ এর জন্য z এর মান সর্বোচ্চ।

$\therefore$ z এর সর্বোচ্চ মান $\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ $P = ax + by$ ……… (i)

$Q = |ax| + |by|$ ……… (ii)

[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]

ক. $3x + 4y \leq 12$, $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$ শর্তগুলোর দ্বারা চিহ্নিত সমাধান এলাকা নির্ণয় করে কৌণিক বিন্দুগুলো নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $|P| \leq Q$ যেখানে a, b, x, y বাস্তব সংখ্যা। ৪

গ. $a = -5$, $b = y = 1$ এবং x চলক ধরে $\frac{1}{|P|} \leq 3$, $\left(\text{যেখানে } x \neq \frac{1}{5}\right)$ কে সমাধান কর ও সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও। ৪

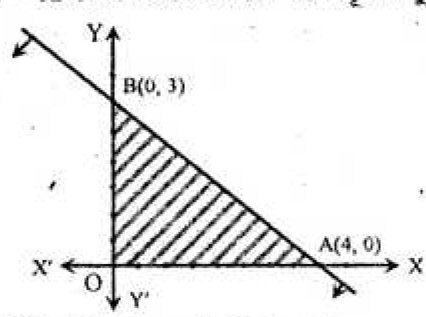
১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3x + 4y \leq 12$

ধরি, $3x + 4y = 12$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

রেখাটি $A(4, 0)$ এবং $B(0, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

এখন, $3x + 4y \leq 12$ এর জন্য সমাধান এলাকা হবে $3x + 4y = 12$ রেখাসহ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে সেই পাশে।



আবার, যেহেতু $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$

$\therefore$ কৌণিক বিন্দুগুলো হবে $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$ **(Ans.)**

খ $(|ax| + |by|)^2 = |ax|^2 + 2|ax||by| + |by|^2$

$= (ax)^2 + 2|axby| + (by)^2$

$[\because |ax|^2 = (ax)^2, |by|^2 = (by)^2, |ax||by| = |axby|]$

বা, $(|ax| + |by|)^2 \geq (ax)^2 + 2axby + (by)^2 \quad [\because |axby| \geq axby]$

বা, $(|ax| + |by|)^2 \geq (ax + by)^2$

বা, $(|ax| + |by|)^2 \geq (|ax + by|)^2$

বা, $|ax + by|^2 \leq (|ax| + |by|)^2$

$\therefore$ $|ax + by| \leq |ax| + |by|$

বা, $|P| \leq Q$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$p = ax + by$

$a = -5, b = y = 1$ বসিয়ে পাই,

$P = -5x + 1$

প্রদত্ত অসমতা, $\frac{1}{|P|} \leq 3$

বা, $\frac{1}{|1 - 5x|} \leq 3$ $\left[\text{যেখানে } x \neq \frac{1}{5}\right]$

বা, $|1 - 5x| \geq \frac{1}{3}$

বা, $-|1 - 5x| \leq -\frac{1}{3}$

বা, $-\left(\frac{-1}{3}\right) \leq -1 + 5x \leq -\frac{1}{3}$

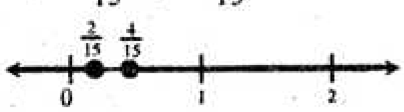
বা, $\frac{1}{3} + 1 \leq -1 + 5x + 1 \leq -\frac{1}{3} + 1$

বা, $\frac{4}{3} \leq 5x \leq \frac{2}{3}$

বা, $\frac{4}{15} \leq x \leq \frac{2}{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x \geq \frac{4}{15}$ বা, $x \leq \frac{2}{15}$

$\therefore$ সংখ্যারেখায় :



প্রশ্ন ▶ ১৪ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x + 3$

দৃশ্যকল্প-২: এক ব্যক্তি 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 খানা গামছা ও 4 খানা তোয়ালে কিনতে চান। প্রতিখানা গামছার দাম 30 টাকা ও প্রতিখানা তোয়ালের দাম 40 টাকা। *[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]*

ক. $a, b \in \mathbb{R}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $|a - b| \geq ||a| - |b||$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে $|f(x) - 4| < \frac{1}{7}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|x^2 - 1| < \frac{15}{49}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে লেখচিত্রের সাহায্যে গামছা ও তোয়ালের সংখ্যা নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

বা, $|a - b| \geq |a| - |b|$ ……… (i)

আবার, $|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$,

$[\because |b - a| = |-(a - b)| = |a - b|]$

বা, $|a - b| \geq |b| - |a|$

বা, $|a - b| \geq -(|a| - |b|)$

বা, $-|a - b| \leq |a| - |b|$ ……… (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$

বা, $||a| - |b|| \leq |a - b|$

$\therefore$ $|a - b| \geq ||a| - |b||$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x + 3$

শর্তমতে, $|f(x) - 4| < \frac{1}{7}$

বা, $|x + 3 - 4| < \frac{1}{7}$

বা, $|x - 1| < \frac{1}{7}$

বা, $-\frac{1}{7} < x - 1 < \frac{1}{7}$

বা, $1 - \frac{1}{7} < x < 1 + \frac{1}{7}$

বা, $\frac{6}{7} < x < \frac{8}{7}$

বা, $\frac{36}{49} < x^2 < \frac{64}{49}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{36}{49} - 1 < x^2 - 1 < \frac{64}{49} - 1$

বা, $\frac{36 - 49}{49} < x^2 - 1 < \frac{64 - 49}{49}$

বা, $\frac{-13}{49} < x^2 - 1 < \frac{15}{49}$

বা, $\frac{-15}{49} < \frac{-13}{49} < x^2 - 1 < \frac{15}{49}$

বা, $\frac{-15}{49} < x^2 - 1 < \frac{15}{49}$

$\therefore$ $|x^2 - 1| < \frac{15}{49}$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, গামছা x খানা এবং তোয়াল y খানা কিনতে হবে।

$\therefore$ অভীষ্ট ফাংশন $z = \max(x + y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x \geq 6$

$y \geq 4$

$30x + 40y \leq 500$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতা গুলোকে সমতা ধরে সমীকরণ গুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

$\therefore$ আমরা পাই, $x = 6$ ……… (1)

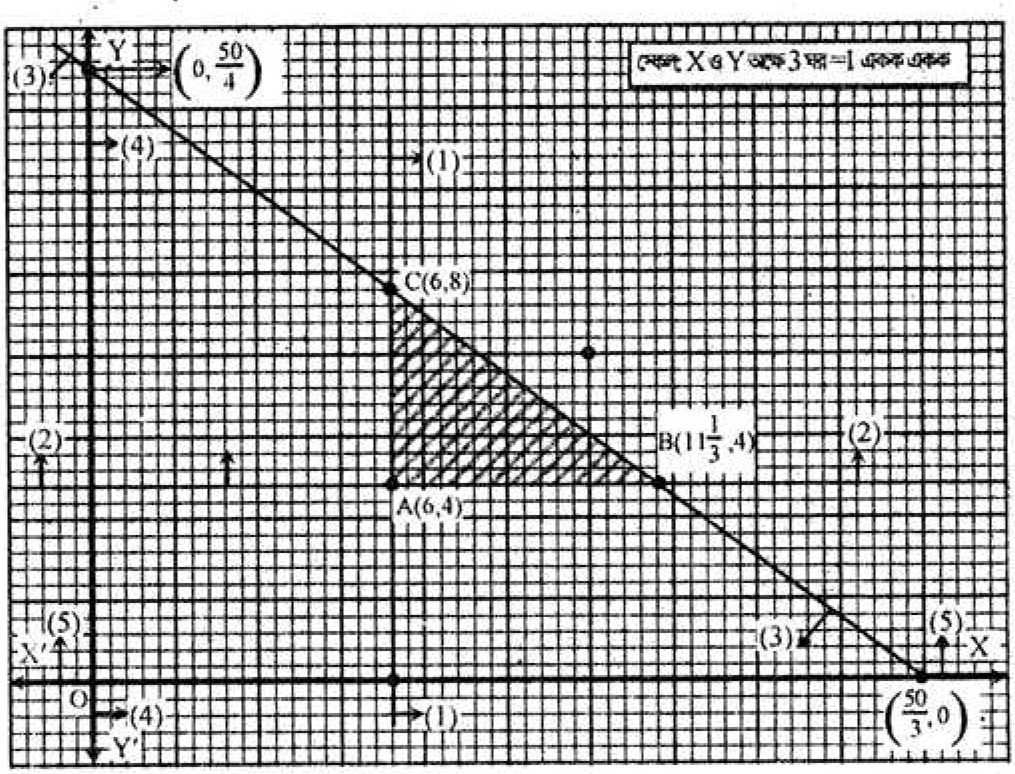
$y = 4$ ……… (2)

$30x + 40y = 500$

বা, $\frac{x}{\frac{50}{3}} + \frac{y}{\frac{50}{4}} = 1$ ……… (3)

$x = 0$ ……… (4)

$y = 0$ ……… (5)



লেখচিত্রে দেখা যায় (1) এবং (2) এর সকল বিন্দু এবং (1) ও (2) এর পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \geq 6$ এবং $y \geq 4$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC.

A হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদবিন্দু। $\therefore A(6, 4)$

B " (2) " (3) " " $\therefore B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$

এবং C " (1) " (3) " " $\therefore C(6, 8)$

এখন A(6, 4) এর জন্য $z = 6 + 4 = 10$

$B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$ " " $z = 11.33 + 4 = 15.33$

C (6, 8) " " $z = 6 + 8 = 14$

দেখা যায়, $B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$ বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ হয় যা একটি ভগ্নাংশ। জিনিসের সংখ্যা ভগ্নাংশ হবে না।

কাজেই এক্ষেত্রে $x = 11$ এবং $y = 4$

$\therefore$ গামছা 11 খানা ও তোয়ালে 4 খানা **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৫ এক ব্যক্তি 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 খানা গামছা এবং 4 খানা তোয়ালে কিনতে চায়। প্রতিখানা গামছার দাম 30 টাকা এবং প্রতি খানা তোয়ালের দাম 40 টাকা। *[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা]*

ক. গামছার সংখ্যা x এবং তোয়ালের সংখ্যা y ধরে সমস্যাটির একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর। ২

খ. গঠিত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম 'ক' তে প্রাপ্ত অসমতাগুলোর লেখ অংকন কর এবং সমাধান এলাকা চিহ্নিত কর। ৪

গ. প্রত্যেক প্রকারের কতটা জিনিস কিনলে সে প্রদত্ত শর্তাধীনে সর্বাপেক্ষা বেশি সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবে লেখচিত্র থেকে তা নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল-১৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪০

প্রশ্ন ▶১৬ (i) $P = 3x - 5; x \in \mathbb{R}$ (ii) $f(x) = 7x + 6y; g(x) = 2x + y$ *[নারায়ণগঞ্জ সরকারি মহিলা কলেজ, নারায়ণগঞ্জ]*

ক. $-2 < x < 6$ কে পরম মান চিহ্ন ব্যবহার করে অসমতাটি প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{1}{|P|} > 2$ হলে $\left(x \neq \frac{5}{3}\right)$ সমাধান সেট নির্ণয় করে রেখায় দেখাও। ৪

গ. $f(x) \leq 84, g(x) \leq 16, x, y \geq 0$ হলে লেখচিত্রের মাধ্যমে $z = 11x + 4y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-2 < x < 6$

বা, $-2 - 2 < x - 2 < 6 - 2$ $\left[\frac{-2+6}{2} = 2 \text{ বিয়োগ করে}\right]$

বা, $-4 < x - 2 < 4$

$\therefore |x - 2| < 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = 3x - 5$

$\therefore \frac{1}{|P|} > 2$

বা, $\frac{1}{|3x - 5|} > 2$

বা, $|3x - 5| < \frac{1}{2}$ [বিপরীত করে]

বা, $-\frac{1}{2} < 3x - 5 < \frac{1}{2}$

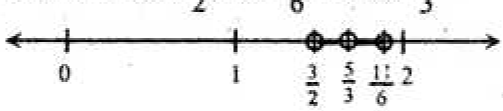
বা, $-\frac{1}{2} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$

বা, $\frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2}$

বা, $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

$\therefore \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$



গ দেওয়া আছে, $f(x) = 7x + 6y$

$g(x) = 2x + y$

প্রশ্নমতে, $f(x) \leq 84$ এবং $g(x) \leq 16$

বা, $7x + 6y \leq 84$ বা, $2x + y \leq 16$

এবং $x, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

$7x + 6y = 84$

বা, $\frac{7x}{84} + \frac{6y}{84} = 1$

$\therefore \frac{x}{12} + \frac{y}{14} = 1$ .... (i)

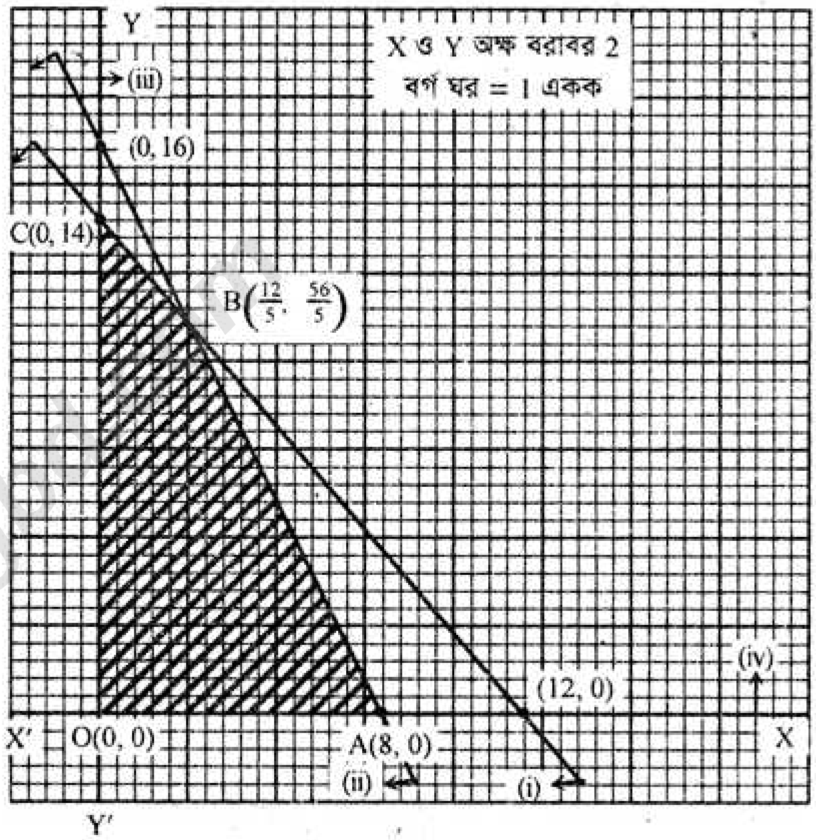
$2x + y = 16$

বা, $\frac{2x}{16} + \frac{y}{16} = 1$

$\therefore \frac{x}{8} + \frac{y}{16} = 1$ .... (ii)

$x = 0$ .... (iii)

$y = 0$ .... (iv)



সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে

$O(0, 0), A(8, 0), B\left(\frac{12}{5}, \frac{56}{5}\right)$ এবং C(0, 14)

প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 11x + 4y$

O(0, 0) বিন্দুতে, $z = 11 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

A(8, 0) বিন্দুতে, $z = 11 \times 8 + 4 \times 0 = 88$

$B\left(\frac{12}{5}, \frac{56}{5}\right)$ বিন্দুতে, $z = 11 \times \frac{12}{5} + 4 \times \frac{56}{5}$

$= \frac{132}{5} + \frac{224}{5}$

$= \frac{132 + 224}{5} = \frac{356}{5}$

C(0, 14) বিন্দুতে, $z = 11 \times 0 + 4 \times 14 = 56$

$\therefore$ A(8, 0) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

অর্থাৎ, $z_{max} = 88$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৭ $f(x) = ax + by + c$ এবং $g(x) = ax + my$ *[রাজেন্দ্রপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, গাজীপুর]*

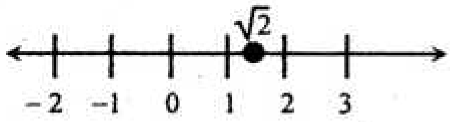
ক. সংখ্যারেখায় $\sqrt{2}$ এর অবস্থান চিহ্নিত কর। ২

খ. $a = 3, b = 0, c = 1$ হলে $\frac{1}{|f(x)|} > 5$ অসমতাটি কখন সংজ্ঞায়িত? অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. $a = 1, b = 1, c = -5, m = 2, f(x) \leq 0, g(x) \geq 8$ এবং $x, y \geq 0$ হলে $z = 2x - y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সংখ্যারেখায় $\sqrt{2}$ এর অবস্থান নিম্নে দেখানো হলো:



খ যখন, a = 3, b = 0, c = 1

$f(x) = 3x + 1$

উল্লেখিত অসমতাটি, $\frac{1}{|3x+1|} > 5$

অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হবে, যখন, $3x + 1 = 0$

বা, $x = -\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

আবার, $\frac{1}{|3x+1|} > 5$

বা, $|3x + 1| < \frac{1}{5}$

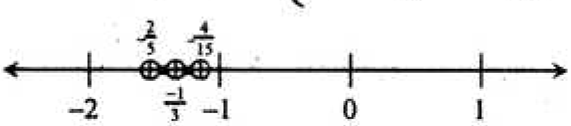
বা, $-\frac{1}{5} < 3x + 1 < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{6}{5} < 3x < -\frac{4}{5}$

বা, $-\frac{2}{5} < x < -\frac{4}{15}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $-\frac{2}{5} < x < -\frac{4}{15}$ এবং $x \neq -\frac{1}{3}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{5} < x < -\frac{4}{15} \text{ এবং } x \neq -\frac{1}{3}\right\}$



গ দেওয়া আছে, a = 1, b = 1, c = – 5, m = 2

তাহলে, $f(x) = x + y - 5$; $g(x) = x + 2y$

শর্তানুযায়ী, $x + y \leq 5$; $x + 2y \geq 8$

সর্বনিম্নকরণ, $z = 2x - y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \leq 5$; $x + 2y \geq 8$; $x \geq 0, y \geq 0$

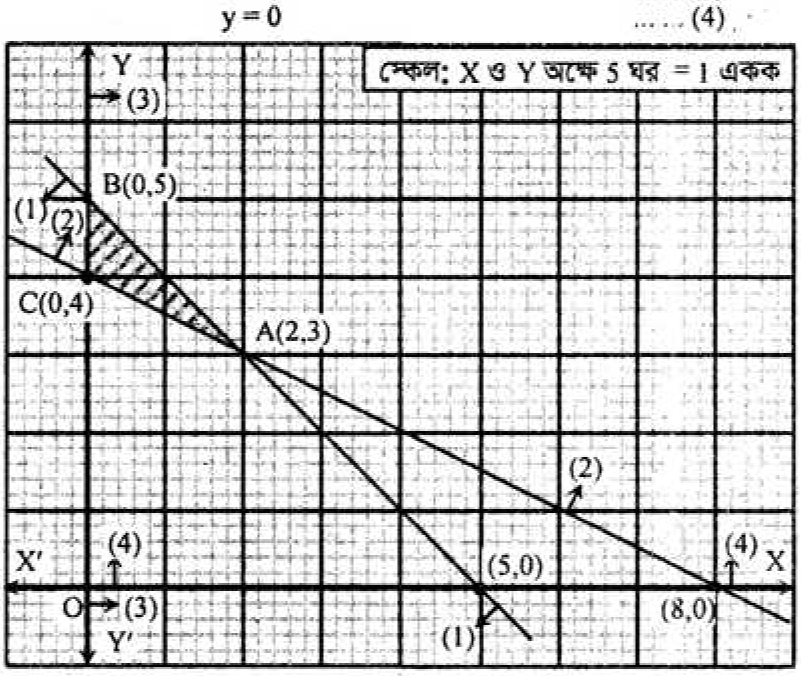
প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই, $x + y = 5 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ ...... (1)

$x + 2y = 8 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$ ...... (2)

$x = 0$ ...... (3)

$y = 0$ ...... (4)



লেখচিত্র হতে দেখা যায় (1) এর সকল বিন্দু এবং (1) এর যে পার্শ্বে মূল বিন্দু সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \leq 5$ সত্য। আবার (2) এর সকল বিন্দু এবং (2) এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + 2y \geq 8$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC।

∴ A হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদবিন্দু।

B হচ্ছে (1) ও (3) এর ছেদবিন্দু।

এবং C হচ্ছে (2) ও (3) এর ছেদবিন্দু।

∴ A(2, 3), B(0, 5) ও C(0, 4)

এখন A(2, 3) বিন্দুতে $z = 2 \times 2 - 3 = 1$

B(0, 5) " $z = 2 \times 0 - 5 = -5$

C(0, 4) " $z = 2 \times 0 - 4 = -4$

স্পষ্টতই B(0, 5) এর জন্য z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

∴ $x = 0, y = 5; z = -5$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৮ $a, b, c \in \mathbb{R}$; $f(x) = |3x + 1|$ এবং একটি অভীষ্ট ফাংশনের

শর্তসমূহ : $x + 2y \leq 8$

$4x + 3y \geq 12$

$x + y \leq 5$

$x, y \geq 0$ *[আবদুল কাদির মোল্লা সিটি কলেজ, নরসিংদী]*

ক. $a + b = a + c$ হলে, দেখাও যে, $b = c$. ২

খ. $\frac{1}{f(x)} \geq 5 \left(x \neq -\frac{1}{3}\right)$ অসমতার সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে $z = 4x - y$ অভীষ্ট ফাংশনের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a + b = a + c$

বা, $(a + b) + (-a) = (a + c) + (-a)$ [যোগের অনন্যতা বিধি]

বা, $a + \{b + (-a)\} = a + \{c + (-a)\}$ [যোগের সংযোগ বিধি]

বা, $\{a + (-a)\} + b = \{a + (-a)\} + c$ [বিনিময় বিধি]

বা, $0 + b = 0 + c$ [যোগের বিপরীতক]

∴ $b = c$ [যোগের অভেদক] **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = |3x + 1|$

∴ $\frac{1}{f(x)} \geq 5$

বা, $|3x + 1| \leq \frac{1}{5}, x \neq -\frac{1}{3}$

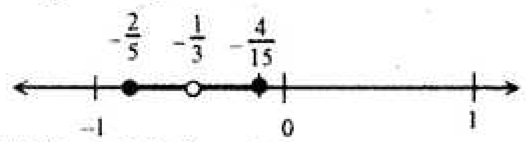
বা, $-\frac{1}{5} \leq 3x + 1 \leq \frac{1}{5}, x \neq -\frac{1}{3}$

বা, $-\frac{6}{5} \leq 3x \leq -\frac{4}{5}$, [(–1) যোগ করে] $x \neq -\frac{1}{3}$

∴ $-\frac{6}{15} \leq x \leq -\frac{4}{15}, x \neq -\frac{1}{3}$

∴ $-\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15}, x \neq -\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

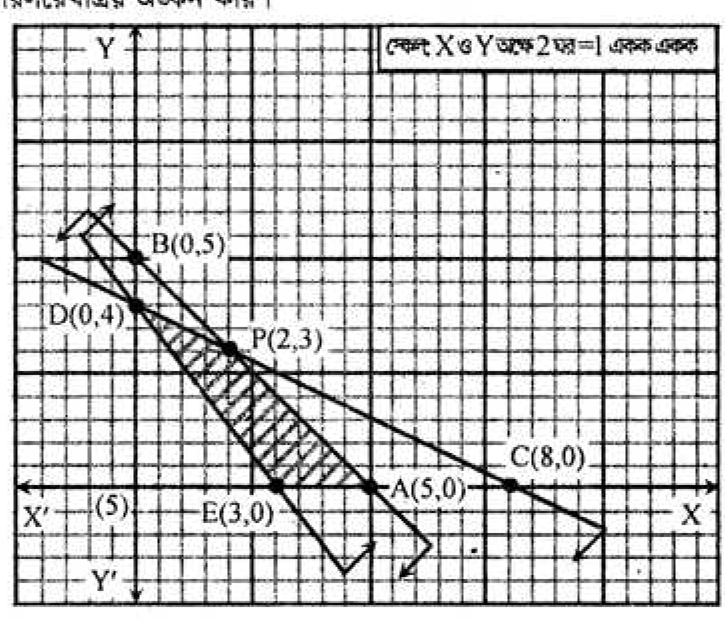
সংখ্যারেখায়:



গ এখানে, অভীষ্ট ফাংশন, $z = \text{Min}(4x - y)$

শর্তসমূহ: $x + y \leq 5$, $x + 2y \leq 8$, $4x + 3y \geq 12$, $x, y \geq 0$

$x + y = 5$ হতে প্রাপ্ত A(5, 0), B(0, 5) এবং $x + 2y = 8$ হতে প্রাপ্ত C(8, 0), D(0, 4) ও $4x + 3y = 12$ হতে প্রাপ্ত E(3, 0), D(0, 4) বিন্দুগুলো গ্রাফ কাগজের দুই বর্গ = 1 একক স্কেলে স্থানাঙ্কায়িত করি ও AB, CD, ED সরলরেখাত্রয় অঙ্কন করি।



AB রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দু পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $x + y \leq 5$,
CD রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দু পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $x + 2y \leq 8$
ED রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $4x + 3y \geq 12$
$\therefore$ প্রদত্ত শর্তগুলো সিদ্ধ করে এরূপ সকল বিন্দু সেট EAPD চতুর্ভুজের বাহু বা অভ্যন্তরে অবস্থান করে।

E (3, 0), A (5, 0), D (0, 4) ও P (2, 3)
এখন, (3, 0) বিন্দুতে $z = 4 \times 3 - 0 = 12$
(5, 0) বিন্দুতে $z = 4 \times 5 - 0 = 20$
(0, 4) বিন্দুতে $z = 4 \times 0 - 4 = -4$
(2, 3) বিন্দুতে $z = 4 \times 2 - 3 = 5$
স্পষ্টত D (0, 4) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।
$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $z = -4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৯ দৃশ্যকল্প-১: সীমাবদ্ধতা: $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, x \leq 4, x, y \geq 0$
অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x + 3y$
দৃশ্যকল্প-২: $2x^2 < x + 3$ একটি অসমতা। *[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]*

ক. i এর ঘনমূল নির্ণয় কর। ২
খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চকরণ কর। ৪
গ. দৃশ্যকল্প-২ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $x = \sqrt[3]{i}$
বা, $x^3 = i$ [ঘন করে]
বা, $x^3 - i = 0$
বা, $x^3 + i^3 = 0$ $[\because i^2 = -1]$
বা, $(x + i)(x^2 - ix + i^2) = 0$
হয় $x + i = 0$
$\therefore$ $x = -i$
অথবা, $x^2 - ix + i^2 = 0$
বা, $x^2 - ix - 1 = 0$
বা, $x = \frac{i \pm \sqrt{i^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{-1 + 4}}{2}$
$\therefore$ $x = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$
$\therefore$ i এর ঘনমূল $= -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল-৮(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৬

গ দেওয়া আছে, $2x^2 < x + 3$
বা, $x^2 - \frac{x}{2} < \frac{3}{2}$
বা, $(x)^2 - 2.x\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{3}{2} + \frac{1}{16}$
বা, $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 < \frac{25}{16}$
বা, $x - \frac{1}{4} < \frac{5}{4}$ অথবা $x - \frac{1}{4} > -\frac{5}{4}$
$\therefore$ নির্ণেয় অসমতা, $\left|x - \frac{1}{4}\right| < \frac{5}{4}$

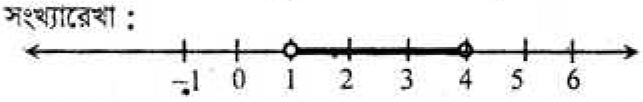
প্রশ্ন ▶২০ দৃশ্যকল্প-১: $-1 < 2x - 3 < 5$
দৃশ্যকল্প-২: $z = 3x + 4y, x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, x \leq 4$ $x, y \geq 0$
[সরকারি সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ, ফরিদপুর]

ক. $||2 - 6| - |1 - 9||$ এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর। ৪
গ. ছক কাগজের সাহায্যে দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত অসমতা গুলির সমাধান অঞ্চল নির্ণয় করে z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $||2 - 6| - |1 - 9|| = ||-4| - |-8||$
$= |4 - 8|$
$= |-4|$
$= 4$ **(Ans.)**

খ $-1 < 2x - 3 < 5$
বা, $-1 + 3 < 2x - 3 + 3 < 5 + 3$; [3 যোগ করে]
বা, $2 < 2x < 8$
$1 < x < 4$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$
সংখ্যারেখা :



গ সৃজনশীল ৮(গ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৬

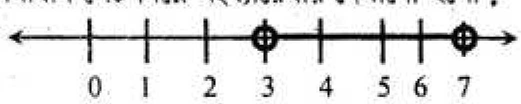
প্রশ্ন ▶২১ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x - 3, x \in \mathbb{R}$.
দৃশ্যকল্প-২: একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য সাপ্তাহিক সর্বোচ্চ 200টি রেডিও ও টেলিভিশন সেট কেনাবেচা করতে পারেন। প্রতিটি রেডিও ও টেলিভিশন সেটের মূল্য যথাক্রমে 80 ও 240 ডলার এবং লাভ যথাক্রমে 40 ও 60 ডলার।
[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]

ক. 1 এর জটিল ঘনমূল নির্ণয় কর। ২
খ. $0 < f(x) < 4$ সমাধান সেট নির্ণয় কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪
গ. ঐ ব্যবসায়ী যতগুলো সেট ক্রয় করেন তার সবগুলো বিক্রি হয়ে যায়। ব্যবসায়ীর মোট বিনিয়োগ 20800 ডলার হলে কতটি রেডিও ও টেলিভিশন সেট ক্রয় করলে তার লাভ সর্বাধিক হবে। ৪

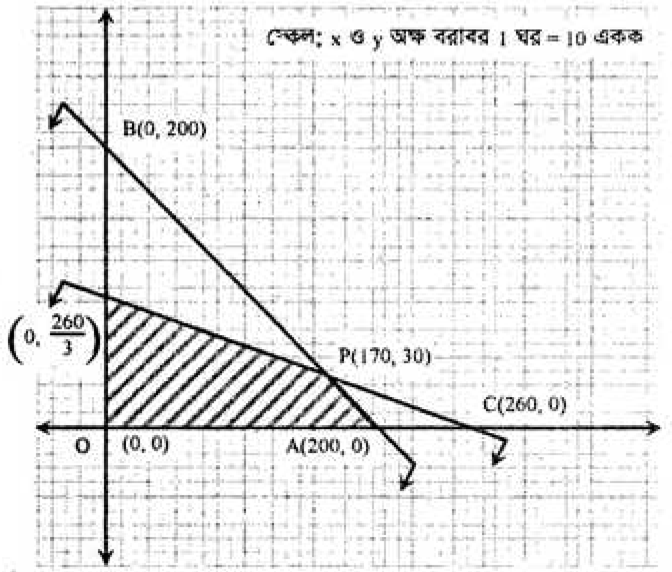
২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$ তাহলে, $x^3 = 1$
বা, $x^3 - 1 = 0$
বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
$\therefore$ $x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$
এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$
আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে,
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$
সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$
এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,
$f(x) = x - 3, x \in \mathbb{R}$
$0 < f(x) < 4$
$0 < x - 3 < 4$
বা, $0 + 3 < x - 3 + 3 < 4 + 3$ [প্রত্যেক পক্ষে 3 যোগ করে]
বা, $3 < x < 7$
সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 7\}$
সমাধান সেট নিম্নে সংখ্যারেখায় দেখানো হলো :



গ মনে করি, রেডিও ক্রয় করেন xটি এবং টেলিভিশন সেট ক্রয় করেন yটি
প্রদত্ত শর্তের আলোকে অসমতাগুলি নিম্নরূপ :
$x + y \leq 200$
$80x + 240y \leq 20800$
$x \geq 0, y \geq 0$
অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অংকন করি।
$x + y = 200 \Rightarrow \frac{x}{200} + \frac{y}{200} = 1$ .... (i)
এবং $80x + 240y = 20800 \Rightarrow x + 3y = 260$
$\therefore$ $\frac{x}{260} + \frac{y}{\frac{260}{3}} = 1$ .... (ii)
$x = 0$ .... (iii)
$y = 0$ .... (iv)



প্রতিটি রেডিও ও টেলিভিশনে লাভ হয় যথাক্রমে 40 ডলার ও 60 ডলার।

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভ $z = 40x + 60y$

সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে O(0, 0), A(200, 0), P(170, 30) এবং D $\left(0, \frac{260}{3}\right)$

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0$

A(200, 0) বিন্দুতে $z = 40 \times 200 + 60 \times 0 = 8000$

P(170, 30) বিন্দুতে $z = 40 \times 170 + 60 \times 30$
$= 6800 + 1800 = 8600$

D$\left(0, \frac{260}{3}\right)$ বিন্দুতে $z = 40 \times 0 + 60 \times \frac{260}{3} = 5200$

স্পষ্টতঃ P(170, 30) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

অর্থাৎ $z_{max} = 8600$

$\therefore$ 170টি রেডিও সেট এবং 30টি টেলিভিশন সেট ক্রয় করলে সর্বোচ্চ লাভ করতে পারবেন।

প্রশ্ন ▶২২ এক লোক সর্বোচ্চ 100 টাকা ব্যয় করে কিছু কলম ও খাতা কিনতে চান। প্রতিটি কলম ও খাতার ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 12 ও 8 টাকা। তিনি অন্তত: 1টি কলম কিন্তু 8টির অধিক খাতা কিনতে পারবেন না।

[রাণীভবানী সরকারী মহিলা কলেজ, নাটোর]

ক. শিক্ষাক্ষেত্রে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার আলোচনা কর। ২

খ. কোন প্রকারের কতগুলি জিনিস কিনলে একত্রে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবে? ৪

গ. দেখাও যে, যত সংখ্যক কলম কিনেছে তার বর্গমূল মূলদ সংখ্যা নয়। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

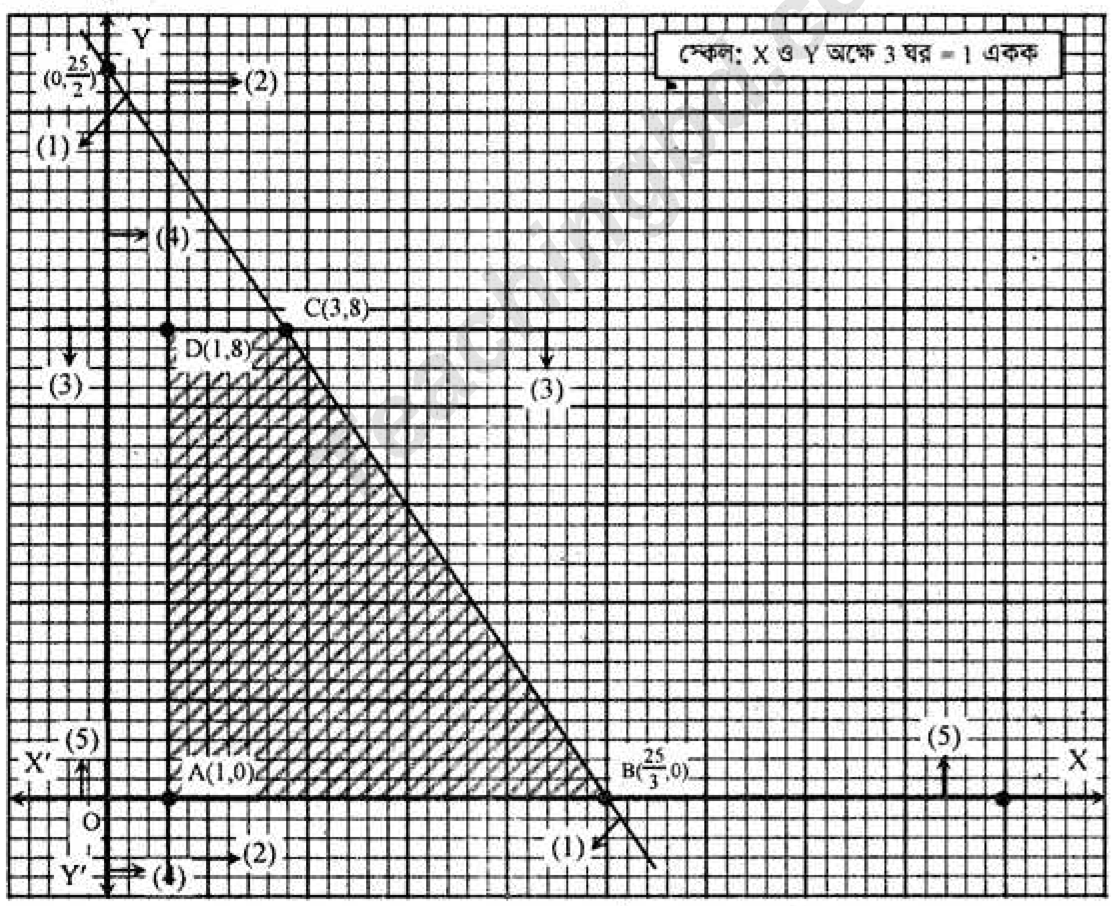
ক কোনো শিক্ষা প্রতিষ্ঠান অথবা প্রশিক্ষণ একাডেমী হতে সর্বনিম্ন ব্যয়ে সর্বাপেক্ষা বেশি (চাহিদা অনুযায়ী) সাফল্য প্রাপ্ত ছাত্র অথবা প্রশিক্ষণার্থী পাবার লক্ষ্যে বিভিন্ন তথ্য ও উপাত্ত (যেমন: একজন শিক্ষক বা প্রশিক্ষক কতজনকে শিক্ষা দিতে পারেন, তাদের মান অনুযায়ী বেতন ও ভাতা, পরীক্ষাগার ও অন্যান্য প্রশিক্ষণ যন্ত্রের সীমাবন্ধতা, শিক্ষার্থী সরবরাহের সীমাবন্ধতা ইত্যাদি) কাজে লাগিয়ে যে গাণিতিক মডেল তৈরি করা হয় সেটা যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

খ মনে করি, কলম x টি এবং খাতা y টি ক্রয় করবেন।

অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Max}\ (x + y)$

সীমাবন্ধতার শর্তসমূহঃ $12x + 8y \le 100;\ x \ge 1;\ y \le 8;\ x \ge 0,\ y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।



$\therefore$ আমরা পাই,

$12x + 8y = 100 \Rightarrow \frac{x}{\frac{25}{3}} + \frac{y}{\frac{25}{2}} = 1$ .... (1)

$x = 1$ .... (2)

$y = 8$ .... (3)

$x = 0$ .... (4)

$y = 0$ .... (5)

লেখচিত্রে দেখা যায় (1) এবং (3) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $12x + 8y \le 100$ এবং $y \le 8$ সত্য। আবার (2) এর সকল বিন্দু এবং (2) এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \ge 1$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD.

A(1, 0), B$\left(\frac{25}{3}, 0\right)$

C হচ্ছে (1) এবং (3) এর ছেদ বিন্দু। $\therefore$ C(3, 8)

D " (2) " (3) " " " $\therefore$ D(1, 8)

এখন A(1, 0) বিন্দুতে $z = 1 + 0 = 1$

B$\left(\frac{25}{3}, 0\right)$ " $z = \frac{25}{3} + 0 = \frac{25}{3}$

C(3, 8) " $z = 3 + 8 = 11$

এবং D(1, 8) " $z = 1 + 8 = 9$

স্পষ্টত C (3, 8) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

Ans. কলম 3 টি ও খাতা 8 টি।

গ 'খ' হতে পাই,

লোকটি কলম কিনেছেন 3টি

দেখাতে হবে যে, $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা নয় অর্থাৎ অমূলদ সংখ্যা।

মনে করি, $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা, তাহলে

$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা, $q \neq 0$ এবং এদের মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক (1 ব্যতীত) নেই]

বা, $3 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $p^2 = 3q^2$ ... ... (i)

এখন, 3 দ্বারা $3q^2$ বিভাজ্য বিধায় 3 দ্বারা p^2 বিভাজ্য হবে।

সুতরাং p নিজেই 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

ধরি, $p = 3c$ [যেখানে c একটি পূর্ণসংখ্যা]

বা, $p^2 = 9c^2$

বা, $3q^2 = 9c^2$ [(i) থেকে]

বা, $q^2 = 3c^2$

$\therefore$ 3 দ্বারা q^2 বিভাজ্য, অর্থাৎ 3 দ্বারা q বিভাজ্য।

সুতরাং, p এবং q এর একটি সাধারণ উৎপাদক হলো 3, যা প্রস্তাবনা বিরোধী।

$\therefore \sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২৩ চলমান সিরীয় যুদ্ধের একটি বিশেষ বাহিনীর মাল সরবরাহ সংক্রান্ত দুইটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের শর্ত :

শর্ত : $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, x - y \leq 2, x - 2y \leq 10, x, y \geq 0$

শর্ত : $3y - x \leq 10, x + y \leq 6, x - y \leq 2, x, y \geq 0$ *[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]*

ক. যুদ্ধক্ষেত্রে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার সংক্ষেপে লিখ। ২

খ. ১নং শর্ত সাপেক্ষে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সম্ভাব্য সমাধান বিন্দুগুলো নির্ণয় কর। ৪

গ. ২নং শর্ত সাপেক্ষে সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর যখন $z = 2x + y$. ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যুদ্ধক্ষেত্রে রসদ ও সৈন্যবাহিনী এক স্থান থেকে অন্য স্থানে স্থানান্তর, স্থান বিবেচনায় সৈন্য ব্যবহার ও সীমাবদ্ধতার সূক্ষ্ম হিসাব সূচারুরূপে পরিচালনার জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হয়।

খ প্রদত্ত শর্তসমূহ: $x + 2y \leq 10$

$x + y \leq 6$

$x - y \leq 2$

$x - 2y \leq 10$

$x, y \geq 0$

অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি।

$x + 2y = 10$ বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ .... (i)

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (10, 0) ও (0, 5) বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $x + y = 6$ বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ ....(ii)

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (6, 0) ও (0, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

$x - y = 2$ বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ .... (iii)

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (2, 0) ও (0, –2) বিন্দুতে ছেদ করে।

$x - 2y = 10$ বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{-5} = 1$ ....(iv)

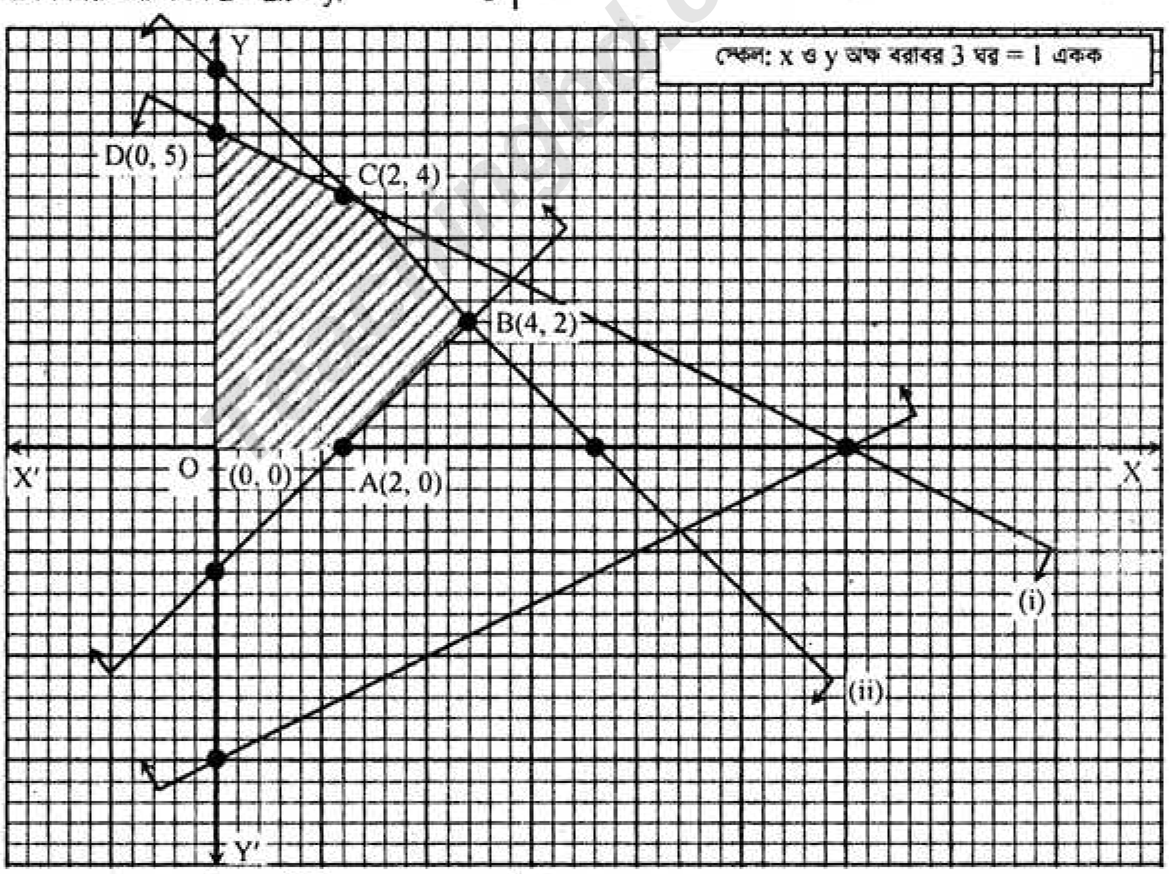
সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (10, 0) ও (0, –5) বিন্দুতে ছেদ করে।

$x = 0$

$y = 0$

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে অনুকূল সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা নির্ণয় করি।

লেখচিত্রে দেখা যায় যে, (i), (ii), (iii) ও (iv) এর সকল বিন্দু ও এদের পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।



চিত্রে OABCDO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। তা হলে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি O(0, 0), A(2, 0), B(4, 2), C(2, 4) এবং D(0, 5)

গ প্রদত্ত শর্তসমূহঃ $3y - x \leq 10, x + y \leq 6, x - y \leq 2, x, y \geq 0$

অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি

$3y - x = 10$

বা, $x - 3y = -10$ .... (i)

বা, $\frac{x}{-10} + \frac{y}{\frac{10}{3}} = 1$

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (–10, 0) ও $\left(0, \frac{10}{3}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $x + y = 6$ ....(ii)

বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$

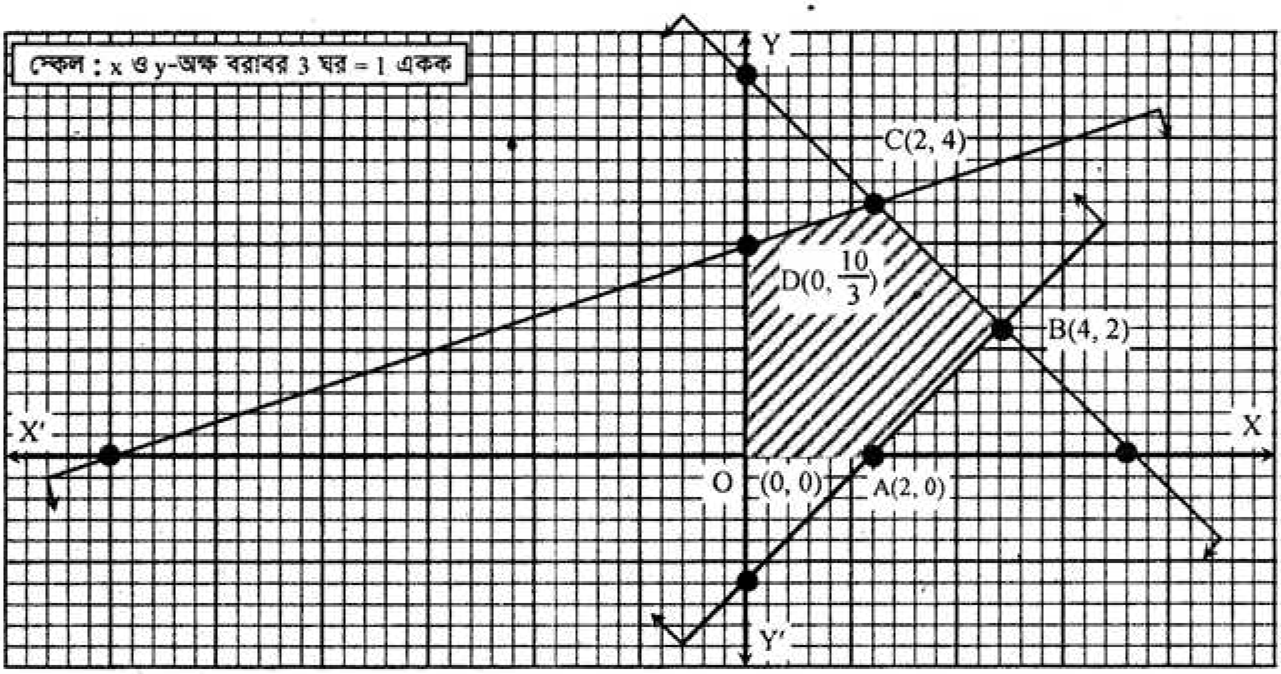
সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (6, 0) ও (0, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

$x - y = 2$ ....(iii)

বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (2, 0) ও (0, –2) বিন্দুতে ছেদ করে।

লেখচিত্রে দেখা যায় যে, (i), (ii) ও (iii) এর সকল বিন্দু ও এদের যে পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।



চিত্রে OABCDO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। তা হলে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি O(0, 0), A(2, 0), B(4, 2), C(2, 4), $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$

$z = 2x + y$

O(0, 0) বিন্দুতে $z = 2.0 + 0 = 0$

A(2, 0) বিন্দুতে $z = 2.2 + 0 = 4$

B(4, 2) বিন্দুতে $z = 2.4 + 2 = 10$

C(2, 4) বিন্দুতে $z = 2.2 + 4 = 8$

$D\left(0, \frac{10}{3}\right)$ বিন্দুতে $z = 2.0 + \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$

$\therefore z_{max} = 10$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৪ **দৃশ্যকল্প-১:** a, b, c ∈ R এবং ac = bc.

দৃশ্যকল্প-২: একজন পোলট্রি মালিক 800 টাকায় কিছু হাঁস ও মুরগির বাচ্চা কিনতে চান। প্রতিটি মুরগির বাচ্চার দাম 40 টাকা ও প্রতিটি হাঁসের বাচ্চার দাম 20 টাকা। *[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]*

ক. সমাধান কর : $\frac{1}{|5x-1|} > \frac{1}{9}; \left(x \neq \frac{1}{5}\right)$ ২

খ. যদি $c \neq 0$ হয়, তবে দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, a = b. ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত পোলট্রি মালিক কোন প্রকারের কতগুলি বাচ্চা কিনতে পারবেন যাতে তাঁর হাঁস ও মুরগির মোট বাচ্চার সংখ্যা সর্বাধিক 25 হয়? ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{1}{|5x-1|} > \frac{1}{9}$ এবং $x \neq \frac{1}{5}$

বা, $|5x - 1| < 9$

বা, $-9 < 5x - 1 < 9$

বা, $-8 < 5x < 10$

$\therefore -\frac{8}{5} < x < 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-8}{5} < x < 2 \text{ এবং } x \neq \frac{1}{5} \right\}$

খ যেহেতু $c \neq 0$, সুতরাং c এর গুণাত্মক বিপরীতক বা, c^{-1} এর অস্তিত্ব আছে।

কল্পনানুসারে, ac = bc

বা, $(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা বিধি]

বা, $a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ [সংযোজন যোগ্যতা বিধি অনুসারে]

বা, $a.1 = b.1$ [গুণের বিপরীতক]

$\therefore$ a = b [গুণের অভেদক] **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, হাঁসের বাচ্চা xটি ও মুরগির বাচ্চা yটি।

তাহলে, $20x + 40y \leq 800$, $x + y \leq 25$ এবং $x, y > 0$

অসমতাগুলিকে সমতা ধরে রূপান্তরিত সমীকরণ পাই,

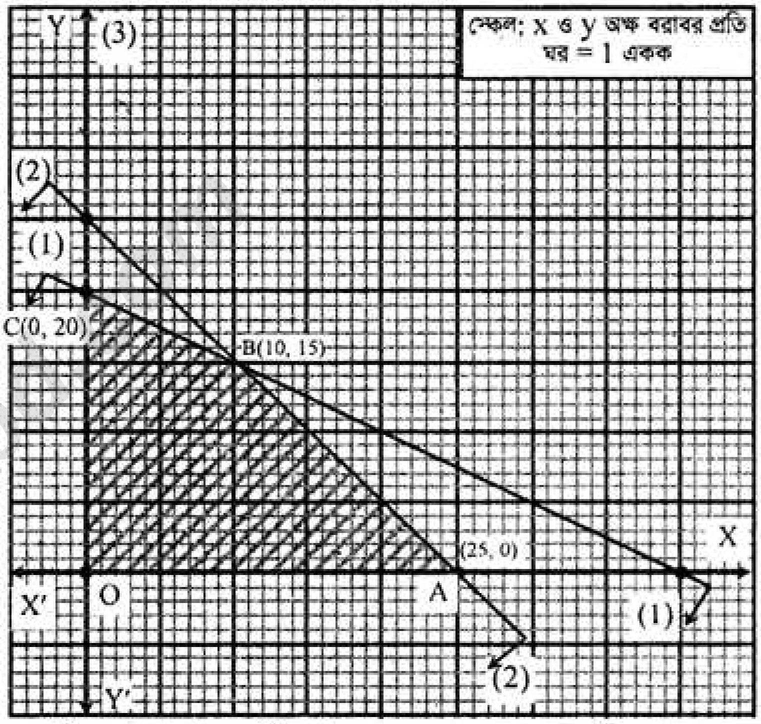
$20x + 40y = 800$ বা, $\frac{x}{40} + \frac{y}{20} = 1$ ………(1)

$x + y = 25$ বা, $\frac{x}{25} + \frac{y}{25} = 1$ ……… (2)

$x = 0$ ……… (3)

$y = 0$ ……… (4)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সংখ্যারেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।



লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (1) ও (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু O(0, 0) আছে ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (2) ও (4); (1) ও (2) এবং (1) ও (3) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABC যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। এই এলাকার প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে-

O(0, 0), A(25, 0), B(10, 15) ও C(0, 20)

এই বিন্দুগুলির মধ্যে কেবল B(10, 15) বিন্দুই প্রদত্ত সকল শর্ত সিদ্ধ করে। সুতরাং x = 10 টি হাঁসের বাচ্চা ও y = 15টি মুরগীর বাচ্চা কিনলে সর্বোচ্চ সংখ্যক বাচ্চা কেনা যাবে।

প্রশ্ন ▶ ২৫ $f(x) = 5x - 7$ একটি ফাংশন। A ও B দুই ধরনের খাবার আছে। যার মধ্যে প্রোটিন ও স্টার্চ এর পরিমাণ নিম্নরূপ:

খাবারের নাম	প্রোটিন	স্টার্চ	কিলো প্রতি মূল্য (টাকায়)
A	1	3	20
B	3	2	30
প্রত্যহ ন্যূনতম প্রয়োজন	9	12	–

[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]

ক. $13 + |-1-4| - 3 - |-8|$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{1}{|f(x)|} > 2; \left(x \neq \frac{7}{5}\right)$ কে সমাধান করে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. উদ্দীপকের ডাটা থেকে সমস্যাটিকে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে সবচেয়ে কম খরচে প্রত্যহের প্রয়োজন কিভাবে মেটানো যাবে তা নির্ণয় কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $13 + |-1-4| - 3 - |-8| = 13 + |-5| - 3 - 8$
$= 13 + 5 - (3 + 8) = 18 - 11 = 7$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপক থেকে পাই, $f(x) = 5x - 7$

এখন, $\frac{1}{|f(x)|} > 2$

সুতরাং, $f(x) \neq 0 \Rightarrow 5x - 7 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{7}{5}$

$\therefore \frac{1}{|f(x)|} > 2 \Rightarrow \frac{1}{|5x-7|} > 2$

$\Rightarrow |5x - 7| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < 5x - 7 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 7 < 5x - 7 + 7 < \frac{1}{2} + 7$ [7 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{-1+14}{2} < 5x < \frac{1+14}{2}$

$\Rightarrow \frac{13}{2} < 5x < \frac{15}{2}$

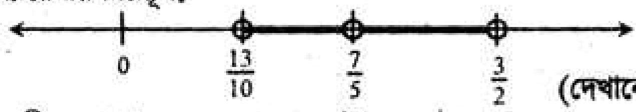
$\Rightarrow \frac{13}{2 \times 5} < \frac{5x}{5} < \frac{15}{2 \times 5}$ [$\frac{1}{5}$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \frac{13}{10} < x < \frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{13}{10} < x < \frac{3}{2}, x \neq \frac{7}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{13}{10} < x < \frac{3}{2}, x \neq \frac{7}{5} \right\}$

সংখ্যারেখায় নিম্নরূপ:



(দেখানো হলো)

গ সৃজনশীল ১১(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৮

প্রশ্ন ▶ ২৬ $f(x) = ab - ax$, $f(y) = by$, $x \leq 6$, $y \leq 6$ *[সরকারি বি এল কলেজ, খুলনা]*

ক. $\frac{1}{1+i}$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর। ২

খ. $a = 3$, $b = 2$ হলে $\frac{1}{|f(x)|} > a$, $x \neq 2$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখার মাধ্যমে দেখাও। ৪

গ. $a = b = 8$ এবং $f(y) \leq f(x)$ হলে $z = 6x + 7y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$\therefore r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [$\because \theta$, ৪র্থ চতুর্ভাগে]

$= -\tan^{-1}\left|\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = -\tan^{-1}1 = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-\pi}{4}\right)$ **(Ans.)**

খ $f(x) = ab - ax$

$a = 3$ ও $b = 2$ হলে $f(x) = 3.2 - 3x = 6 - 3x$

এখন, $\frac{1}{|f(x)|} > a, x \neq 2$

বা, $\frac{1}{|6-3x|} > 3, x \neq 2$

বা, $|6 - 3x| < \frac{1}{3}, x \neq 2$

বা, $-\frac{1}{3} < 6 - 3x < \frac{1}{3}, x \neq 2$

বা, $-\frac{1}{3} - 6 < 6 - 3x - 6 < \frac{1}{3} - 6, x \neq 2$

[প্রত্যেক পক্ষ থেকে 6 বিয়োগ করে]

বা, $\frac{-19}{3} < -3x < \frac{-17}{3}, x \neq 2$

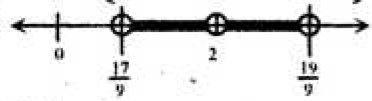
বা, $\frac{-19}{9} < -x < \frac{-17}{9}, x \neq 2$ [3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{19}{9} > x > \frac{17}{9}, x \neq 2$ [−1 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \frac{17}{9} < x < \frac{19}{9}, x \neq 2$

$\therefore$ সমাধান সেট, $\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{17}{9} < x < \frac{19}{9} \right\}$

সংখ্যারেখা :



গ দেওয়া আছে, $f(x) = ab - ax$
$f(y) = by$
$x \leq 6, y \leq 6$

$a = b = 8$ হলে $f(x) = 8.8 - 8x = 64 - 8x$ এবং $f(y) = 8y$

আবার, $f(y) \leq f(x)$ বা, $f(x) \geq f(y)$

বা, $64 - 8x \geq 8y$

বা, $8x + 8y \leq 64$

আমরা পাই, অভীষ্ট ফাংশনে $z_{max} = 6x + 7y$

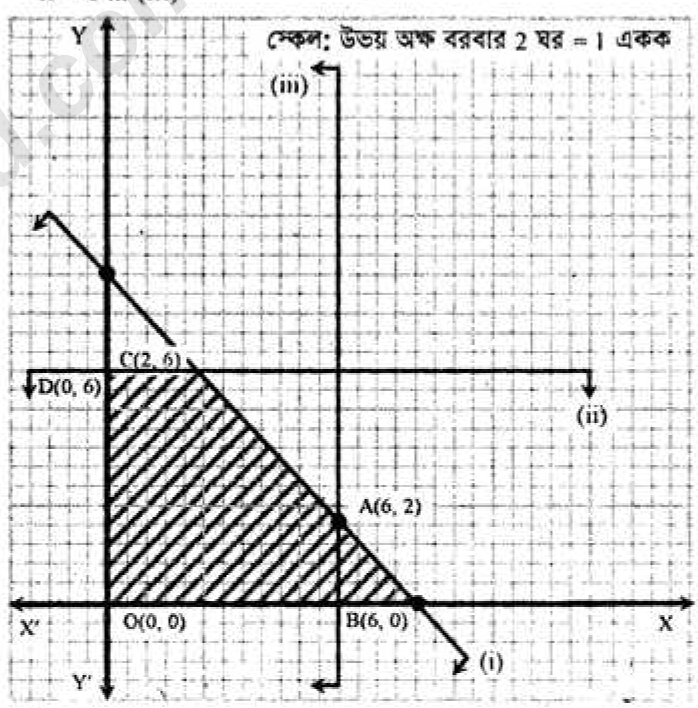
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $8x + 8y \leq 64$
$y \leq 6$
$x \leq 6$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

$8x + 8y = 64$

বা, $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} = 1$ ....(i)

$y = 6$ ... (ii)
$x = 6$ ... (iii)



লেখচিত্র হতে দেখা যায়, সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা BACD। A (6, 2) হলো (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু এবং C (2, 6) হলো (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু।

O(0, 0) বিন্দুতে $z = 6.0 + 7.0 = 0$

A(6, 2) বিন্দুতে $z = 6.6 + 7.2 = 36 + 14 = 50$

B(6, 0) বিন্দুতে $z = 6.6 + 7.0 = 36$

C(2, 6) বিন্দুতে $z = 6.2 + 7.6 = 12 + 42 = 54$

D(0, 6) বিন্দুতে, $z = 6 \times 0 + 7 \times 6 = 42$

অতএব, C(2, 6) বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান = 54 **(Ans.)**

★ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম

১. **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সর্বপ্রথম কে উদ্ভাবন করেন?** (সহজ)
- ক L.V. Kantorovich
- খ James Jaseph Sylvester
- গ Jaseph Louis Lagrange
- ঘ Augstin Louis Cauchy — (ক)

২. **Feasible Region বা সম্ভাব্য সমাধান এলাকা কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে?** (সহজ)
- ক ১ম   খ ২য়
- গ ৩য়   ঘ যেকোনো চতুর্ভাগে — (ক)

৩. **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ধাপ কয়টি?** (সহজ)
- ক 4টি   খ 3টি
- গ 2টি   ঘ 1টি — (খ)

৪. **সিদ্ধান্ত চলক নিচের কোন ধরনের হয়?** (সহজ)
- ক ধনাত্মক   খ ঋণাত্মক
- গ অঋণাত্মক   ঘ শূন্য — (গ)

৫. **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম উদ্ভাবনকারী গণিতবিদ L.V. Kantorvich নিচের কোন দেশের নাগরিক?** (সহজ)
- ক অস্ট্রেলিয়া   খ যুক্তরাষ্ট্র
- গ ডেনমার্ক   ঘ রাশিয়া — (ঘ)

৬. **নিচের কোন সমীকরণটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম প্রকাশ করে না?** (সহজ)
- ক $x + 2y \geq 0$ খ $3x + 5y \leq 25$
- গ $x, y \geq 0$ ঘ $x + y = 0$ — (ঘ)

৭. **$2x + 3y \geq 12$ এর সমাধান —**

i. সমতলের $2x + 3x = 12$ রেখার এক পার্শ্বের সমস্ত বিন্দু

ii. $2x + 3y = 12$ রেখার উভয় পার্শ্বের বিন্দু

iii. $2x + 3y = 12$ রেখার উপরস্থ বিন্দু

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
- ক i ও ii   খ ii ও iii
- গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii — (গ)

৮. **যেকোনো যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সিদ্ধান্ত চলকের ক্ষেত্রে —**

i. $x \geq 0$

ii. $y \geq 0$

iii. $x \geq 0$ এবং $y \leq 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
- ক i ও ii   খ i ও iii
- গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii — (ক)

৯. **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ক্ষেত্রে—**

i. উদ্দেশ্য অপেক্ষক সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন দুই ধরনেরই হতে পারে

ii. একাধিক কাম্য বিন্দু (optimum point) থাকতে পারে

iii. শুধুমাত্র শীর্ষবিন্দু (vertex) এ কাম্য সমাধান থাকে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
- ক i   খ i এবং ii
- গ iii   ঘ iii — (খ)

১০. **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে উদ্দেশ্য অপেক্ষক z-এর সিদ্ধান্ত চলক x, y এর ক্ষেত্রে —**

i. z হলো x এবং y-এর ফাংশন

ii. z শুধুমাত্র সর্বোচ্চকরণ ধরনের হয়

iii. $x, y \geq 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
- ক i   খ iii
- গ ii   ঘ i এবং iii — (ঘ)

১১. **যদি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমাধান ক্ষেত্র সীমিত (Bounded) হয়, তবে —**

i. অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ মান সমাধান ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুতে থাকবে

ii. অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ মান সমাধান ক্ষেত্রের একাধিক কৌণিক বিন্দুতে থাকতে পারে

iii. অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ মান সমাধান ক্ষেত্রের অসংখ্য বিন্দুতে থাকতে পারে

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
- ক i   খ ii
- গ iii   ঘ i, ii ও iii — (ক)

★★ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন

১২. **নিচের কোন অসমতাটি (0, 1) বিন্দুতে সত্য?** (সহজ)
- ক $x + y > 0$ খ $x > 1$
- গ $x + y > 3$ ঘ $y \leq 2x$ — (ক)

১৩. **নিচের কোন অসমতাটি মূলবিন্দুতে সত্য?** (মধ্যম)
- ক $3x + 4y > 0$ খ $3x + 4y - 1 \geq 0$
- গ $-3x - 4y + 1 > 0$ ঘ $y > x$ — (গ)

১৪. **যদি $S_1 = \{(x, y) : ax + by + c \geq 0\}$ এবং $S_2 = \{(x, y) : ax + by + c \leq 0\}$ হয়, তবে $S_1 \cap S_2$ নিচের কোনটি?** (মধ্যম)
- ক $\{(x, y) : ax + by + c \geq 0\}$
- খ ϕ
- গ $\{(x, y) : (x, y) \in R \times R\}$
- ঘ $\{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ — (ঘ)

১৫. **দুইটি সংখ্যার যোগফল 24; সংখ্যাদ্বয়ের গরিষ্ঠ গুণফল কত?** (মধ্যম)
- ক 140   খ 144
- গ 288   ঘ 280 — (খ)

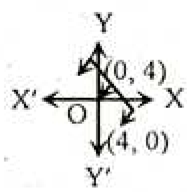
১৬. x ও y এমন দুইটি সংখ্যার যোগফল 100 হলে, $x^2 + y^2$ এর সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

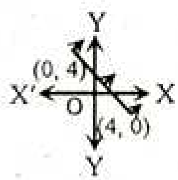
ক 5050 খ 5020
গ 6000 ঘ 5000 **ঘ**

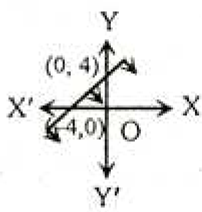
১৭. $2x_1 + x_2 \geq 5$, $2x_1 + 5x_2 \geq 10$, $x_1 + x_2 \leq 5$, $x_1 \geq 0$ ও $x_2 \geq 0$ অসমতাসমূহ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি কীরূপ? (মধ্যম)

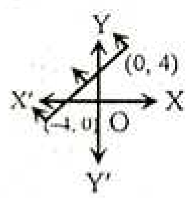
ক ত্রিভুজ খ চতর্ভুজ
গ ট্রাপিজিয়াম ঘ পঞ্চভুজ **ক**

১৮. $x + y \geq 4$ অসমতাটির লেখচিত্র নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক 

খ 

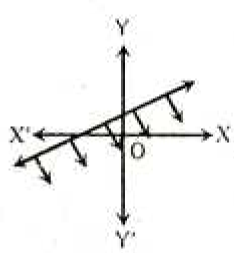
গ 

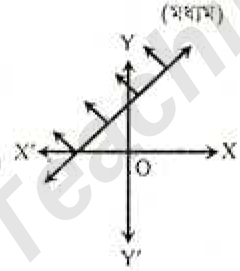
ঘ 

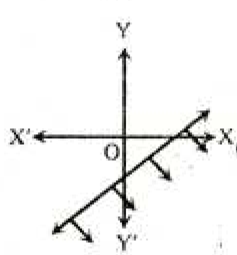
খ

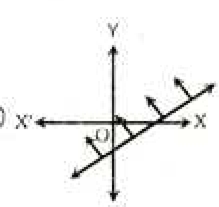
ব্যাখ্যা: (0, 0) বিন্দুতে $0 \geq 4$ যা সত্য নয় সুতরাং অসমতাটি মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে যাবে।

১৯. $x - 2y + 6 > 0$ অসমতাটির লেখচিত্র কোনটি? (মধ্যম)

ক 

খ 

গ 

ঘ 

ক

২০. দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা এমনভাবে গঠিত যেন অংকদ্বয়ের যোগফল কমপক্ষে 12 হয়। আবার অংকদ্বয়ের যে কোনটির সাথে 2 যোগ করলেও সেটি এক অংক বিশিষ্ট থাকে। এরূপ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নিচের কোনটি? (সহজ)

ক 57 খ 67
গ 77 ঘ 87 **ক**

২১. $x + y \leq 1$, $y \leq 1$, $x, y \geq 0$ শর্তাবলী সাপেক্ষে $2x + 9y$ এর সর্বোচ্চ মান কত? (কঠিন)

ক 1 খ 2
গ 3 ঘ 9 **ঘ**

২২. অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x + y$ শর্ত : $x + y \leq 11$, $y \leq 6$, $x, y \geq 0$ হলে z এর সর্বোচ্চ মান কত? (মধ্যম)

ক 6 খ 16
গ 22 ঘ 24 **গ**

ব্যাখ্যা: সমাধানের অনুকূল এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলো (0, 0), (11, 0), (5, 6), (0, 6)

(0, 0) বিন্দুতে $z = 0 + 0 = 0$

(11, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 11 + 0 = 22$

(5, 6) বিন্দুতে $z = 2 \times 5 + 6 = 16$

(0, 6) বিন্দুতে $z = 0 + 6 = 6$

$\therefore$ $z_{max} = 22$

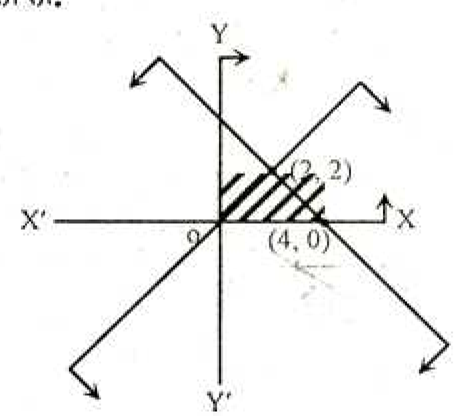
২৩. $5x_1 + 10x_2 \leq 50$, $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ শর্তাধীনে $2x_1 + 7x_2$ এর সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

ক 5 খ 7
গ 2 ঘ 12 **গ**

২৪. $x + y \leq 4$, $y \leq x$; $x, y \geq 0$ শর্তাধীনে $2y - 5x$ এর সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

ক −28 খ −20
গ −6 ঘ 0 **খ**

ব্যাখ্যা:



(4, 0) বিন্দুতে সর্বনিম্ন মান $= 2 \times 0 - 5 \times 4 = -20$

২৫. $F = 3x + 4y$ এর সর্বোচ্চ মান কত? যেখানে $x + y \leq 7$, $2x + 5y \leq 20$, $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$. (মধ্যম)

ক 18 খ 14
গ 16 ঘ 23 **ঘ**

২৬. $x + y \leq 7$, $2x + 5y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ শর্তাধীনে $z = 3x + 4y$ এর গরিষ্ঠ মান কোন বিন্দুতে? (মধ্যম)

ক (5, 2) খ (7, 0)
গ (10, 0) ঘ (0, 7) **ক**

২৭. $x + y = 5$, $x \geq 2$, $y \leq 4$ শর্তাধীনে $z = 6x + 2y$ রাশিটির সর্বোচ্চ মান কত? (সহজ)

ক 22 খ 20
গ 18 ঘ 30 **ঘ**

২৮. $x + y \le 5$, $x + 2y \ge 8$ এবং $x \ge 0$, $y \ge 0$ শর্ত সাপেক্ষে $z = 2x - y$ রাশিটির সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

ক 0 খ –5

গ –3 ঘ 2 **খ**

২৯. অভীষ্ট ফাংশন $z = 4x + 3y$ শর্তঃ $x + y \le 4$, $x \le 2$ এবং $x, y \ge 0$.

z এর সর্বোচ্চ মান কত? (মধ্যম)

ক 8 খ 12

গ 14 ঘ 16 **গ**

৩০. $x + y \ge 6$, $x \le 6$, $y \le 4$, $x, y \ge 0$ অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + y$,

z এর সর্বোচ্চমান কত? (সহজ)

ক 12 খ 18

গ 22 ঘ কোনটি নয় **গ**

৩১. $x + y \ge 3$, $x + 2y \le 10$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ শর্তাধীনে $2x + y$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 5 খ 6

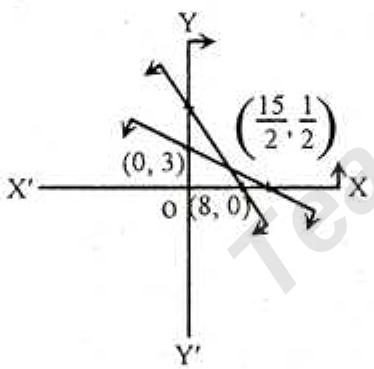
গ 10 ঘ 20 **ঘ**

৩২. $x + y \le 8$, $x + 3y \le 9$; $x \ge 0$, $y \ge 0$ শর্তাধীনে $2x + 5y$ এর সর্বোচ্চ মান কত? (মধ্যম)

ক 15 খ 16

গ $\frac{35}{2}$ ঘ $\frac{77}{2}$ **গ**

ব্যাখ্যা:



$\left(\frac{15}{2}, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান

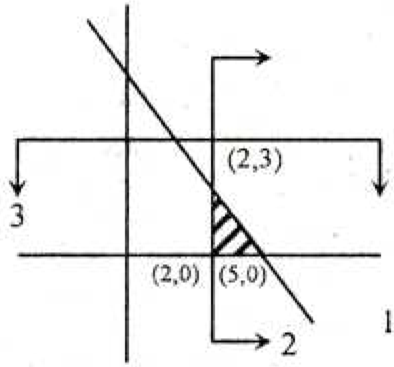
$$= 2 \times \frac{15}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$$

৩৩. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y = 5$, $x \ge 2$, $y \le 4$ শর্তসমূহের সাপেক্ষে, $z = 6x + 2y$ এর সর্বোচ্চ মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক 12 খ 14

গ 28 ঘ 30 **ঘ**

ব্যাখ্যা:



(2,0) বিন্দুতে $z = 12 + 0 = 12$

(5,0) বিন্দুতে $z = 6.5 + 2.0 = 30$

(2,3) বিন্দুতে $z = 6.2 + 2.3$

$= 12 + 6 = 18$

৩৪. $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 \ge 2$, $x_2 \le 3$ শর্তাধীনে $x_2 - x_1$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? (সহজ)

ক 0 খ 2

গ 3 ঘ 6 **ক**

৩৫. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y = 5$, $x \ge 2$, $y \le 4$ শর্ত সাপেক্ষে $z = 6x + 2y$ রাশিটির সর্বোচ্চ মান কত? (সহজ)

ক 22 খ 20

গ 18 ঘ 30 **ঘ**

৩৬. $5x + 10y \le 50$, $x + y \ge 1$, $y \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ শর্ত সাপেক্ষে $2x + 7y$ এর লঘিষ্ঠ মান কত? (মধ্যম)

ক 2 খ 7

গ 20 ঘ 28 **ক**

৩৭. $x + y \le 9$, $x + y \ge 7$, $x \le 4$, $x, y \ge 0$ শর্তমতে $z = x - y$ এর সর্বনিম্ন মান কত ? (কঠিন)

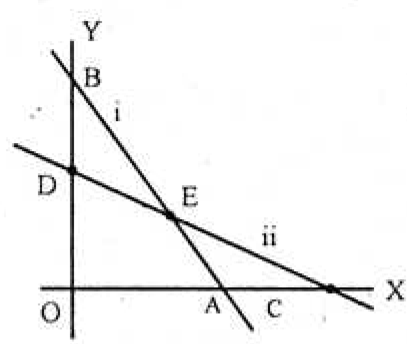
ক –9 খ –7

গ –1 ঘ 1 **ক**

৩৮. নিম্নে দুইটি অসমতা দেয়া হলো :

$x + y \le 7$ .... (i)

$x + 2y \le 10$ .... (ii)



(i) ও (ii) এর সমাধান এলাকা — (কঠিন)

ক আবদ্ধ এলাকা OAED

খ আবদ্ধ এলাকা ACE

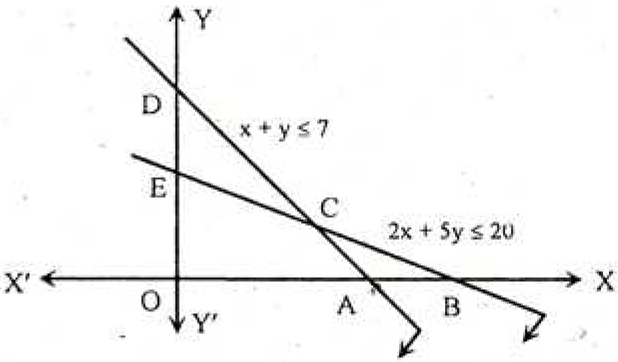
গ আবদ্ধ এলাকা BDE

ঘ উন্মুক্ত এলাকা BEC **ক**

৩৯. $x + 2y \leq 80$ অসমতাটি নিচের কোন বিন্দুতে সত্য? (সহজ)

ক (1, 1) খ (0, 45)
গ (15, 40) ঘ (16, 39) **ক**

৪০.



কোন আবদ্ধ ক্ষেত্রটি $x + y \leq 7, 2x + 5y \leq 20, x \geq 0, y \geq 0$ শর্তসমূহকে সিদ্ধ করে। (সহজ)

ক OACE খ OACD
গ ABC ঘ DEC **ক**

৪১. $x + y \geq 6, 2x + y \geq 8, x \geq 0, y \geq 0$ শর্তাধীনে $z = 2x + 3y$ এর সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

ক 12 খ 4
গ –5 ঘ 16 **ক**

৪২. $x + y \leq 5, x + 2y \geq 8, x, y \geq 0$ শর্তাধীনে $2x - y$ এর সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

ক –5 খ –4
গ 0 ঘ 1 **ক**

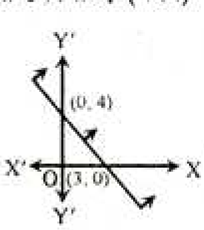
৪৩. $x + y \leq 8, x + y \geq 2; x, y \geq 0$ শর্তাধীনে $2x + y$ এর সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

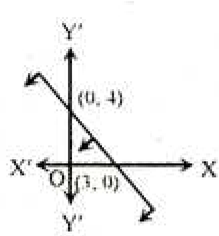
ক 0 খ 2
গ 4 ঘ 6 **খ**

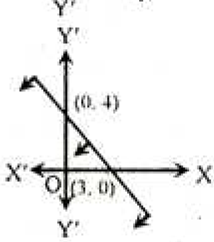
৪৪. নিচের কোনটি যোগাশ্রয়ী অসমতা প্রকাশ করে? (সহজ)

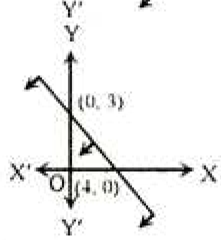
ক $x + y = 5$ খ $4x + 7y < 15$
গ $x = 5$ ঘ $2x^2 + y < 5$ **খ**

৪৫. (3, 0) ও (0, 4) বিন্দুগামী রেখা এবং মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে অবস্থিত অসমতার লেখচিত্র নিচের কোনটি? (সহজ)

ক 

খ 

গ 

ঘ 

ক

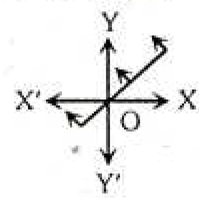
৪৬. $10x + y = 60$ সমীকরণকে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ আকারে প্রকাশ করলে b এর মান কত? (মধ্যম)

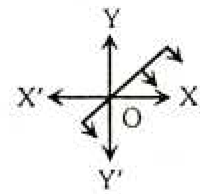
ক 6 খ 10
গ 50 ঘ 60 **ঘ**

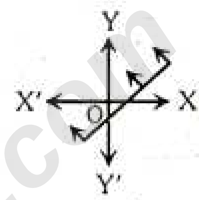
৪৭. একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমাধান অঞ্চলের বিন্দুগুলি A(6, 0), B(6, 4) এবং C(0, 4) এবং $z = 7x + 4y$ হলে z_{max} =? (কঠিন)

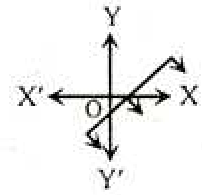
ক 16 খ 21
গ 34 ঘ 58 **ঘ**

৪৮. $x - y \leq 0$ অসমতাটি লেখচিত্রে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে? (মধ্যম)

ক 

খ 

গ 

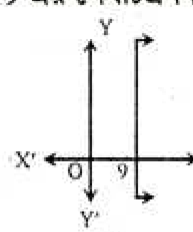
ঘ 

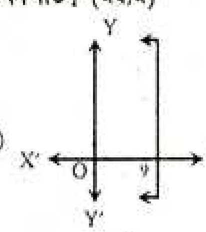
ক

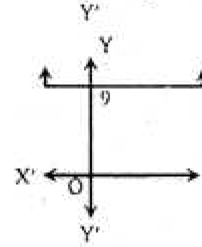
৪৯. $z = -x + y$, শর্ত: $3y - x \leq 10, x + y \leq 6, x - y \leq 2, x, y \geq 0$ হলে z_{min} = ? (কঠিন)

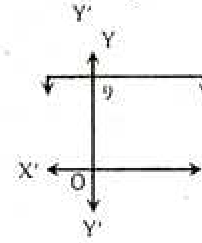
ক 0 খ –2
গ –4 ঘ –6 **খ**

৫০. $x \leq 9$ এর লেখচিত্র নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক 

খ 

গ 

ঘ 

খ

৫১. শর্ত: $2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12, x, y \geq 0$ এবং $z = 3x + y$ হলে—

i. (3, 2) একটি সমাধান বিন্দু
ii. z এর সর্বোচ্চ মান 12
iii. (0, 4) বিন্দুতে সর্বনিম্ন মান

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত শর্তাধীনে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার বিন্দুগুলো পাওয়া যায় (0, 0), (4, 0), (3, 2), (0, 4)

৫২. শর্তঃ $2x_1 + 15x_2 \leq 30$, $4x_1 + 3x_2 \geq 12$, x_1, $x_2 \geq 0$, $z = 2x_1 + 3x_2$

i. (3, 0) বিন্দুটি সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দু।

ii. ফাংশনের সর্বোচ্চ মান = 30

iii. ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান = 6

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii   খ ii ও iii

গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii   **ঘ**

ব্যাখ্যা: ফাংশনটির কৌণিক বিন্দুগুলো (3, 0), (15, 0) এবং $\left(\frac{5}{3}, \frac{16}{9}\right)$

∴ সর্বোচ্চ মান (15, 0) বিন্দুতে, $z = 2 \times 15 + 0 = 30$

∴ সর্বনিম্ন মান (3, 0) বিন্দুতে, $z = 2 \times 3 + 0 = 6$

৫৩. অভীষ্ট ফাংশন $F = 12x + 10y$ শর্ত: $2x + y \leq 90$, $x + 2y \leq 80$, $x + y \leq 50$, $x, y \geq 0$

i. এটা একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম

ii. অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করা সম্ভব

iii. অভীষ্ট ফাংশনের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা সম্ভব

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i   খ i ও ii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii   **ঘ**

৫৪. $x + y \leq 7$, $3x + 4y \geq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ শর্তাধীনে অভীষ্ট যোগাশ্রয়ী ফাংশন $x + 3y$ হলে—

i. (4, 0) একটি সম্ভাব্য কৌণিক বিন্দু

ii. ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান = 21

iii. ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান = 4

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii   খ ii ও iii

গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii   **ঘ**

৫৫. $x + y \leq 7$, $2x + 3y \geq 12$; $x, y \geq 0$ শর্তাধীনে অভীষ্ট যোগাশ্রয়ী ফাংশন $F = 2y - x$ হলে—

i. লেখচিত্রে অনুকূল এলাকা হিসেবে একটি চতুর্ভুজ ক্ষেত্র পাওয়া যাবে

ii. F এর সর্বোচ্চ মান = 14

iii. F এর সর্বনিম্ন মান = –6

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii   খ ii ও iii

গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii   **ক**

৫৬. একটি স্কুলে ছাত্র ও ছাত্রী যথাক্রমে x ও y। ছাত্র ও ছাত্রী একত্রে অনধিক 500। আবার দ্বিগুণ ছাত্রী ও ছাত্র একত্রে অনধিক 700। উক্ত শর্তগুলো গাণিতিক আকারে —

i. $x + y \leq 500$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

ii. $x + 2y \leq 700$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

iii. $x + 2y \geq 700$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও iii   খ i ও ii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii   **খ**

৫৭. $x + y \leq 5$, $x + 2y \geq 8$, $x, y \geq 0$ শর্তাধীনে—

i. সমাধান এলাকার প্রান্তিক বিন্দুগুলি (2, 3), (0, 4), (0, 5)

ii. $2x - y$ এর সর্বনিম্ন মান = 5

iii. $2x - y$ এর সর্বোচ্চ মান = 1

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii   খ ii ও iii

গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii   **গ**

৫৮. $x + y \leq 7$, $2x + 5y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ শর্তাধীনে—

i. সমাধান এলাকার প্রান্তিক বিন্দুগুলি (0, 0), (7, 0) (5, 2) ও (0, 4)

ii. $3x + 4y$ এর সর্বোচ্চ মান = 23

iii. $x - y$ এর সর্বনিম্ন মান = –4

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii   খ ii ও iii

গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii   **ঘ**

৫৯. $x + y = 5$, $x \geq 2$, $y \leq 4$; $x, y \geq 0$ শর্তাধীনে —

i. সমাধান এলাকার প্রান্তিক বিন্দু (5, 0) ও (2, 3)

ii. $4x + 6y$ এর সর্বোচ্চ মান = 26

iii. $x - 2y$ এর সর্বনিম্ন মান = –4

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii   খ ii ও iii

গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii   **ঘ**

৬০. $x_1 + 3x_2 \leq 6$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1, x_2 \geq 0$ শর্তাধীনে —

i. সমাধান এলাকা ত্রিভুজ আকৃতির

ii. প্রান্তিক বিন্দুগুলি (3, 1), (4, 0) ও (6, 0)

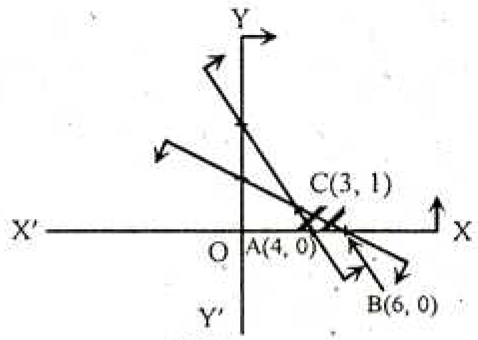
iii. $x_1 + 2x_2$ এর সর্বোচ্চ মান = 6

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii   খ ii ও iii

গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii   **ঘ**

ব্যাখ্যা:



ABC হলো একটি ত্রিভুজ।

(6, 0) বিন্দুতে $x_1 + 2x_2$ এর সর্বোচ্চ মান = 6 + 0 = 6

৬১. $ax + by \geq c$ এর সমাধান—

i. সমতলের $ax + by = c$ রেখার এক পার্শ্বের সমস্ত বিন্দু

ii. $ax + by = c$ রেখার উভয় পার্শ্বের বিন্দু

iii. $ax + by = c$ রেখার উপরস্থ বিন্দু

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

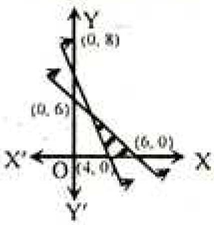
ক i   খ iii

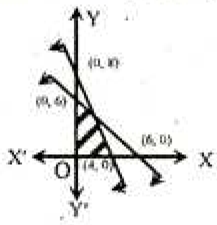
গ i এবং ii   ঘ i এবং iii   **ঘ**

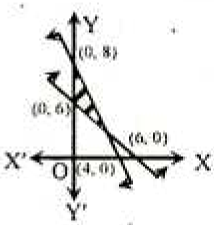
নিচের তথ্যের আলোকে (৬২-৬৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

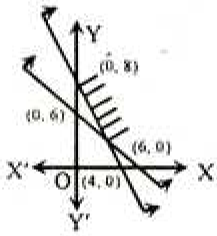
$z = 2x + 3y$ শর্ত: $x + y \geq 6$, $2x + y \geq 8$, $x, y \geq 0$

৬২. প্রদত্ত শর্তানুসারে লেখচিত্র নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক 

খ 

গ 

ঘ 

ঘ

৬৩. z এর সর্বনিম্ন মান কত? (কঠিন)

ক −5   খ 4

গ 12   ঘ 16   **গ**

ব্যাখ্যা: সমাধান বিন্দু (6, 0), (2, 4), (0, 8)

৬৪. z এর সর্বোচ্চ মান কত? (সহজ)

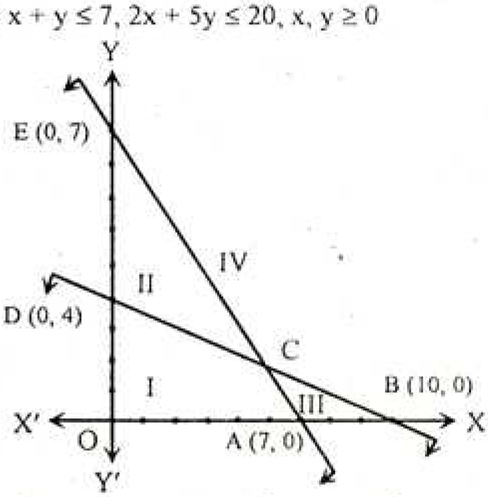
ক 4   খ 12

গ 16   ঘ 24   **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৫-৬৭)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

সর্বোচ্চকরণ: $z = 3x + 4y$,

শর্ত : $x + y \leq 7$, $2x + 5y \leq 20$, $x, y \geq 0$



৬৫. চিত্রে অনুকূল এলাকা নিচের কোনটি? (সহজ)

ক I   খ II

গ III   ঘ IV   **ক**

৬৬. z এর সর্বোচ্চ মান কত? (সহজ)

ক 16   খ 21

গ 23   ঘ 30   **গ**

৬৭. কোন বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ? (মধ্যম)

ক A   খ B

গ C   ঘ D   **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৮ ও ৬৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$x + y \leq 5$, $x + 2y \geq 8$, $x, y \geq 0$

৬৮. শর্তগুলির সাপেক্ষে $2x - y$ এর সর্বনিম্ন মান কোনটি? (মধ্যম)

ক −5   খ −4

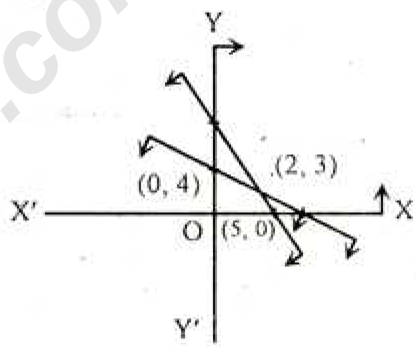
গ 0   ঘ 1   **ক**

৬৯. দ্বিতীয় অসমতাটি পরিবর্তিত হয়ে $x + 2y \leq 8$ হলে শর্তগুলির সাপেক্ষে $y - x$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 0   খ 1

গ 4   ঘ 5   **গ**

ব্যাখ্যা:



(0, 4) বিন্দুতে $y - x$ এর সর্বোচ্চ মান $= 4 - 0 = 4$

নিচের তথ্য মতে (৭০-৭৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম $z = 40x + 50y$

সীমাবদ্ধতাগুলি : $2x + 3y \geq 8$, $5x + 3y \geq 11$, $x, y \geq 0$

৭০. প্রোগ্রামটিতে চলক কয়টি? (সহজ)

ক 1   খ 2

গ 3   ঘ 4   **খ**

৭১. অসমতাগুলি সমাধান করে প্রাপ্ত কৌণিক বিন্দুগুলির মধ্যে কোনটি x, y সমতলে অবস্থিত। (সহজ)

ক $\left(0, \frac{11}{3}\right)$ খ (1, 2)

গ (4, 0)   ঘ (2, 1)   **খ**

ব্যাখ্যা: অসমতাগুলি সমাধানে লেখচিত্র থেকে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি $\left(0, \frac{11}{3}\right)$, (1, 2) এবং (4, 0)

৭২. কোন বিন্দুটিতে সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়? (সহজ)

ক $\left(0, \frac{11}{3}\right)$ খ (4, 0)

গ (1, 2)   ঘ $\left(\frac{11}{5}, 0\right)$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\left(0, \frac{11}{3}\right)$ বিন্দুতে $z = 40.0 + 50.\frac{11}{3} = 183.3$

$(1, 2)$ বিন্দুতে $z = 40.1 + 50.2 = 140$

$(4, 0)$ বিন্দুতে $z = 40.4 + 50.0 = 160$

$(1, 2)$ বিন্দুতে সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।

৭৩. সর্বনিম্ন মানটি কত? (মধ্যম)

(ক) 140　(খ) 160

(গ) 120　(ঘ) 180　**(ক)**

যদি $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 4$ এবং $3x + y \geq 6$ হয় এবং $z = \max(x + 2y)$

উপরের তথ্যের আলোকে (৭৪-৭৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৭৪. নিচের কোন বিন্দুটি সমাধান এলাকার বিন্দু? (সহজ)

(ক) (3, 2)　(খ) (1, 3)

(গ) (2, 4)　(ঘ) (1, 6)　**(খ)**

৭৫. অভীষ্ট ফাংশনের মান কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 2　(খ) 4

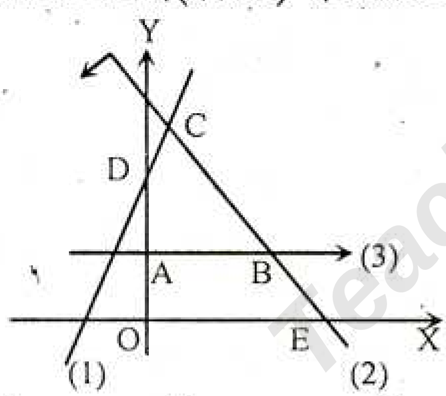
(গ) 8　(ঘ) 12　**(ঘ)**

৭৬. কোন বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান সর্বোচ্চ? (মধ্যম)

(ক) (2, 0)　(খ) (0, 6)

(গ) (4, 0)　(ঘ) (0, 4)　**(খ)**

নিচের লেখটি দেখ এবং (৭৭-৮০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৭৭. যদি (1) নং রেখাটি $2x - y > -4$ সীমাবদ্ধতার সাথে সংশ্লিষ্ট হয় তবে কোন বিন্দুটি সমাধানে অন্তর্ভুক্ত হবে? (মধ্যম)

(ক) D　(খ) C

(গ) A　(ঘ) সবগুলি　**(গ)**

৭৮. যদি (3) নং রেখাটি $y \geq 3$ হয় তবে কোন বিন্দুটি সমাধানে অন্তর্ভুক্ত হবে? (মধ্যম)

(ক) A　(খ) B

(গ) C এবং D　(ঘ) সবগুলি　**(ঘ)**

৭৯. যদি (2) নং সীমাবদ্ধতা $x + 2y \leq 16$ হয় তবে সমাধানের জন্য কৌণিক বিন্দু কোনটি? (মধ্যম)

(ক) A এবং B　(খ) A এবং D

(গ) C এবং D　(ঘ) B এবং C　**(ঘ)**

৮০. ABCD আবদ্ধ এলাকা হলো Feasible Region বা সম্ভাব্য সমাধানের অনুকূল এলাকা কি হবে? (মধ্যম)

(ক) AB রেখাংশ সমাধানে নেই

(খ) CD রেখাংশ সমাধানে নেই

(গ) AD রেখাংশ সমাধানে নেই

(ঘ) BC রেখাংশ সমাধানে নেই　**(খ)**

ব্যাখ্যা: সীমাবদ্ধতা

$2x - y > -4$ .... (1)

$x + 2y \leq 16$ .... (2)

$y \geq 3$ .... (3)

∴ $2x - y > -4$ অসমতাটিকে সমতার সমীকরণ বিবেচনা করলে তা (1) নং রেখার সাথে সংশ্লিষ্ট (1) নং সরল রেখার উপর C,D দুইটি বিন্দু। সুতরাং CD রেখাংশ সমাধানে নেই।

নিচের তথ্যের আলোকে (৮১-৮৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

F_1 ও F_2 দুই ধরনের খাবারের প্রতি কেজির দাম 10 টাকা ও 20 টাকা। প্রতিকেজি খাবার দুটিতে প্রোটিন ও ফ্যাটের পরিমাণ এবং দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন নিচের তালিকায় দেখানো হলো:

খাবার	প্রোটিন	ফ্যাট
F_1	1	3
F_2	3	2
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	9	12

৮১. F_1 ও F_2 খাদ্য x ও y কেজি হলে নিচের কোনটি অভীষ্ট ফাংশন নির্দেশ কর? (সহজ)

(ক) $z = 10x + 20y$　(খ) $z = x + 3y$

(গ) $z = 3x + 2y$　(ঘ) $z = 9x + 12y$　**(ক)**

৮২. প্রোটিনের পরিমাণ নিচের কোন অসমতা দ্বারা লেখা যাবে? (সহজ)

(ক) $x + 3y \leq 9$　(খ) $x + 3y = 9$

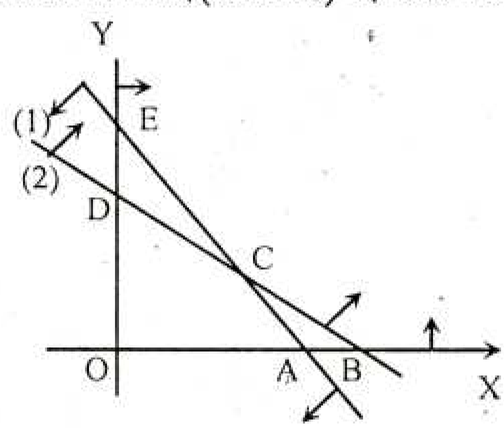
(গ) $x + 3y \geq 9$　(ঘ) $x + 3y > 9$　**(গ)**

৮৩. ফ্যাটের পরিমাণ বুঝাতে নিচের কোন অসমতাটি প্রয়োজন? (সহজ)

(ক) $3x + 2y \geq 12$　(খ) $3x + 2y > 12$

(গ) $3x + 2y \leq 12$　(ঘ) $3x + 2y = 12$　**(ক)**

নিচের চিত্রটি দেখ এবং (৮৪ ও ৮৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৮৪. যদি (1) নং রেখাটি $2x + 3y \leq 30$ সীমাবদ্ধতার সাথে সংশ্লিষ্ট হয় তবে (2) নং এর সীমাবদ্ধতা কোনটি হতে পারে? (সহজ)

ক $2x + 5y \leq 40$ খ $2x + 5y \geq 40$

গ $2x - 5y \leq 40$ ঘ $2x - 5y \geq 40$ **খ**

৮৫. Feasible Region বা সম্ভাব্য সমাধানের অনুকূল এলাকা কোনটি? (সহজ)

ক OACD আবদ্ধ এলাকা

খ ABC আবদ্ধ এলাকা

গ CDE আবদ্ধ এলাকা

ঘ BCE উন্মুক্ত এলাকা **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৮৬ ও ৮৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

সর্বোচ্চকরণ : $z = 4y - x$

শর্ত : $x + y \leq 7$

$2x + 5y \leq 20$

$x, y \geq 0$

৮৬. নিচের কোনটি সম্ভাব্য প্রান্তিক বিন্দু? (মধ্যম)

ক (4, 0) খ (0, 7)

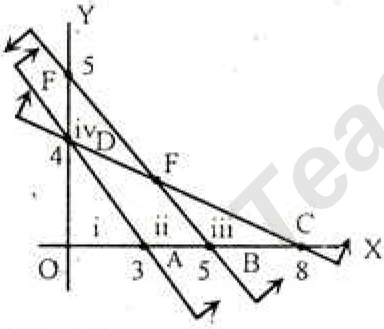
গ (5, 2) ঘ (2, 5) **গ**

৮৭. অভীষ্ট ফাংশনের কাঙ্ক্ষিত মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 16 খ 18

গ 23 ঘ 28 **ক**

নিচের চিত্রের আলোকে (৮৮-৯১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



অভীষ্ট ফাংশন: $z = 2x - y$

শর্ত : $x + 2y \leq 8, 4x + 3y \geq 12, x + y \leq 5, x, y > 0$

৮৮. চিত্রে অনুকূল এলাকা কোনটি? (সহজ)

ক i খ ii

গ iii ঘ iv **খ**

৮৯. কোন বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান? (মধ্যম)

ক A খ B

গ C ঘ D **ঘ**

ব্যাখ্যা: A(3, 0) বিন্দুতে, $z = 2 \times 3 - 0 = 6$

D(0, 4) বিন্দুতে, $z = 2 \times 0 - 4 = -4$

B(5, 0) বিন্দুতে, $z = 2 \times 5 - 0 = 10$

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ে উত্তরে ভুল আছে]

৯০. অভীষ্ট ফাংশনের সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

ক −4 খ −3

গ 0 ঘ 1 **ক**

৯১. অভীষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান কত? (মধ্যম)

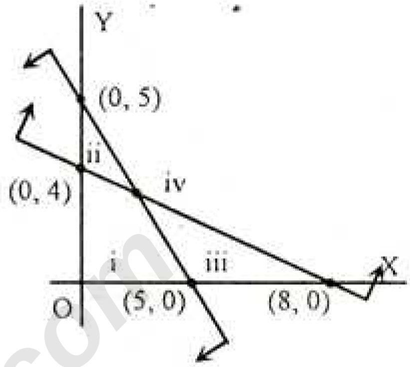
ক 6 খ 10

গ 16 ঘ কোনটি হয় না **খ**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (৯২-৯৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x - y$

শর্ত: $x + y \leq 5, x + 2y \geq 8, x, y \geq 0$



৯২. পাশের চিত্রে অনুকূল এলাকা কোনটি? (সহজ)

ক i খ ii

গ iii ঘ iv **খ**

৯৩. সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)

ক −5 খ −4

গ 1 ঘ 16 **ক**

৯৪. সর্বোচ্চ মান কত? (মধ্যম)

ক −5 খ −4

গ 1 ঘ 10 **গ**

উদ্দীপকের আলোকে (৯৫-৯৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও।

একজন কৃষক ধান এবং গমের চাষ করতে গিয়ে দেখলেন যে, প্রতি হেক্টর জমিতে ধান ও গম চাষের খরচ যথাক্রমে 1200 টাকা এবং 800 টাকা। প্রতি হেক্টর জমিতে ধান ও গম চাষের জন্য যথাক্রমে 4 জন ও 6 জন শ্রমিকের প্রয়োজন হয়। সর্বাধিক 26 জন শ্রমিক নিয়োগ করে এবং 4800 টাকা বিনিয়োগ করে x হেক্টর জমিতে ধান এবং y হেক্টর জমিতে গম চাষ করে তিনি সর্বোচ্চ জমি চাষ করতে চান।

৯৫. নিচের কোনটি অভীষ্ট ফাংশন? (সহজ)

ক $1200x + 800y$

খ $4x + 6y$

গ $1200x + 800y \leq 4800$

ঘ $x + y$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: যেহেতু সর্বোচ্চ জমি চাষ করবেন তাই জমির পরিমাণই সর্বোচ্চ হতে হবে।

৯৬. **নিচের কোনটি মোট খরচের শর্ত?** (মধ্যম)

ক) $3x + 2y < 12$ খ) $3x + 2y \le 12$
গ) $3x + 2y \ge 12$ ঘ) $3x + 2y > 12$ **খ**

ব্যাখ্যা: $3x + 2y \le 12$
তার সর্বোচ্চ খরচের পরিমাণ 4800 টাকা এবং প্রতি হেক্টর জমিতে ধানের জন্য খরচ 1200 টাকা ও গমের জন্য খরচ 800 টাকা।
$\therefore 1200x + 800y \le 4800$
বা, $3x + 2y \le 12$

৯৭. **নিচের কোনটি অঋণাত্মক সীমবদ্ধতা?** (মধ্যম)

ক) $x \le 0, y \le 0$ খ) $x > 0, y > 0$
গ) $x \ge 0, y \ge 0$ ঘ) $x < 0, y < 0$ **গ**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (৯৮ ও ৯৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

এক ব্যক্তি তার বাগানে কমপক্ষে 12টি নারকেলের চারা এবং 8টি আমের চারা লাগাতে চান। প্রতিটি নারকেলের ও আমের চারার মূল্য যথাক্রমে 20 টাকা ও 30 টাকা। ঐ ব্যক্তি 600 টাকার বেশি ব্যয় করবেন না।

৯৮. **সর্বাধিক চারা লাগানোর শর্তে অভীষ্ট ফাংশন নিচের কোনটি?** (সহজ)

ক) $z = 12x + 8y$ খ) $z = x + y$
গ) $z = 20x + 30y$ ঘ) $z = 30x + 20y$ **খ**

৯৯. **অভীষ্ঠ ফাংশনের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত নিচের কোনগুলি?** (মধ্যম)

ক) $20x + 30y \le 600, x \ge 12, y \ge 8, x, y \ge 0$
খ) $20x + 30y \le 60, x \le 12, y \le 12, x, y \ge 0$
গ) $20x + 30y \le 0, x \le 12, y \ge 8, x, y \ge 0$
ঘ) $20x + 30y \le 600, x \ge 12, y \le 8, x, y \ge 0$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (১০০ ও ১০১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

এক ব্যক্তি সর্বোচ্চ 100 টাকা ব্যয় করে কিছু সংখ্যক কলম ও পেন্সিল কিনতে চান। প্রতিটি কলম ও পেন্সিলের মূল্য যথাক্রমে 12 টাকা ও 8 টাকা। তিনি অন্তত একটি কলম কিনবেন কিন্তু 8 টির বেশি পেন্সিল কিনবেন না।

১০০. **সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কেনার শর্তে অভীষ্ঠ ফাংশন কোনটি?** (সহজ)

ক) $z = 12x + 8y$ খ) $z = x + y$
গ) $z = x + 8y$ ঘ) $z = 8x + 12y$ **খ**

১০১. **x সংখ্যক কলম ও y সংখ্যক পেন্সিল কেনার জন্য প্রয়োজনীয় শর্তাবলী কোনটি?** (মধ্যম)

ক) $12x + 8y \le 100, x \ge 1, y \le 8, x \ge 0, y \ge 0$
খ) $8x + 12y \le 100, x \ge 1, y \le 8, x \ge 0, y \ge 0$
গ) $12x + 8y \le 100, x \le 1, y \ge 8, x \ge 0, y \ge 0$
ঘ) $8x + 12y \le 100, x \le 1, y \ge 8, x \ge 0, y \ge 0$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (১০২ ও ১০৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য x সংখ্যক ফ্রিজ এবং y সংখ্যক টেলিভিশন কিনবেন। ফ্রিজ ও টেলিভিশনের ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 180 ডলার ও 120 ডলার। প্রতি ফ্রিজ ও টেলিভিশন সেটে লাভ যথাক্রমে 40 ডলার ও 25 ডলার। তার দোকানে 130টির বেশি ফ্রিজ ও টেলিভিশন রাখা যায় না।

১০২. **সর্বোচ্চ লাভ করতে হলে অভীষ্ট ফাংশন কোনটি?** (সহজ)

ক) $z_{max} = x + y$
খ) $z_{max} = 40x + 25y$
গ) $z_{max} = 180x + 25y$
ঘ) $z_{max} = 180x + 120y$ **খ**

১০৩. **সর্বাধিক 10,800 ডলার বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ লাভ করতে শর্তসমূহ কোনগুলি?** (মধ্যম)

ক) $180x + 120y \ge 10,800, x + y \le 130, x \ge 0, y \ge 0$
খ) $180x + 120y \ge 10,800, x + y \ge 130, x \ge 0, y \ge 0$
গ) $180x + 120y \le 10,800, x + y \le 130, x \ge 0, y \ge 0$
ঘ) $180x + 120y \le 10,800, x + y \ge 130, x \ge 0, y \ge 0$ **গ**

নিচের তথ্য হতে (১০৪-১০৬)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

দেওয়া আছে: $z = 2x + 3y$
শর্ত: $x + 2y \le 10, x + y \le 6, x \le 4, x \ge 0, y \ge 0$

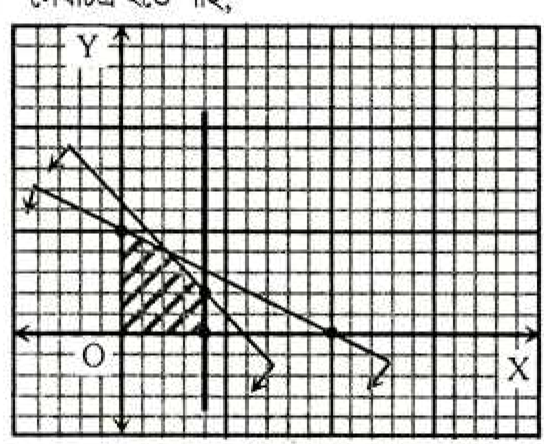
১০৪. **উপরের শর্তের প্রেক্ষিতে সম্ভাব্য কৌণিক চিহ্নগুলি কোনগুলি?** (মধ্যম)

ক) (0, 0), (4, 0), (4, 2), (2, 4), (0, 5)
খ) (4, 0), (4, 2), (2, 4)
গ) (4, 0), (4, 2), (2, 4), (0, 5)
ঘ) (0, 0), (4, 0), (4, 2), (2, 4) **ক**

ব্যাখ্যা: $x + 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1; x = 4;$

লেখচিত্র হতে পাই,



ছায়াঘেরা অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুসমূহ—
(0, 0), (4, 0), (4, 2), (2, 4), (0, 5)

১০৫. **z এর সর্বনিম্ন মান কোনটি?** (মধ্যম)

ক) 0 খ) −3
গ) −2 ঘ) −5 **ক**

ব্যাখ্যা: $z = 2x + 3y$; $z_{(0, 0)} = 0$; $z_{(4, 0)} = 2.4 + 3.0 = 8$;
$z_{(4, 2)} = 2.4 + 3.2 = 14$; $z_{(2, 4)} = 2.2 + 3.4 = 16$;
$z_{(0, 5)} = 2.0 + 3.5 = 15$; $z_{min} = 0$

১০৬. z এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 14 খ 16

গ 8 ঘ 15 **খ**

$z = 2x + 3y$ এবং $2x + 4y \leq 20$, $2x + 2y \leq 12$, $4x \leq 16$, $x, y \geq 0$ হলে

নিচের (১০৭ ও ১০৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

১০৭. অসমতাগুলি হতে প্রাপ্ত কৌণিক বিন্দুগুলির মধ্যে কোন বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ? (মধ্যম)

ক (2, 4) খ (4, 2)

গ (4, 0) ঘ (0, 5) **ক**

ব্যাখ্যা: অসমতাগুলি সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে লেখচিত্রে স্থাপন করলে প্রাপ্ত কৌণিকবিন্দুগুলি হলো (0, 5), (4, 0), (2, 4), (4, 2)

১০৮. সর্বোচ্চ মানটি কত? (মধ্যম)

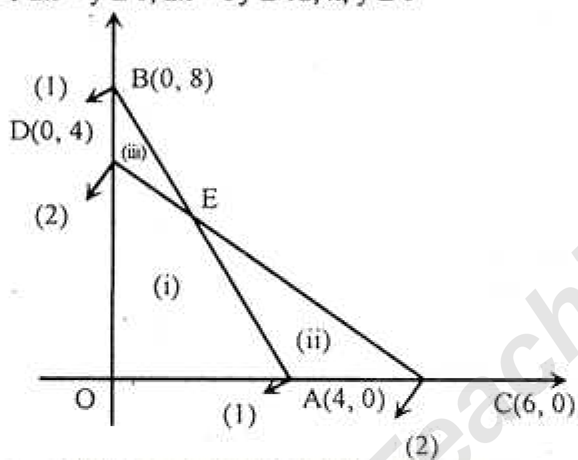
ক 14 খ 12

গ 16 ঘ 18 **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১০৯ ও ১১০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$z = (3x + 2y)$ এর সর্বোচ্চকরণ কর।

শর্ত: $2x + y \leq 8$, $2x + 3y \leq 12$, $x, y \geq 0$



১০৯. কোন বিন্দুতে অভীষ্ট মান বিদ্যমান? (সহজ)

ক A খ B

গ D ঘ E **ঘ**

১১০. অভীষ্ট ফাংশনের মান কত? (মধ্যম)

ক 0 খ 12

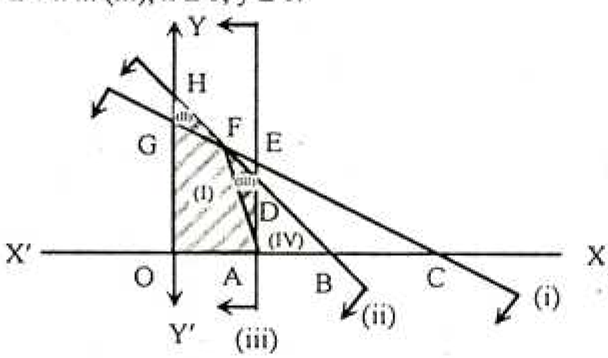
গ 13 ঘ 8 **গ**

উদ্দীপকের আলোকে (১১১-১১৩) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$z = 2x + 3y$ এর সর্বোচ্চকরণ

শর্ত: $x + 2y \leq 10$.. (i), $x + y \leq 6$ ...... (ii)

$x \leq 4$ ...... (iii), $x \geq 0$, $y \geq 0$.



১১১. চিত্রের চিহ্নিত সমাধানের অনুকূল এলাকা নিচের কোনটি? (সহজ)

ক I খ II

গ III ঘ IV **ক**

১১২. নিচের কোন বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান বিদ্যমান? (মধ্যম)

ক D খ E

গ F ঘ H **গ**

ব্যাখ্যা: $A(4, 0) \therefore z = 2 \times 4 + 3 \times 0 = 8$

$D(4, 2) \therefore z = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$

$F(2, 4) \therefore z = 2 \times 2 + 3 \times 4 = 16$

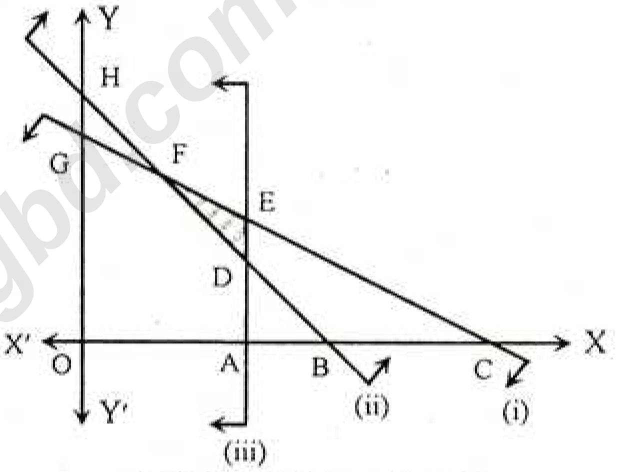
$G(0, 5) \therefore z = 2 \times 0 + 3 \times 5 = 15$

১১৩. (ii) শর্তটি $x + y \geq 6$ হলে অভীষ্ট ফাংশনের মান কত? (কঠিন)

ক 14 খ 16

গ 17 ঘ 18 **গ**

ব্যাখ্যা:



সমাধানের অনুকূল এলাকা DEF

$\therefore$ D (4,2) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$

E (4,3) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 3 \times 3 = 17$

F (2,4) বিন্দুতে $z = 2 \times 2 + 3 \times 4 = 16$

নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং (১১৪ ও ১১৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

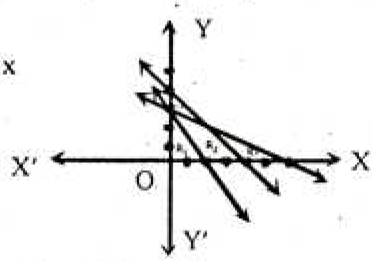
সর্বোচ্চকরণ : $z = 2y - x$

$x + y \leq 4$

$x + 2y \leq 6$

$3x + 2y \geq 6$

$x, y \geq 0$



১১৪. চিত্রে অনুকূল এলাকা কোনটি? (মধ্যম)

ক R_1 খ R_2

গ R_3 ঘ R_4 **খ**

১১৫. অভীষ্ট ফাংশনটির কাঙ্ক্ষিত মান কোনটি? (কঠিন)

ক 2 খ 4

গ 6 ঘ 8 **গ**

অধ্যায়-৩: জটিল সংখ্যা

প্রশ্ন ▶১ $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 + 2i, a = p\omega^2 + q + r\omega$ এবং $b = p\omega + q + r\omega^2$, যেখানে ω এককের ঘনমূলগুলির একটি জটিল ঘনমূল। *[কু. বো. ১৭]*

ক. $\frac{1}{2-i}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $\overline{z_1 - z_2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের সাহায্যে $a^3 + b^3 = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2p = q + r, 2q = r + p$ এবং $2r = p + q$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{4-i^2} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 1 + 2i$

$\therefore z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 - 2i = 1 + i$

$\therefore \overline{z_1 - z_2} = \overline{1 + i} = 1 - i$

মনে করি, $\sqrt{1-i} = x - iy$

$\Rightarrow 1 - i = x^2 - i \cdot 2xy + i^2y^2$

$\Rightarrow 1 - i = x^2 - y^2 - i \cdot 2xy$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^2 - y^2 = 1$ ...... (i)

এবং $-2xy = -1 \Rightarrow 2xy = 1$ ...... (ii)

এখন, $x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$

$= \sqrt{1^2 + (2xy)^2} = \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ ...... (iii)

এখন, (i) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2x^2 = 1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$

$\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} + 1}$

আবার, (iii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $2y^2 = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$

$\therefore y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} - 1}$

$\therefore \sqrt{1-i} = x - iy$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1})$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $a = p\omega^2 + q + r\omega$

$b = p\omega + q + r\omega^2$

প্রদত্ত সমীকরণ, $a^3 + b^3 = 0$

$\Rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$

$\Rightarrow (a + b)(\{a^2 + (\omega + \omega^2)ab + \omega^3b^3\} = 0$

$\Rightarrow (a + b)\{a^2 + \omega ab + \omega^2 ab + \omega^3b^3\} = 0$

$\Rightarrow (a + b)\{a(a + \omega b) + \omega^2b(a + \omega b)\} = 0$

$\Rightarrow (a + b)(a + \omega b)(a + \omega^2 b) = 0$

হয়, $a + b = 0$

$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega + q + r\omega^2 = 0$

$\Rightarrow p(\omega + \omega^2) + 2q + r(\omega + \omega^2) = 0$

$\Rightarrow 2q - p - r = 0$

$\therefore 2q = r + p$

অথবা, $a + \omega b = 0$

$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega^2 + q\omega + r\omega^3 = 0$

$\Rightarrow 2p\omega^2 + q(1 + \omega) + r(\omega + 1) = 0$

$\Rightarrow 2p\omega^2 - q\omega^2 - r\omega^2 = 0$

$\Rightarrow 2p - q - r = 0$

$\therefore 2p = q + r$

অথবা, $a + b\omega^2 = 0$

$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega^3 + q\omega^2 + r\omega^4 = 0$

$\Rightarrow p\omega^2 + p + q + q\omega^2 + r\omega + r\omega = 0$

$\Rightarrow p(1 + \omega^2) + q(1 + \omega^2) + 2r\omega = 0$

$\Rightarrow -p\omega - q\omega + 2r\omega = 0$

$\Rightarrow 2r - p - q = 0$

$\therefore 2r = p + q$

সুতরাং, $2p = q + r, 2q = r + p$ এবং $2r = p + q$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶২ নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ্য কর : *[চ. বো. ১৭]*

$z = x + iy; |z + 5| + |z - 5| = 15$ .... (i)

$\frac{2x+3}{x-3} < \frac{x+3}{x-1}$ .... (ii)

ক. এককের ঘনমূলসমূহ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপক-১ হতে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপক-২ এ বর্ণিত অসমতাটির সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$ তাহলে, $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore$ $x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$= \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এখন, $|z + 5| + |z - 5| = 15$

বা, $|x + iy + 5| + |x + iy - 5| = 15$

বা, $|x + 5 + iy| + |x - 5 + iy| = 15$

বা, $\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 15$

বা, $\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 15 - \sqrt{(x-5)^2 + y^2}$

বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 = 225 + (x^2 - 10x + 25 + y^2)$

$- 30\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 225 - x^2 + 10x - 25 - y^2$

$= -30\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $20x - 225 = -30\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $4x - 45 = -6\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $16x^2 - 360x + 2025 = 36(x^2 - 10x + 25 + y^2)$

বা, $16x^2 - 360x + 2025 = 36x^2 - 360x + 900 + 36y^2$

বা, $20x^2 + 36y^2 = 1125$

বা, $\frac{x^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1$

যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ প্রদত্ত অসমতা $\frac{2x+3}{x-3} < \frac{x+3}{x-1}$

বা, $\frac{2x+3}{x-3} - \frac{x+3}{x-1} < 0$

বা, $\frac{(2x^2 + 3x - 2x - 3) - (x^2 - 9)}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\frac{2x^2 + x - 3 - x^2 + 9}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\frac{x^2 + x + 6}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\frac{x^2 + 2.\frac{1}{2}.x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 - \frac{1}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0$ ……… (i)

এখানে, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0$

∴ $(x-3)$ ও $(x-1)$ এর মধ্যে একটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটির চিহ্ন ঋণাত্মক হলে (i) অসমতাটির শর্ত সিদ্ধ করে।

শর্ত	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-3)$ এর চিহ্ন	$(x-3)(x-1)$ এর চিহ্ন
$x < 1$	–	–	+
$1 < x < 3$	+	–	–
$x > 3$	+	+	+

∴ (i) অসমতাটি সত্য হবে যদি $1 < x < 3$ হয়।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $1 < x < 3$

সংখ্যারেখা : –1 0 1 2 3 4

প্রশ্ন ▶ ৩ দৃশ্যকল্প-১ : $x + iy = 2e^{-i\theta}$ [য. বো. ১৭]

দৃশ্যকল্প-২ : $F = y - 2x$

শর্তগুলি : $x + 2y \leq 6, x + y \geq 4, x, y \geq 0$

ক. $z = x + iy$ হলে, $|z + i| = |\bar{z} + 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = 4$. ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি হতে লৈখিক পদ্ধতিতে F এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $z = x + iy$

∴ $|z + i| = |\bar{z} + 2|$

বা, $|x + iy + i| = |\overline{x + iy} + 2|$

বা, $|x + iy + i| = |x - iy + 2|$

বা, $|x + i(y + 1)| = |(x + 2) - iy|$

বা, $\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$

বা, $x^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + y^2$

বা, $x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2$

বা, $2y + 1 = 4x + 4$

বা, $4x - 2y + 3 = 0$

যা নির্ণেয় সরলরেখার সঞ্চার পথ। **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $x + iy = 2e^{-i\theta}$

বা, $x + iy = 2(\cos\theta + i \sin\theta)$

বা, $x + iy = 2\cos\theta + 2i \sin\theta$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x = 2 \cos\theta$ এবং $y = 2\sin\theta$

এখন, $x^2 + y^2 = (2\cos\theta)^2 + (2 \sin\theta)^2$
$= 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$
$= 4 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$

∴ $x^2 + y^2 = 4$ **(প্রমাণিত)**

গ দৃশ্যকল্প ২ হতে পাই, $F = y - 2x$

শর্তগুলি : $x + 2y \leq 6, x + y \geq 4, x, y \geq 0$

F এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা চিহ্নিত করি।

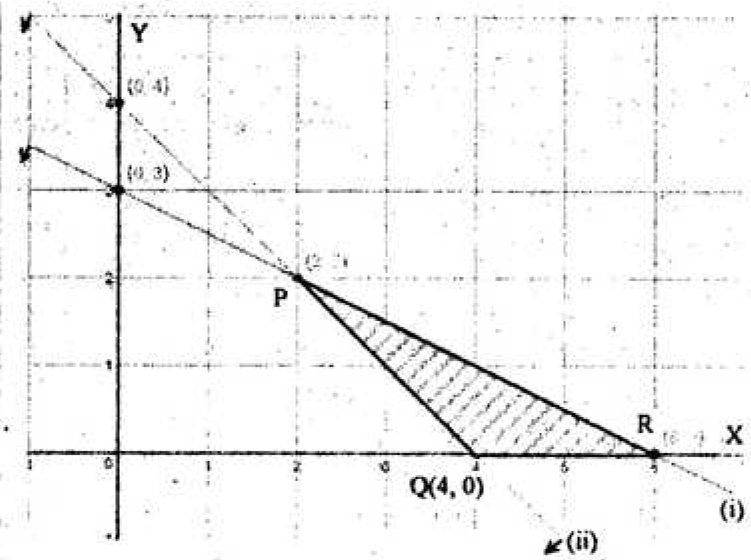
আমরা পাই, $x + 2y = 6$

বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$ ……… (i)

$x + y = 4$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (ii)

$x = 0$ ……… (iii)

$y = 0$ ……… (iv)



লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূল বিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

(ii) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

আবার (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু P(2, 2)

(iv) ও (ii) এর ছেদবিন্দু Q(4, 0)

(iv) ও (i) এর ছেদবিন্দু R (6, 0)

∴ নির্ণেয় কৌণিক বিন্দু P(2, 2), Q(4, 0) ও R(6, 0)

এখন P(2, 2) বিন্দুতে $F = 2 - 2.2 = 2 - 4 = -2$

Q (4, 0) বিন্দুতে $F = 0 - 2.4 = 0 - 8 = -8$

R (6, 0) বিন্দুতে $F = 0 - 2.6 = 0 - 12 = -12$

∴ নির্ণেয় সর্বোচ্চ মান –2 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ $f(x) = |x - 3|$ [য. বো. ১৭]

$g(x) = p + qx + rx^2$

ক. $15 + 8i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x) < \frac{1}{7}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|x^2 - 9| < \frac{43}{49}$. ৪

গ. $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে,
$\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^x pqr$ যেখানে ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং $a = x = 3$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $p = 15 + 8i$

∴ $\sqrt{p} = \pm\sqrt{15 + 8i} = \pm\sqrt{16 + 8i - 1}$
$= \pm\sqrt{4^2 + 2.4.i + i^2} = \pm\sqrt{(4 + i)^2} = \pm (4 + i)$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm (4 + i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = |x - 3|$ এবং $f(x) < \frac{1}{7}$

∴ $|x - 3| < \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{7} < x - 3 < \frac{1}{7}$

$\Rightarrow -\frac{1}{7} + 3 < x - 3 + 3 < \frac{1}{7} + 3$ [3 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{-1 + 21}{7} < x < \frac{1 + 21}{7}$

$\Rightarrow \frac{20}{7} < x < \frac{22}{7}$

$\Rightarrow \frac{400}{49} < x^2 < \frac{484}{49}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{400}{49} - 9 < x^2 - 9 < \frac{484}{49} - 9$ ['– 9' যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{400 - 441}{49} < x^2 - 9 < \frac{484 - 441}{49}$

$\Rightarrow \frac{-41}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49}$

$\Rightarrow \frac{-43}{49} < \frac{-41}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49}$

$\Rightarrow \frac{-43}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49}$

∴ $|x^2 - 9| < \frac{43}{49}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = p + qx + rx^2$

$\therefore\ g(\omega) = p + q\omega + r\omega^2$

এবং $g(\omega^2) = p + q\omega^2 + r\omega^4 = p + q\omega^2 + r\omega$

এখন, $\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3$

$= (p + q\omega + r\omega^2)^3 + (p + q\omega^2 + r\omega)^3$

ধরি, $p + q\omega + r\omega^2 = x$ এবং $p + q\omega^2 + r\omega = y$

বামপক্ষ $= x^3 + y^3$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= (x + y)\{x^2 + (-1)xy + y^2\}$

$= (x + y)\{x^2 + (\omega^2 + \omega)xy + y^2\}$ $[\because \omega^2 + \omega + 1 = 0]$

$= (x + y)(x^2 + \omega^2xy + \omega xy + y^2)$

$= (x + y)(x^2 + \omega xy + \omega^2xy + y^2)$

$= (x + y)\left\{x(x + \omega y) + \omega^2 y\left(x + \frac{y}{\omega^2}\right)\right\}$

$= (x + y)\{x(x + \omega y) + \omega^2y(x + \omega y)\}$ $\left[\because \omega^3 = 1 \therefore \omega = \frac{1}{\omega^2}\right]$

$= (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y)$

$\therefore\ x + y = p + q\omega + r\omega^2 + p + q\omega^2 + r\omega$

$= 2p + q(\omega + \omega^2) + r(\omega^2 + \omega) = 2p - q - r$

$\therefore\ x + \omega y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega + q\omega^3 + r\omega^2$

$= p(1 + \omega) + q(\omega + 1) + 2r\omega^2$

$= p(-\omega^2) + q(-\omega^2) + 2r\omega^2 = \omega^2(2r - p - q)$

$\therefore\ x + \omega^2y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega^4 + r\omega^3$

$= p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega + r$

$= p(1 + \omega^2) + 2q\omega + r(1 + \omega^2)$

$= p(-\omega) + 2q\omega + r(-\omega) = \omega(2q - p - r)$

$\therefore\ (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2y)$

$= (2p - q - r)\omega^2(2r - p - q)\omega\,(2q - p - r)$

$= \omega^3\,(2p - q - r)(2r - p - q)(2q - p - r)$

$= \{2p - (q + r)\}\{2r - (p + q)\}\{2q - (p + r)\}$

$= \{2p - (-p)\}\{2r - (-r)\}\{2q - (-q)\}$ $[\because p + q + r = 0]$

$= 3p.3r.3q = 27pqr = 3^3\,pqr$

$= a^x pqr$ $[\because a = x = 3]$

= ডানপক্ষ

$\therefore\ \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^x pqr$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $f(x) = 2x - 1$, যখন $x \in \mathbb{R}$ এবং $A = \sqrt[4]{-16}$,
$B = a^2 + i\sqrt{x^4 - a^4}$, যখন i হচ্ছে কাল্পনিক রাশির একক।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. পরমমান চিহ্নের সাহায্যে $-2 < f(x) < 8$ অসমতাটি প্রকাশ কর। ২

খ. A এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = 2x - 1$

$\therefore\ -2 < f(x) < 8$

বা, $-2 < 2x - 1 < 8$

বা, $-2 - 3 < 2x - 1 - 3 < 8 - 3$ [প্রত্যেক পার্শ্বে (– 3) যোগ করে পাই]

বা, $-5 < 2x - 4 < 5$

$\therefore\ |2x - 4| < 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \sqrt[4]{-16}$

$= (-16)^{\frac{1}{4}} = \{(-1)16\}^{\frac{1}{4}}$

$= (i^2 . 4^2)^{\frac{1}{4}}$

$= \{(\pm 4i)^2\}^{\frac{1}{4}}$

$= (\pm 4i)^{\frac{1}{2}}$

$= \{2(\pm 2i)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{2\,(1 \pm 2i - 1)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{2\,(1 \pm 2i + i^2)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{(\pm\sqrt{2})^2\,(1 \pm i)^2\}^{\frac{1}{2}}$

$= [\{\pm\sqrt{2}(1 \pm i)\}^2]^{\frac{1}{2}}$

$= \pm\sqrt{2}(1 \pm i)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = a^2 + i\sqrt{x^4 - a^4}$

$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2i\sqrt{x^4 - a^4})$

$= \frac{1}{2}\{(x^2 + a^2) - (x^2 - a^2) + 2i\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)}\}$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{x^2 + a^2})^2 + 2i\sqrt{(x^2 + a^2)}\sqrt{(x^2 - a^2)} + (i\sqrt{x^2 - a^2})^2\}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + a^2} + i\sqrt{x^2 - a^2})^2$

$\therefore$ B এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2 + a^2} + i\sqrt{x^2 - a^2})$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $z = \frac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta} = x + iy$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. $-3 - 4i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $(z - 3i)$ এর আর্গুমেন্ট π এবং $|z + 6| = 5$ হয় তবে z নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $2(x^2 + y^2) = 3x - 1$ ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-3 - 4i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{-3 - 4i}$

$= \pm\sqrt{1 - 4i - 4}$

$= \pm\sqrt{1 - 2.2i.1 + (2i)^2}$

$= \pm\sqrt{(1 - 2i)^2}$

$= \pm(1 - 2i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\arg(z - 3i) = \pi$

বা, $\arg(x + iy - 3i) = \pi$ $[\because z = x + iy]$

বা, $\arg\{x + i(y - 3)\} = \pi$

বা, $\tan^{-1}\left(\frac{y - 3}{x}\right) = \pi$

বা, $\frac{y - 3}{x} = \tan\pi$ বা, $\frac{y - 3}{x} = 0$ বা, $y - 3 = 0$ $\therefore\ y = 3$

এবং $|z + 6| = 5$

বা, $|x + iy + 6| = 5$

বা, $|(x + 6) + iy| = 5$

বা, $\sqrt{(x + 6)^2 + y^2} = 5$

বা, $x^2 + 12x + 36 + y^2 = 25$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 12x + 36 + 3^2 = 25$ $[\because y = 3]$

বা, $x^2 + 12x + 20 = 0$

বা, $x^2 + 10x + 2x + 20 = 0$

বা, $x(x + 10) + 2(x + 10) = 0$

বা, $(x + 10)(x + 2) = 0$

$\therefore\ x = -2, -10$

$x = -2$ এবং $y = 3$ হলে $z = x + iy$

$\therefore\ z = -2 + 3i$ **(Ans.)**

আবার, $x = -10$ এবং $y = 3$ হলে, $z = -10 + 3i$ **(Ans.)**

গ এখানে, $x + iy = \frac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta}$

$= \frac{2(3 + \cos\theta - i\sin\theta)}{(3 + \cos\theta + i\sin\theta)(3 + \cos\theta - i\sin\theta)}$

$= \frac{6 + 2\cos\theta - i2\sin\theta}{(3 + \cos\theta)^2 - i^2\sin^2\theta}$

$= \frac{6 + 2\cos\theta - i2\sin\theta}{9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$= \frac{2(3 + \cos\theta) - i2\sin\theta}{9 + 6\cos\theta + 1}$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \frac{2(3 + \cos\theta)}{10 + 6\cos\theta} - \frac{i2\sin\theta}{2(5 + 3\cos\theta)}$

$= \frac{2(3 + \cos\theta)}{2(5 + 3\cos\theta)} - \frac{i2\sin\theta}{2(5 + 3\cos\theta)}$

$= \frac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta} + i\,\frac{(-\sin\theta)}{5 + 3\cos\theta}$

$\therefore\ x = \frac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta}$ .... (i) এবং $y = \frac{-\sin\theta}{5 + 3\cos\theta}$ .... (ii)

বামপক্ষ = $2(x^2+y^2)$

$= 2\left\{\left(\frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\theta}{5+3\cos\theta}\right)^2\right\}$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$= 2\left\{\frac{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}\right\}$

$= 2\times\left\{\frac{9+6\cos\theta+1}{(5+3\cos\theta)^2}\right\}$

$= 2\times\frac{(10+6\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2}$

$= 2\times\frac{2(5+3\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2}$

$= \frac{4}{5+3\cos\theta}$

ডানপক্ষ = $3x-1 = 3\times\frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta} - 1$

$= \frac{9+3\cos\theta-5-3\cos\theta}{5+\cos\theta}$

$= \frac{4}{5+3\cos\theta}$

$\therefore\ 2(x^2+y^2) = 3x-1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭ $z = x+iy$ এবং এককের একটি জটিল ঘনমূল ω।

[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

ক. $|2z-1| = |z-2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 1$ এবং $a^2+b^2 = 1$ হলে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{\bar{z}}{z} = a-ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। যেখানে, $a, b \in \mathbb{R}$। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\omega^n + (\omega^2)^n = 2$, যখন n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং -1, যখন n অপর কোনো পূর্ণসংখ্যা। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $|2z-1| = |z-2|$

বা, $|2(x+iy)-1| = |x+iy-2|$

বা, $|(2x-1)+2iy| = |(x-2)+iy|$

বা, $\sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$

বা, $(2x-1)^2+4y^2 = (x-2)^2+y^2$

বা, $4x^2-4x+1+4y^2 = x^2-4x+4+y^2$

বা, $3x^2+3y^2 = 3$

$\therefore\ x^2+y^2 = 1$

যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = x+iy$

$\therefore\ \bar{z} = x-iy$

$x = 1$ হলে, $z = 1+iy$

এখন, $\frac{\bar{z}}{z} = a-ib$

বা, $\frac{1-ix}{1+ix} = a-ib$

বা, $\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{a-ib}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{1+ix-1+ix}{1+ix+1-ix} = \frac{1-a+ib}{1+a-ib}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2ix}{2} = \frac{(1-a+ib)(1+a+ib)}{(1+a-ib)(1+a+ib)}$

বা, $ix = \frac{(1+ib-a)(1+ib+a)}{(1+a)^2-(ib)^2}$

$= \frac{(1+ib)^2-a^2}{1+2a+a^2-i^2b^2}$

$= \frac{1+2ib+i^2b^2-a^2}{1+2a+a^2+b^2}$

$= \frac{1+2ib-(a^2+b^2)}{1+2a+a^2+b^2}$

$= \frac{1+2ib-(a^2+b^2)}{1+2a+a^2+b^2}$

$= \frac{1+2ib-1}{1+2a+1}$ [$\because a^2+b^2 = 1$]

$= \frac{2ib}{2(1+a)} = \frac{ib}{1+a}$

বা, $x = \frac{b}{1+a}$, যা x এর একটি বাস্তব মান। **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত রাশি = $\omega^n + (\omega^2)^n = \omega^n + \omega^{2n}$

এখানে $n = 3m$ হলে,

প্রদত্ত রাশি = $\omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1+1 = 2$

$n = 3m+1$ হলে,

প্রদত্ত রাশি = $(\omega)^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= (\omega^3)^m.\omega + (\omega^3)^{2m}.\omega^2 = \omega+\omega^2 = -1$

$n = 3m+2$ হলে,

প্রদত্ত রাশি = $(\omega)^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$

$= (\omega^3)^m.\omega^2 + (\omega^3)^{2m}.\omega^4$

$= \omega^2+\omega = -1$

অর্থাৎ, n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে, প্রদত্ত রাশিটি = 2 এবং n এর মান অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে, রাশিটি = -1 **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৮ ω একটি এককের জটিল ঘনমূল এবং $x = a+b$, $y = a\omega+b\omega^2$, $z = a\omega^2+b\omega$।

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]

ক. বর্গমূল নির্ণয় কর : $-7+24i$, $i = \sqrt{-1}$

খ. দেখাও যে, $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10}) = 9$

গ. দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2 = 6ab$।

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-7+24i$ এর বর্গমূল = $\pm\sqrt{-7+24i}$

$= \pm\sqrt{3^2+2.3.4i+(4i)^2}$

$= \pm\sqrt{(3+4i)^2}$

$= \pm(3+4i)$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ = $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})$

$= (1-\omega^2)(1-\omega^3.\omega)(1-\omega^3.\omega^3.\omega^2)(1-\omega^3.\omega^3.\omega^3.\omega)$

$= (1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= (1-\omega^2)^2(1-\omega)^2$

$= (1-2\omega^2+\omega^4)(1-2\omega+\omega^2)$

$= (1-2\omega^2+\omega)(1-2\omega+\omega^2)$

$= (1+\omega+\omega^2-3\omega^2)(1+\omega+\omega^2-3\omega)$

$= (-3\omega)(-3\omega^2) = 9\omega^3$

$= 9$ [$\because \omega^3 = 1$]

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x = a+b$

বা, $x^2 = a^2+2ab+b^2$ ……… (i)

$y = a\omega+b\omega^2$

বা, $y^2 = (a\omega+b\omega^2)^2$

বা, $y^2 = a^2\omega^2+2ab\omega^3+b^2\omega^4$

$\therefore\ y^2 = a^2\omega^2+2ab+b^2\omega$ [$\because \omega^3 = 1$] ……… (ii)

এবং $z = a\omega^2+b\omega$

বা, $z^2 = (a\omega^2+b\omega)^2$

বা, $z^2 = a^2\omega^4+2ab\omega^3+b^2\omega^2$

$\therefore\ z^2 = a^2\omega+2ab+b^2\omega^2$ [$\because \omega^3 = 1$] ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$x^2+y^2+z^2$

$= a^2(1+\omega^2+\omega)+6ab+b^2(1+\omega+\omega^2)$

$= a^2.0+6ab+b^2.0$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$]

$\therefore\ x^2+y^2+z^2 = 6ab$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৯ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{1 - ix}{1 + ix}$

দৃশ্যকল্প-২: F_1 ও F_2 দুই ধরনের খাদ্যের প্রতি কেজিতে ভিটামিন C ও D পাওয়া যায় নিম্নরূপ:

খাদ্যের নাম	ভিটামিন-C	ভিটামিন-D	প্রতি এককের মূল্য (টাকায়)
F_1	8 একক	10 একক	70
F_2	12 একক	6 একক	90
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32 একক	22 একক	

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $(-1+\sqrt{-3})^7 + (-1-\sqrt{-3})^7$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে যদি $p^2 + q^2 = 1$ হয় তাহলে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $f(x) = p - iq$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন C ও D এর চাহিদা মেটানো যায় তা নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $(-1+\sqrt{-3})^7 + (-1-\sqrt{-3})^7$

$$= \left\{\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^7 + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^7\right\}.2^7$$
$$= \{\omega^7 + (\omega^2)^7\}.2^7$$
$$= 2^7(\omega + \omega^2)$$
$$= 128.(-1)$$
$$= -128 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1 - ix}{1 + ix}$

শর্তমতে, $\frac{1 - ix}{1 + ix} = p - iq$ বা, $(1 + ix)(p - iq) = 1 - ix$

বা, $p + ipx - iq - i^2qx = 1 - ix$ বা, $p + ipx - iq + qx = 1 - ix$

বা, $ipx + qx + ix = 1 - p + iq$

বা, $x\{i(1 + p) + q\} = 1 - p + iq$

বা, $x = \frac{(1 - p + iq)}{i(1 + p) + q} = \frac{(1 - p + iq)\{q - i(1 + p)\}}{\{q + i(1 + p)\}\{q - i(1 + p)\}}$

$= \frac{q - pq + iq^2 - i + ip - i^2q - ip + ip^2 - i^2pq}{q^2 + (1 + p)^2}$

$= \frac{q - pq + iq^2 - i + q + ip^2 + pq}{q^2 + (1 + p)^2}$

$= \frac{2q + i(q^2 + p^2 - 1)}{q^2 + 1 + 2p + p^2} = \frac{2q + i(1 - 1)}{1 + 1 + 2p}$ [দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 = 1$]

$= \frac{2q}{2(1 + p)}$ $\therefore x = \frac{q}{1 + p}$

সুতরাং x এর একটি বাস্তব মান $f(x) = p - iq$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(দেখানো হলো)

গ মনে করি, F_1 প্রকারের x একক ও F_2 প্রকারের y একক খাদ্য প্রতিদিন ক্রয় করলে দৈনন্দিন প্রয়োজন মিটানো যাবে। তাহলে $x \geq 0$ ও $y \geq 0$

∴ অভীষ্ট ফাংশন, $z_{min} = 70x + 90y$

শর্তসমূহ: $8x + 12y \geq 32 \Rightarrow 2x + 3y \geq 8$

$10x + 6y \geq 22 \Rightarrow 5x + 3y \geq 11$

$x, y \geq 0$

এটিই নির্ণেয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

প্রথমে অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি,

$2x + 3y \geq 8$ এর অনুরূপ সমীকরণ $2x + 3y = 8$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{8/3} = 1$ ... ... (1)

$5x + 3y \geq 11$ এর অনুরূপ সমীকরণ $5x + 3y = 11$

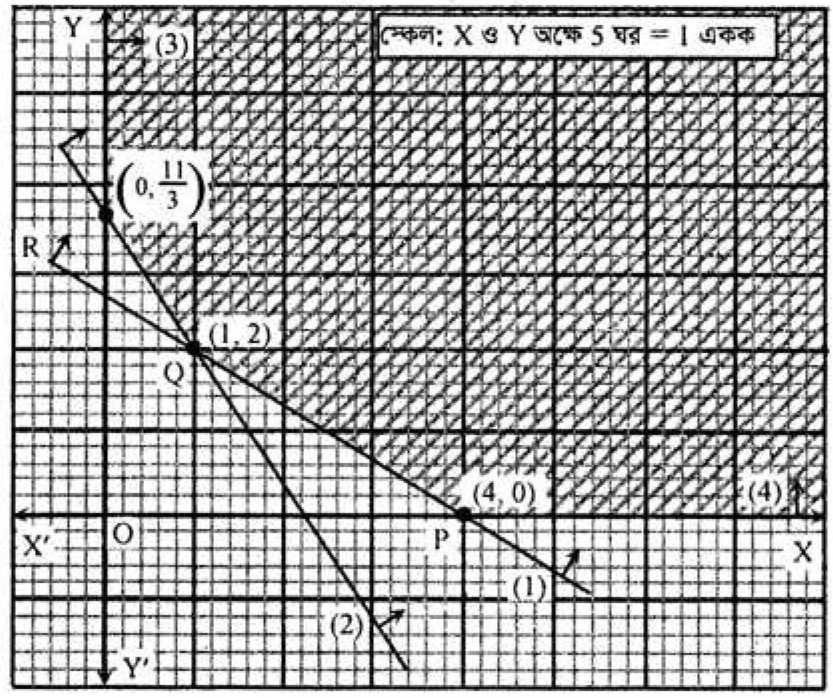
বা, $\frac{x}{11/5} + \frac{y}{11/3} = 1$ ... ... (2)

$x \geq 0, y \geq 0$ এর অনুরূপ সমীকরণ যথাক্রমে $x = 0$ ... ... (3)

এবং $y = 0$ ... ... (4)

এখন ছক কাগজে ক্ষুদ্র 5 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক বিবেচনা করে, মূলবিন্দু x ও y অক্ষ চিহ্নিত করে (1), (2), (3) ও (4) নং সমীকরণের লেখ অঙ্কন করি।

এবার $2x + 3y \geq 8$ অসমতায় মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 8$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রে ছক কাগজে (1) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হলো $2x + 3y \geq 8$ অসমতার সমাধান।



পুনরায় $5x + 3y \geq 11$ অসমতায় (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 11$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রেও ছক কাগজের (2) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হল $5x + 3y \geq 11$ অসমতার সমাধান।

$x \geq 0$ অসমতা দ্বারা y-অক্ষের ওপর এবং x-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়।

এবং $y \geq 0$ দ্বারা x-অক্ষের ওপর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়।

লেখচিত্রের ছায়াঘেরা এলাকাকে সম্ভাব্য সমাধান এলাকা বলা হয়।

লেখচিত্রানুসারে, এখানে সম্ভাব্য এলাকার তিনটি কৌণিক বিন্দু আছে।

কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে (1) ও (4) নং এর ছেদ বিন্দু (4, 0); (1) ও (2) নং এর ছেদ বিন্দু (1, 2); (2) ও (3) এর ছেদ বিন্দু $\left(0, \frac{11}{3}\right)$

মনে করি P(4, 0), Q(1, 2) এবং R$\left(0; \frac{11}{3}\right)$

কৌণিক বিন্দু	$z = 70x + 90y$
P(4,0)	$z = 70 \times 4 + 90 \times 0 = 280$
Q(1, 2)	$z = 70 \times 1 + 90 \times 2 = 250$
R$\left(0, \frac{11}{3}\right)$	$z = 70 \times 0 + 90 \times \frac{11}{3} = 330$

z এর এই মানগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট মানটি হলো 250

সুতরাং দৈনিক F_1 প্রকারের খাদ্য 1 একক ও F_2 প্রকারের খাদ্য 2 একক গ্রহণ করলে, সবচেয়ে কম খরচে প্রয়োজন মিটে যাবে।

প্রশ্ন ▶ ১০ $f(x, y) = x + iy$ *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. $x + y \leq 12, x \leq 4, y \geq 2, x \geq 0, y \geq 0$ দ্বারা আবদ্ধ সমাধান এলাকাটি ছক কাগজে চিহ্নিত কর। ২

খ. $|f(x - 4, y)| + |f(x + 4, y)| = 12$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $f(1, 0)$ এর ঘনমূলগুলির জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গের সমান। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ :**

$x + y \leq 12, x \leq 4, y \geq 2, x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি। অতএব আমরা পাই,

$x + y = 12$

বা, $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1$ ... ... (i)

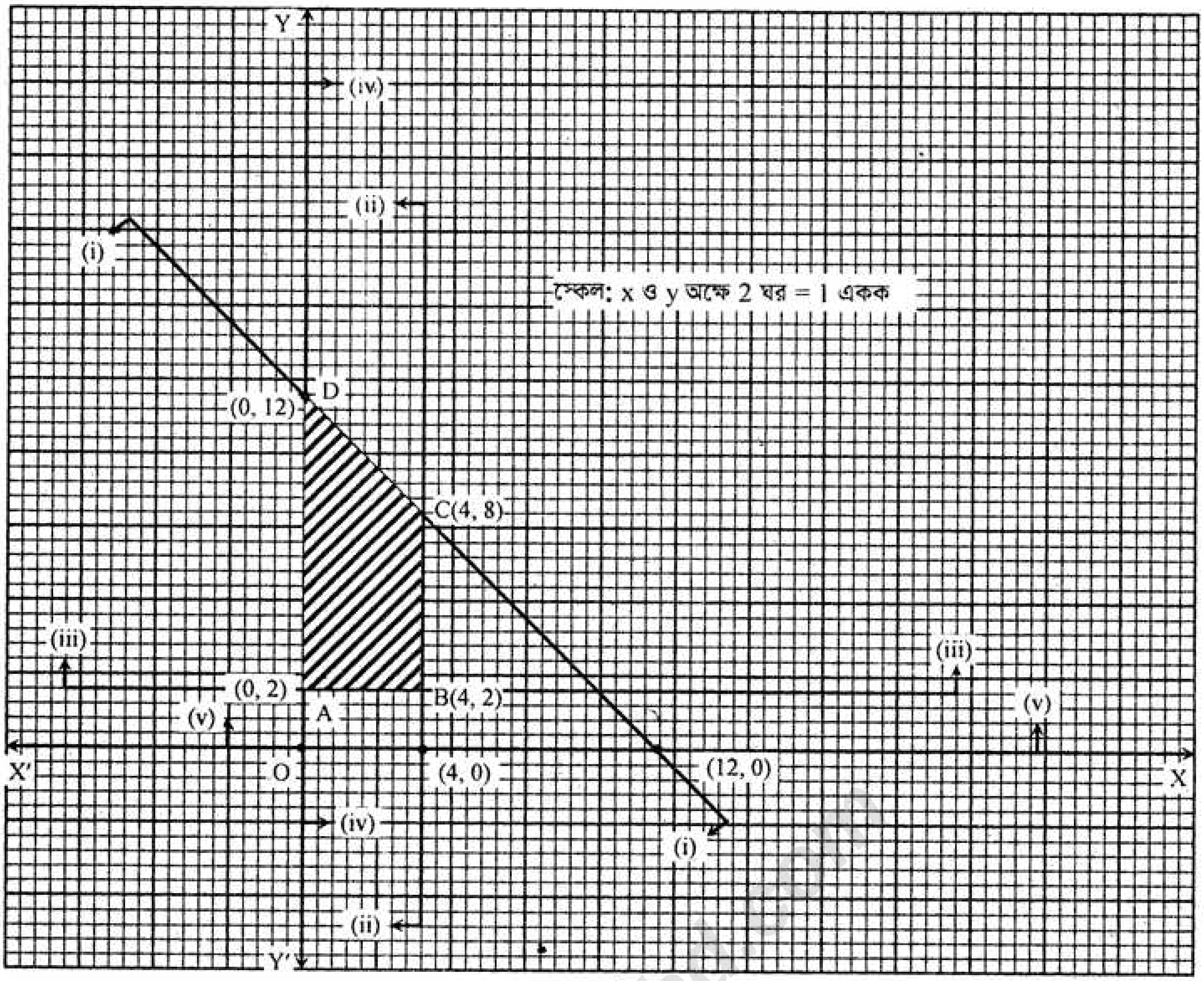
$x = 4$ ... ... (ii)

$y = 2$ ... ... (iii)

$x = 0$ ... ... (iv)

এবং $y = 0$ ... ... (v)

লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, সীমাবদ্ধতার শর্তানুসারে A, B, C, D দ্বারা আবদ্ধ এলাকাটি সমাধানের এলাকা।



খ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + iy$

$\therefore\ f(x-4, y) = x - 4 + iy$

এবং $f(x+4, y) = x + 4 + iy$

প্রদত্ত সমীকরণ, $|f(x-4, y)| + |f(x+4, y)| = 12$

$\Rightarrow |x - 4 + iy| + |x + 4 + iy| = 12$

$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 12$

$\Rightarrow \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 12 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 12^2 + (x-4)^2 + y^2 - 24\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = 144 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 24\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 24\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 144 - 16x$

$\Rightarrow 3\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 18 - 2x$

$\Rightarrow 9\{(x-4)^2 + y^2\} = 324 + 4x^2 - 72x$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 9(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 324 + 4x^2 - 72x$

$\Rightarrow 9x^2 - 72x + 144 + 9y^2 = 324 + 4x^2 - 72x$

$\Rightarrow 5x^2 + 9y^2 = 180$

$\Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ যা উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

$\therefore$ ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + iy$

$\therefore\ f(1, 0) = 1 + i\,.\,0 = 1$

এখন, $f(1, 0)$ বা 1 এর ঘনমূল বের করি।

মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$

বা, $x^3 = 1$

বা, $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore$ $x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$$

সুতরাং $f(1, 0)$ এর ঘনমূলগুলির জটিল মূলদ্বয় $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ এবং $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

মনে করি, $\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

তাহলে, $\omega^2 = \frac{1}{4}(1 - 2i\sqrt{3} - 3) = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

আবার, $\omega = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ হলে, $\omega^2 = \frac{1}{4}(1 + 2i\sqrt{3} - 3) = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

$\therefore$ $f(1, 0)$ এর ঘনমূলগুলির জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গের সমান। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১১ দৃশ্যকল্প-১: $p, q \in \mathbb{R}$ যথাক্রমে $p = 7$ এবং $q = 30\sqrt{2}$.

দৃশ্যকল্প-২: কোন একটি এলাকায় শরণার্থীদের পর্যালোচনা করে দেখা যায় তাদের শিশুরা বিভিন্ন অপুষ্টিতে ভুগছে। তাদের খাদ্য সরবরাহের জন্য F_1 ও F_2 দুই ধরনের খাদ্য নির্বাচন করা হলো। যাতে প্রতি কিলোতে ভিটামিন C ও ভিটামিন D প্রাপ্তির পরিমাণ নিম্নরূপ:

খাদ্য	ভিটামিন C	ভিটামিন D	কিলো প্রতি মূল্য
F_1	5	15	7 টাকা
F_2	15	10	14 টাকা

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. দেখাও যে, $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\sqrt{2}$; যেখানে $i = \sqrt{-1}$. ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $\sqrt{p - qi}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ভিটামিন C ও ভিটামিন D এর দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন যথাক্রমে 45 ও 60 হলে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন C ও D এর চাহিদা কিভাবে মেটানো যাবে? ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt{i} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{i^2 + 2i + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+i)^2}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

$\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{-2i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + i^2 - 2i}$ [$\because i^2 = -1$]

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-i)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

$\therefore \sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i + 1 - i) = \pm\frac{2}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\sqrt{2}$ (দেখানো হলো)

ঘ দেওয়া আছে, $p = 7$ এবং $q = 30\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{p - qi} = \sqrt{7 - 30\sqrt{2}i}$

$7 - 30\sqrt{2}i = 7 - 2.15\sqrt{2}.i$

$= 25 - 2.15\sqrt{2}i - 18$

$= 5^2 - 2.5.3\sqrt{2}.i + (3\sqrt{2}i)^2$

$= (5 - 3\sqrt{2}i)^2$

$\therefore \sqrt{p - qi} = \pm(5 - 3\sqrt{2}i) = \pm(5 - 3\sqrt{-2})$ **(Ans.)**

গ ধরি, দৈনিক F_1 প্রকারের খাদ্যের x কেজি পরিমাণ প্রয়োজন

F_2 ,, ,, y ,, ,, ,,

$\therefore$ অভিষ্ট ফাংশন, $Z_{min} = (7x + 14y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $5x + 15y \geq 45$ বা, $x + 3y \geq 9$

$15x + 10y \geq 60$ বা, $3x + 2y \geq 12$

$x, y \geq 0$

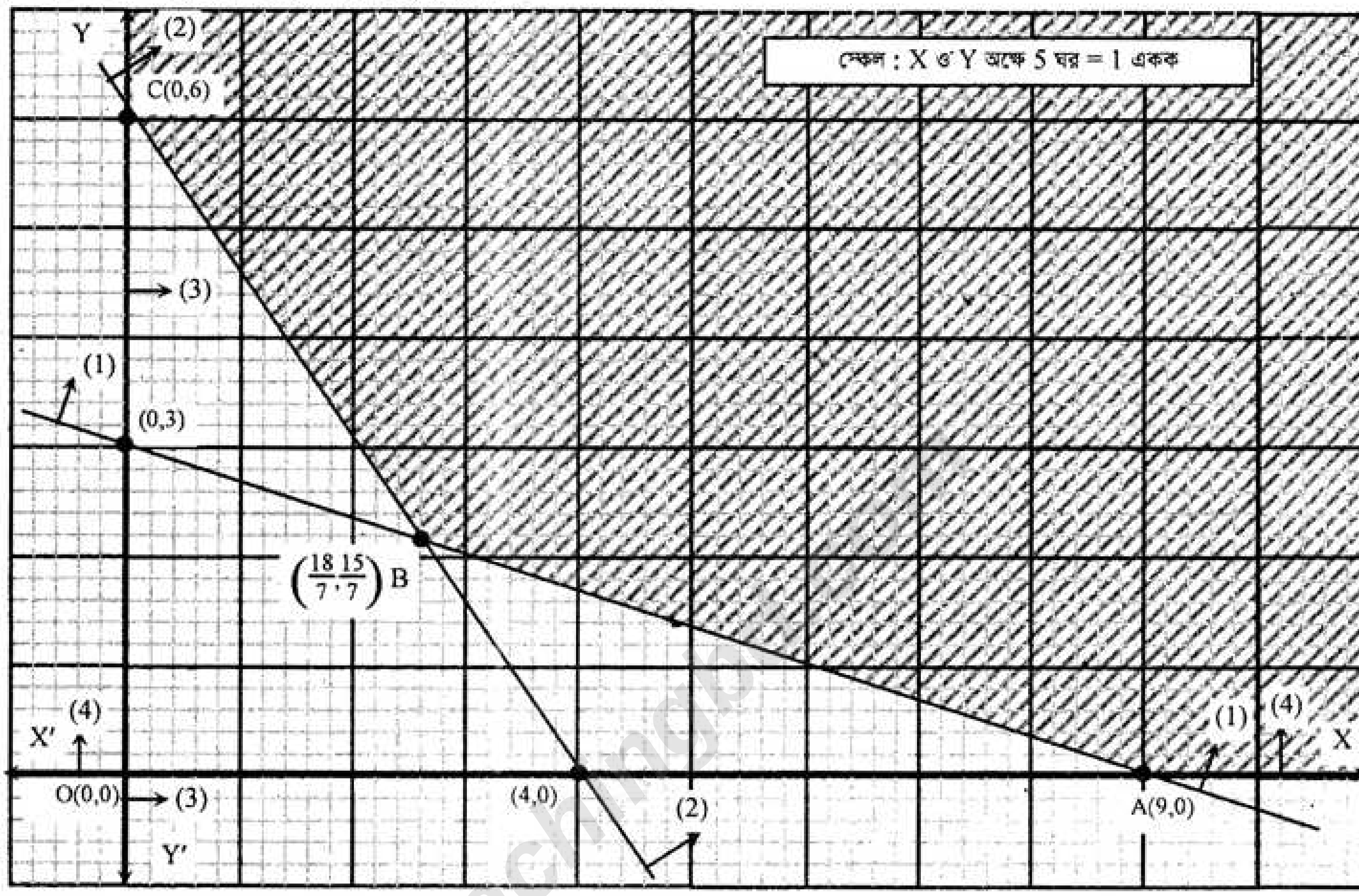
অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$x + 3y = 9 \quad \therefore \frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$ ... ... (i)

$3x + 2y = 12 \quad \therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ ... ... (ii)

$x = 0$ ... ... (iii)

$y = 0$ ... ... (iv)



লেখচিত্রে সমীকরণগুলি বসিয়ে প্রাপ্ত ABC অঞ্চলের উপরস্থ এবং ডান পার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহ প্রদত্ত সকল শর্তকে সমর্থন করে বিধায় ঐ অঞ্চলটি সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল। যার কৌণিক বিন্দুসমূহ :

A(9, 0), B$\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ ((i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু) এবং C(0, 6)

A(9, 0) বিন্দুতে, $Z = 7 \times 9 + 14 \times 0 = 63$

B$\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ বিন্দুতে, $Z = 7 \times \frac{18}{7} + 14 \times \frac{15}{7} = 48$

C(0, 6) বিন্দুতে $Z = 0 + 6 \times 14 = 84$

স্পষ্টত B বিন্দুতে Z সর্বনিম্ন

$\therefore$ F_1 এর পরিমাণ $= \frac{18}{7}$ কেজি

এবং F_2 এর পরিমাণ $= \frac{15}{7}$ কেজি **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১২ $z = x + iy$ এবং $a^2 + b^2 = 1$

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. $x = 12, y = 5$ হলে z এর পোলার আকার তৈরি কর। ২

খ. $|z + 8| + |z - 8| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ বের কর। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, x এর একটি বাস্তবমান $\frac{1 - ix}{1 + ix} = a - ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $z = x + iy$

$= 12 + i5$ [$\because x = 12$ এবং $y = 5$]

$\therefore$ z এর মডুলাস, $r = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

এবং z এর আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{5}{12}\right| = \tan^{-1}\frac{5}{12}$

$\therefore 12 + 5i = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 13\left(\cos\tan^{-1}\frac{5}{12} + i\sin\tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$

এটিই সংখ্যাটির পোলার আকার। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এবং $|z - 8| + |z + 8| = 20$

এখন, $|x + iy - 8| + |x + iy + 8| = 20$

বা, $|x - 8 + iy| + |x + 8 + iy| = 20$

বা, $\sqrt{(x - 8)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 8)^2 + y^2} = 20$

বা, $\sqrt{(x + 8)^2 + y^2} = 20 - \sqrt{(x - 8)^2 + y^2}$

বা, $(x + 8)^2 + y^2 = \left\{20 - \sqrt{(x - 8)^2 + y^2}\right\}^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 + 16x + 64 + y^2 = 400 + (x - 8)^2 + y^2 - 40\sqrt{(x - 8)^2 + y^2}$

বা, $x^2 + y^2 + 16x + 64 = 400 + x^2 + 64 - 16x + y^2 - 40\sqrt{(x - 8)^2 + y^2}$

বা, $32x - 400 = -40\sqrt{(x - 8)^2 + y^2}$

বা, $8(4x - 50) = -40\sqrt{(x - 8)^2 + y^2}$

বা, $4x - 50 = -5\sqrt{(x - 8)^2 + y^2}$

বা, $(4x - 50)^2 = 25\{(x - 8)^2 + y^2\}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $16x^2 - 400x + 2500 = 25(x^2 - 16x + 64 + y^2)$

বা, $25x^2 - 400x + 1600 + 25y^2 - 16x^2 + 400x - 2500 = 0$

বা, $9x^2 + 25y^2 = 900$

বা, $\frac{9x^2}{900} + \frac{25y^2}{900} = 1$

বা, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$; যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$

বা, $\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{a-ib}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{1+ix-1+ix}{1+ix+1-ix} = \frac{1-a+ib}{1+a-ib}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2ix}{2} = \frac{(1-a+ib)(1+a+ib)}{(1+a-ib)(1+a+ib)}$

বা, $ix = \frac{(1+ib-a)(1+ib+a)}{(1+a)^2-(ib)^2}$

$= \frac{(1+ib)^2-a^2}{1+2a+a^2-i^2b^2}$

$= \frac{1+2ib+i^2b^2-a^2}{1+2a+a^2+b^2}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{1+2ib-(a^2+b^2)}{1+2a+a^2+b^2}$

$= \frac{1+2ib-1}{1+2a+1}$ $[\because a^2+b^2=1]$

$= \frac{2ib}{2(1+a)} = \frac{ib}{1+a}$

$\therefore x = \frac{b}{1+a}$ যা x এর একটি বাস্তব মান **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৩ $Z_1 = x + iy$ এবং $Z_2 = p + iq$ দুইটি জটিল সংখ্যা যেখানে $x, y, p, q \in R$। *[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]*

ক. $|Z_1 - 3| = 4$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $x = 3, y = 20\sqrt{2}, p = -4$ এবং $q = 10\sqrt{2}$ হয়, তবে $Z_1 - \bar{Z}_2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ৪

গ. $\sqrt[3]{Z_1} = Z_2$ হলে উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $4pq(p^2 - q^2) = qx + py$ ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Z_1 = x + iy$

$\therefore |Z_1 - 3| = 4$

বা, $|x + iy - 3| = 4$

বা, $|(x-3) + iy| = 4$

বা, $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 4$

$\therefore (x-3)^2 + y^2 = 16$; যা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore$ ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Z_1 = x + iy$

$Z_2 = p + iq$

$x = 3, y = 20\sqrt{2}, p = -4$ এবং $q = 10\sqrt{2}$ বসিয়ে পাই,

$Z_1 = 3 + i20\sqrt{2}$

$Z_2 = -4 + i10\sqrt{2}$

$\therefore \bar{Z}_2 = -4 - i\,10\sqrt{2}$

$\therefore Z_1 - \bar{Z}_2 = (3 + i\,20\sqrt{2}) - (-4 - i\,10\sqrt{2})$

$= 3 + i20\sqrt{2} + 4 + i10\sqrt{2} = 7 + i30\sqrt{2}$

ধরি, $\sqrt{7 + i\,30\sqrt{2}} = a + ib$

বা, $7 + i\,30\sqrt{2} = a^2 + 2aib + i^2b^2$

বা, $7 + i30\sqrt{2} = (a^2 - b^2) + i\,2ab$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a^2 - b^2 = 7$ .... (i)

$2ab = 30\sqrt{2}$ .... (ii)

এখন, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$

$= (7)^2 + (2ab)^2$

$= 49 + (30\sqrt{2})^2 = 49 + 1800$

বা, $a^2 + b^2 = \sqrt{1849}$

$\therefore a^2 + b^2 = 43$ .... (iii)

[দুইটি সংখ্যার বর্গের যোগফল ঋণাত্মক হতে পারে না]

(i) ও (iii) যোগ করে পাই, $a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 7 + 43$

বা, $2a^2 = 50$

বা, $a^2 = 25$

$\therefore a = \pm 5$

(iii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই,

$a^2 + b^2 - a^2 + b^2 = 43 - 7$

বা, $2b^2 = 36$

বা, $b^2 = 18$

$\therefore b = \pm 3\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm 5 \pm i\,3\sqrt{2} = \pm(5 + i3\sqrt{2})$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{Z_1} = Z_2$

বা, $\sqrt[3]{x + iy} = p + iq$

বা, $x + iy = (p + iq)^3$ [ঘন করে]

বা, $x + iy = p^3 + 3p^2iq + 3pi^2q^2 + i^3q^3$

বা, $x + iy = p^3 + 3p^2iq - 3pq^2 - iq^3$

$\therefore x + iy = (p^3 - 3pq^2) + i(3p^2q - q^3)$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x = p^3 - 3pq^2$

$y = 3p^2q - q^3$

ডানপক্ষ $= qx + py$

$= pq\left\{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right\}$

$= pq\left\{\frac{p^3 - 3pq^2}{p} + \frac{3p^2q - q^3}{q}\right\}$

$= pq\{p^2 - 3q^2 + 3p^2 - q^2\}$

$= pq\{4p^2 - 4q^2\} = 4pq\{p^2 - q^2\}$

= বামপক্ষ

$\therefore 4pq(p^2 - q^2) = qx + py$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১৪ এককের ঘনমূলগুলো $1, \omega, \omega^2$। যেখানে $1 + \omega + \omega^2 = 0$ এবং $\omega^3 = 1$ *[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা]*

ক. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ ২

খ. $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$ হলে দেখাও যে, $-2(x^2 + y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n = 2$ বা -1, যখন n এর মান যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য বা n এর মান অপর যে কোন পূর্ণ সংখ্যা। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{-2i}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + i^2 - 2i}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-i)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

বা, $a + ib = (x + iy)^3$

বা, $a + ib = x^3 + 3.x^2.iy + 3.x.(iy)^2 + (iy)^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ $[\because i^3 = -i]$

এখন, বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$\therefore a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

বা, $a = x(x^2 - 3y^2)$ এবং $b = y(3x^2 - y^2)$

বা, $\frac{a}{x} = x^2 - 3y^2$ বা, $\frac{b}{y} = 3x^2 - y^2$

এখন, $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = x^2 - 3y^2 - 3x^2 + y^2$

$= -2x^2 - 2y^2 = -2(x^2 + y^2)$

$-2(x^2 + y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ **(দেখানো হলো)**

গ যেহেতু, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ এবং $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ উভয় রাশি এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং একটি অপরটির বর্গ,

অতএব, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega$ ধরলে $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega^2$ হবে।

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \left(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\right)^n + \left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\right)^n$

$= \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^n + \omega^{2n}$

এখানে $n = 3m$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= \omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1 + 1 = 2$

$n = 3m + 1$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= (\omega^3)^m.\,\omega + (\omega^3)^{2m}.\,\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

$n = 3m + 2$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$

$= (\omega^3)^m.\omega^2 + (\omega^3)^{2m}.\omega^4$

$= \omega^2 + \omega$

$= -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

অর্থাৎ, n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে প্রদত্ত রাশিটি = 2 এবং n এর মান অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে রাশিটি = –1 **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ $z = \sqrt[6]{-64}$ এবং $p = a + b\omega + c\omega^2$ ও $q = a + b\omega^2 + c\omega$ তিনটি জটিল সংখ্যা। যেখানে ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল

[আবদুল কাদির মোল্লা সিটি কলেজ, নরসিংদী]

ক. $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হলে, দেখাও যে, $\sqrt[3]{a-ib} = x - iy$. ২

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত z এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $a + b + c = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^3 + q^3 = 27abc$. ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$

অর্থাৎ, $a + ib = (x + iy)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

বা, $a + ib = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 \quad [\because i^2 = -1]$

$\therefore a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

এখন উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $a - ib = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$

$= x^3 - 3xy^2 - i3x^2y + iy^3$

$= x^3 - i3x^2y - 3xy^2 - i^3y^3 \; [\because i^2 = -1]$

$= (x)^3 - 3.x^2.iy + 3.x.(iy)^2 - (iy)^3$

বা, $a - ib = (x - iy)^3$

$\therefore \sqrt[3]{a-ib} = x - iy$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $z = \sqrt[6]{-64}$

বা, $z^6 = -64$ [উভয়পক্ষের ঘাতকে 6 দ্বারা গুণ করে]

বা, $z^6 + 64 = 0$

বা, $(z^2)^3 + 4^3 = 0$

বা, $(z^2 + 4)(z^4 - 4z^2 + 16) = 0$

হয় $z^2 + 4 = 0$ বা, $z^2 = -4 = 4i^2$

$\therefore z = \pm 2i$

অথবা, $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$

$\therefore z^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 64}}{2}$

বা, $z^2 = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{48}}{2} = \frac{4 \pm i.4\sqrt{3}}{2}$

$= 2 \pm i.2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 1 \pm i.2\sqrt{3}$

$= (\sqrt{3})^2 \pm 2.\sqrt{3}.i + i^2$

বা, $z^2 = (\sqrt{3} \pm i)^2$

$\therefore z = \pm(\sqrt{3} \pm i)$

$\therefore \sqrt[6]{-64}$ এর মানগুলো হলো: $\pm 2i, \pm(\sqrt{3} \pm i)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $p = a + b\omega + c\omega^2$ ও $q = a + b\omega^2 + c\omega$

ধরি, $a + b\omega + c\omega^2 = p$ এবং $a + b\omega^2 + c\omega = q$

$\therefore$ বামপক্ষ $= p^3 + q^3$

$= (p + q)(p^2 - pq + q^2)$

$= (p + q)\{p^2 + (-1)pq + q^2\}$

$= (p + q)\{p^2 + (\omega^2 + \omega)pq + q^2\} \quad [\because \omega^2 + \omega = -1]$

$= (p + q)(p^2 + \omega^2pq + \omega pq + q^2)$

$= (p + q)(p^2 + \omega pq + \omega^2pq + q^2\omega^3) \quad [\because \omega^3 = 1]$

$= (p + q)\{p(p + \omega q) + \omega^2q(p + \omega q)\}$

$= (p + q)(p + \omega q)(p + \omega^2q)$

এখন, $p + q = a + b\omega + c\omega^2 + a + b\omega^2 + c\omega$

$= 2a + b(\omega + \omega^2) + c(\omega^2 + \omega) = 2a - b - c$

$p + \omega q = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega + b\omega^3 + c\omega^2$

$= a(1 + \omega) + b(\omega + 1) + 2c\omega^2$

$= a(-\omega^2) + b(-\omega^2) + 2c\omega^2$

$= \omega^2(2c - a - b)$

$p + \omega^2q = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega^2 + b\omega^4 + c\omega^3$

$= a + b\omega + c\omega^2 + a\omega^2 + b\omega + c$

$= a(1 + \omega^2) + 2b\omega + c(1 + \omega^2)$

$= a(-\omega) + 2b\omega + c(-\omega)$

$= \omega(2b - a - c)$

$\therefore (p + q)(p + \omega q)(p + \omega^2q) = (2a - b - c)\omega^3(2c - a - b)(2b - a - c)$

$= (2a - b - c)(2c - a - b)(2b - a - c)$

$= \{2a - (b + c)\}\{2c - (a + b)\}\{2b - (a + c)\}$

$= \{2a - (-a)\}\{2c - (-c)\}\{2b - (-b)\} \quad [\because a + b + c = 0]$

$= 3a.3c.3b = 27abc =$ ডানপক্ষ

$\therefore (a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = 27abc$

$\therefore p^3 + q^3 = 27abc$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ নিচের উদ্দীপক লক্ষ্য কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

কাল্পনিক রাশির একক i এবং a, b উভয়ে বাস্তব সংখ্যা।

[সরকারি সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ, ফরিদপুর]

ক. দেখাও যে, $\left|\frac{a-ib}{a+ib}\right| = 1$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে যখন $a^2 + b^2 = 1$ হয়। ৪

গ. $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হলে প্রমাণ কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$. ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \left|\frac{a-ib}{a+ib}\right|$

$= \frac{|a-ib|}{|a+ib|} \quad [\because \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}]$

$= \frac{\sqrt{(a)^2 + (-b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল ১২(গ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫৫

গ দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$

অর্থাৎ, $a + ib = (x + iy)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

এখন, বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, ডানপক্ষ $= \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

$= \frac{x^3 - 3xy^2}{x} + \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$= \frac{x(x^2 - 3y^2)}{x} + \frac{y(3x^2 - y^2)}{y}$

$= x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2$

$= 4(x^2 - y^2)$

= বামপক্ষ

$\therefore 4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $z_1 = 1 - ix, z_2 = a + ib, z_3 = x + iy$

[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]

ক. বর্গমূল কর $-8 - 6i$ ২

খ. যদি a, b বাস্তব সংখ্যা এবং $a^2 + b^2 = 1$ হয় তবে x এর একটি বাস্তব মান, $\frac{\bar{z}_1}{z_1} = \bar{z}_2$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। ৪

গ. $(z_2)^{\frac{1}{3}} = z_3$ হলে দেখাও যে, $(\bar{z}_2)^{\frac{1}{3}} = \bar{z}_3$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $-8 - 6i$

$= 1 - 6i - 9$

$= 1 - 2.3i + (3i)^2$

$= (1 - 3i)^2$

$\therefore -8 - 6\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(1-3i)^2}$

$= \pm(1 - 3i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z_1 = 1 - ix$

$z_2 = a + ib$

$a^2 + b^2 = 1$

এখন, $\frac{z_1}{\bar{z}_1} = z_2$

বা, $\frac{1 - ix}{1 + ix} = a - ib$

বা, $\frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{1}{a - ib}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{1 + ix - 1 + ix}{1 + ix + 1 - ix} = \frac{1 - a + ib}{1 + a - ib}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2ix}{2} = \frac{(1 - a + ib)(1 + a + ib)}{(1 + a - ib)(1 + a + ib)}$

বা, $ix = \frac{(1 + ib - a)(1 + ib + a)}{(1 + a)^2 - (ib)^2}$

$= \frac{(1 + ib)^2 - a^2}{1 + 2a + a^2 - i^2b^2}$

$= \frac{1 + 2ib + i^2b^2 - a^2}{1 + 2a + a^2 + b^2}$ [$\because i^2 = -1$]

$= \frac{1 + 2ib - (a^2 + b^2)}{1 + 2a + (a^2 + b^2)}$

$= \frac{1 + 2ib - 1}{1 + 2a + 1}$ [$\because a^2 + b^2 = 1$]

$= \frac{2ib}{2(1 + a)} = \frac{ib}{1 + a}$

বা, $x = \frac{b}{1 + a}$ যা x এর একটি বাস্তব মান

অর্থাৎ x এর একটি বাস্তব মান উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

গ $(z_2)^{\frac{1}{3}} = z_3$

বা, $\sqrt[3]{(a + ib)} = x + iy$

অর্থাৎ, $a + ib = (x + iy)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

বা, $a + ib = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$ [$\because i^2 = -1$]

$\therefore$ $a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

এখন উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $a - ib = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$

$= x^3 - 3xy^2 - i3x^2y + iy^3$

$= x^3 - i3x^2y - 3xy^2 - i^3y^3$ [$\because i^2 = -1$]

$= (x)^3 - 3.x^2.iy + 3.x.(iy)^2 - (iy)^3$

বা, $a - ib = (x - iy)^3$

$\therefore$ $\sqrt[3]{a - ib} = x - iy$

$\therefore$ $(\bar{z}_2)^{\frac{1}{3}} = \bar{z}_3$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ দৃশ্যকল্প-১: একটি দোকান দুই ধরনের খেলনা, A এবং B বিক্রি করে। দোকানের মালিক প্রতি একক A এবং B খেলনা ক্রয় করে যথাক্রমে 8 টাকা এবং 14 টাকা দিয়ে। প্রতি একক A এবং B খেলনা বিক্রিতে লাভ যথাক্রমে 2 টাকা এবং 3 টাকা। দোকানের মালিকের পরিকল্পনা হবে 2000 এর বেশি খেলনা বিক্রি করবে না এবং 20,000 টাকার বেশি ইনভেস্ট করবে না।

দৃশ্যকল্প-২: $\frac{2x + 3}{x - 3} < \frac{x + 3}{x - 1}$ *[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]*

ক. $z = x + iy$ হলে $|z + i| = |\bar{z} + 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রতি মাসে সর্বোচ্চ কতগুলো খেলনা ক্রয় করলে সর্বোচ্চ মুনাফা হবে? ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত অসমতাটির সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $z = x + iy$

$\therefore$ z এর অনুবন্ধী $\bar{z} = x - iy$

এখন, $|z + i| = |\bar{z} + 2|$

বা, $|x + iy + i| = |x - iy + 2|$

বা, $|x + i(1 + y)| = |(x + 2) - iy|$

বা, $\sqrt{x^2 + (1 + y)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (-y)^2}$ [$\because |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$]

বা, $x^2 + (1 + y)^2 = (x + 2)^2 + y^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 1^2 + 2.1.y + y^2 = x^2 + 2.x.2 + 2^2 + y^2$

বা, $1 + 2y = 4x + 4$

বা, $4x + 4 - 2y - 1 = 0$

বা, $4x - 2y + 3 = 0$

$\therefore$ যা একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশির সমীকরণ একটি সরলরেখার সঞ্চারপথ নির্দেশ করে।

খ ধরি, দোকান মালিক x সংখ্যক A এবং y সংখ্যক B ক্রয় করেন।

প্রদত্ত শর্তানুসারে অসমতাগুলো হল–

$x + y \le 2000$

$8x + 14y \le 20000;\ x, y \ge 0$

এবং $z = 2x + 3y$

অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

$x + y = 2000$

$\therefore$ $\frac{x}{2000} + \frac{y}{2000} = 1$ ……… (i)

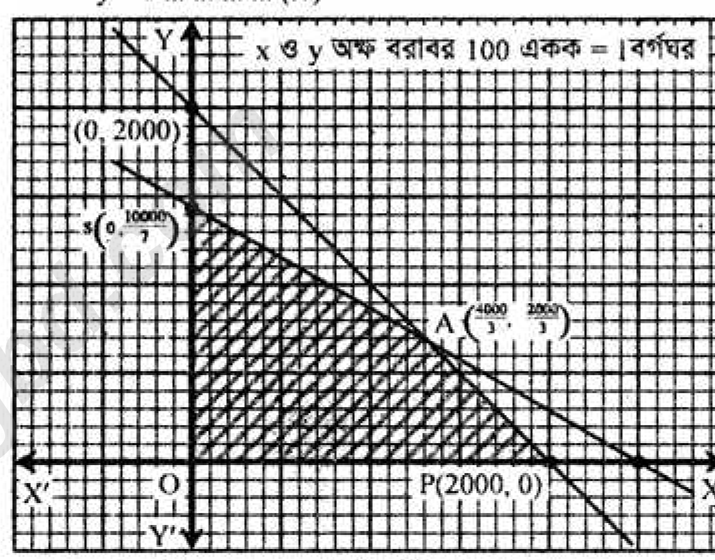
এবং $8x + 14y = 20000$

বা, $\frac{8x}{20000} + \frac{14y}{20000} = 1$

$\therefore$ $\frac{x}{2500} + \frac{y}{\frac{10000}{7}} = 1$ ……… (ii)

$x = 0$ ……… (iii)

$y = 0$ ……… (iv)



সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে

$S\left(0, \frac{10000}{7}\right)$, $A\left(\frac{4000}{3}, \frac{2000}{3}\right)$ এবং $P(2000, 0)$

$S\left(0, \frac{10000}{7}\right)$ বিন্দুতে, $Z = 2 \times 0 + 3 \times \frac{10000}{7}$

$= 4285.71$

$A\left(\frac{4000}{3}, \frac{2000}{3}\right)$ বিন্দুতে, $Z = 2 \times \frac{4000}{3} + 3 \times \frac{2000}{3} = 4666.67$

$P(2000, 0)$ বিন্দুতে, $Z = 2 \times 2000 + 3 \times 0 = 4000$

স্পষ্টত $A\left(\frac{4000}{3}, \frac{2000}{3}\right)$ বা, (1333.33, 666.67) বিন্দুতে Z এর সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

যেহেতু খেলনার সংখ্যা ভগ্নাংশ হতে পারে না তাই তিনি 1333টি A এবং 666টি B ক্রয় করবেন এবং তখন লাভ $Z = 2 \times 1333 + 3 \times 666$

$= 4664$ টাকা

গ $\frac{2x + 3}{x - 3} < \frac{x + 3}{x - 1}$

বা, $\frac{2x + 3}{x - 3} - \frac{x + 3}{x - 1} < 0$

বা, $\frac{(2x + 3)(x - 1) - (x + 3)(x - 3)}{(x - 3)(x - 1)} < 0$

বা, $\frac{2x^2 + 3x - 2x - 3 - x^2 + 3^2}{(x - 3)(x - 1)} < 0$

বা, $\frac{x^2 + x + 6}{(x - 3)(x - 1)} < 0$

বা, $\frac{x^2 + 2.\frac{1}{2}.x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{(x - 3)(x - 1)} < 0$

বা, $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0$ ……… (i)

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}$ সর্বদাই ধনাত্মক রাশি।

সুতরাং (i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদিও কেবল যদি $(x-3), (x-1)$ এর যেকোন একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(x-3)$ এর চিহ্ন	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-3)(x-1)$ এর চিহ্ন
$x<1$	−	−	+
$1<x<3$	−	+	−
$x>3$	+	+	+

∴ (i) নং সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $1 < x < 3$ হয়।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $1 < x < 3$

সংখ্যারেখায় সমাধান : −2 −1 0 1 2 3 4

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = |x-3|$

দৃশ্যকল্প-২: $4x + y \geq 16, 4x + 7y \geq 40, x, y \geq 0$ *[কারমাইকেল কলেজ, রংপুর]*

ক. $-2\sqrt{3}+2i$ কে পোলার আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. $f(x) < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $f(x^2-6) < \frac{31}{25}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে লেখচিত্রের সাহায্যে $z = 4x + 2y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $z = -2\sqrt{3}+2i$

এখানে, $-2\sqrt{3} = r\cos\theta$ এবং $2 = r\sin\theta$

∴ $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2} = \sqrt{16} = 4$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

যেহেতু বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত, কাজেই মুখ্য আর্গুমেন্ট $= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

তাহলে, $-2\sqrt{3}+2i = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

এটিই সংখ্যাটির পোলার আকার।

খ দেওয়া আছে, $f(x) = |x-3|$ সুতরাং $f(x^2-6) = |x^2-6-3| = |x^2-9|$

এখানে, $f(x) < \frac{1}{5}$

বা, $|x-3| < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} < x-3 < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5}+3 < x < \frac{1}{5}+3$

বা, $\frac{14}{5} < x < \frac{16}{5}$

বা, $\frac{196}{25} < x^2 < \frac{256}{25}$

বা, $\frac{196}{25} - 9 < x^2 - 9 < \frac{256}{25} - 9$

বা, $-\frac{29}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$

বা, $-\frac{31}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$ $[\because \frac{-31}{25} < -\frac{29}{25}$ যদি $x^2 - 9 > -\frac{29}{25}$,

বা, $|x^2 - 9| < \frac{31}{25}$ তাহলে, $x^2 - 9 > -\frac{31}{25}]$

∴ $f(x^2-6) < \frac{31}{25}$ **(দেখানো হলো)**

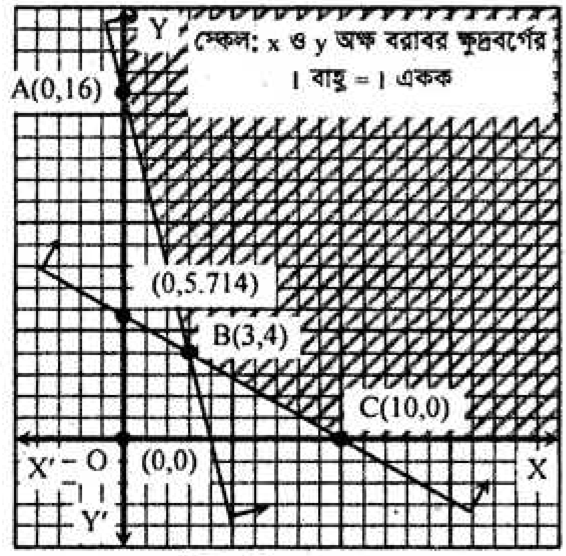
গ প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

আমরা পাই, $4x + y = 16$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} = 1$ ……… (i)

$4x + 7y = 40$

বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{\frac{40}{7}} = 1$ ……… (ii)



সম্ভাব্য এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে A(0,16), B(3, 4), C(10,0)

A বিন্দুতে, $z = 4x + 2y$
$= (4 \times 0 + 2 \times 16) = 32$

B বিন্দুতে, $z = (4 \times 3 + 2 \times 4) = 20$

C বিন্দুতে, $z = (4 \times 10 + 2 \times 0) = 40$

$z_{min} = 20$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ এককের একটি জটিল ঘনমূল ω।

[আহম্মদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]

ক. প্রমাণ কর যে, $\omega^3 = 1$ ২

খ. $(-1+\sqrt{-3})^9 + (-1-\sqrt{-3})^9$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $a + b + c = 0$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,
$(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = 27abc$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এককের জটিল ঘনমূল ω হলে,

$\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং অপরটি হবে

$\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

∴ $\omega^3 = \omega . \omega^2 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{4}\{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2\} = \frac{1}{4}(1+3)$

$= \frac{1}{4} \times 4 = 1$

∴ $\omega^2 = 1$ **(প্রমাণিত)**

খ আমরা জানি, এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে অপরটি হবে ω^2

$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ হলে,

$\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

∴ $-1+\sqrt{-3} = 2\omega$

এবং $-1-\sqrt{-3} = 2\omega^2$

এখন, $(-1+\sqrt{-3})^9 + (-1-\sqrt{-3})^9$
$= (2\omega)^9 + (2\omega^2)^9$
$= 2^9\omega^9 + 2^9\omega^{18}$
$= 2^9\{(\omega^3)^3 + (\omega^3)^6\}$
$= 2^9(1^3 + 1^6)$ $[\because \omega^3 = 1]$
$= 2^9(1+1)$
$= 2 \times 2^9 = 2^{10} = 1024$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫৬

প্রশ্ন ▶ ২১ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, $z^2 - 2iz - 5 = 0$ যেখানে z একটি জটিল সংখ্যা। *[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]*

ক. সমীকরণটি সমাধান করে z এর মানকে $x + iy$ আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. z এর মূল দুটির যে কোন একটির বর্গমূল নির্ণয় কর। ৪

গ. z এর অপর মূলটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, মূলদ্বয়ের গুণফল একটি বাস্তব সংখ্যা। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $z^2 - 2iz - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad z = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4.1.(-5)}}{2.1}$

$= \frac{2i \pm \sqrt{-4 + 20}}{2}$

$= \frac{2i \pm 4}{2}$

$\therefore \quad z = i \pm 2$ **(Ans.)**

খ z এর একটি মূল $2 + i$

$2 + i$ এর বর্গমূল $= \sqrt{2+i}$

ধরি, $\sqrt{2+i} = x + iy$ ……… (i)

$\Rightarrow \quad 2 + i = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$ [বর্গ করে]

এখানে, বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^2 - y^2 = 2$ ……… (ii)

$2xy = 1$

$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 2^2 + 1$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = \sqrt{5}$ ……… (iii)

(ii) + (iii) $\Rightarrow 2x^2 = 2 + \sqrt{5}$

$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$

(iii) − (ii) $\Rightarrow 2y^2 = \sqrt{5} - 2$

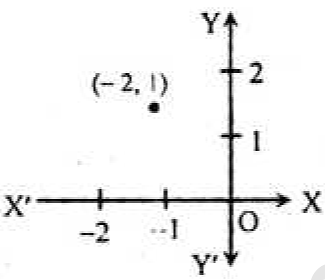
$\therefore \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt{5}-2})$

$\therefore \quad 2 + i$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{2+\sqrt{5}} + i\sqrt{\sqrt{5}-2}\}$ **(Ans.)**

গ ধরি, z এর অপর মূলটি, $z_2 = -2 + i$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{-2}\right|$

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**



মডুলাস, $r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ **(Ans.)**

মূলদ্বয়ের গুণফল $= (i + 2)(i - 2)$

$= i^2 - 2^2$

$= -1 - 4 = -5$, যা একটি বাস্তব সংখ্যা (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ২২ (i) $Z_1 = a + ib, Z_2 = c + id$; (ii) অভীষ্ট ফাংশন $Z = -x + y$;
শর্ত: $3y - x \le 10,\ x + y \le 6,\ x - y \le 2,\ x, y \ge 0$

[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]

ক. যদি x কোন বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে x এর পরমমানকে সংজ্ঞায়িত কর। ২

খ. $\sqrt[3]{Z_1} = Z_2$ হলে প্রমাণ কর যে, $4cd(c^2 - d^2) = ad + bc$। ৪

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে (ii) এর অভীষ্ট ফাংশনের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেকোনো বাস্তব সংখ্যা x-এর পরমমান $|x|$ দ্বারা সূচিত হয় এবং

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ যখন } x > 0 \\ 0, \text{ যখন } x = 0 \\ -x, \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

বা, $$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \ge 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

অর্থাৎ শূন্য (0) ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার পরমমান ধনাত্মক এবং শূন্য (0) এর পরমমান শূন্য (0) হবে।

খ দেওয়া আছে, $Z_1 = a + ib, Z_2 = c + id$

এখন, $\sqrt[3]{Z_1} = Z_2$ হলে আমরা পাই,

$\sqrt[3]{a + ib} = c + id$

অর্থাৎ, $a + ib = (c + id)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = c^3 + 3c^2id + 3ci^2d^2 + i^3d^3$

$= c^3 + 3c^2di - 3cd^2 - id^3$

$= c^3 - 3cd^2 + 3c^2di - id^3$

$= c^3 - 3cd^2 + i(3c^2d - d^3)$

এখন, বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = c^3 - 3cd^2$ এবং $b = 3c^2d - d^3$

এখন, ডানপক্ষ $= ad + bc$

$= cd\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right)$

$= cd\left\{\frac{c^3 - 3cd^2}{c} + \frac{3c^2d - d^3}{d}\right\}$

$= cd\left\{\frac{c(c^2 - 3d^2)}{c} + \frac{d(3c^2 - d^2)}{d}\right\}$

$= cd(c^2 - 3d^2 + 3c^2 - d^2) = 4cd(c^2 - d^2)$

= বামপক্ষ

$\therefore 4cd(c^2 - d^2) = ad + bc$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $z = -x + y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $-x + 3y \le 10$

$x + y \le 6$

$x - y \le 2$

$x \ge 0, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

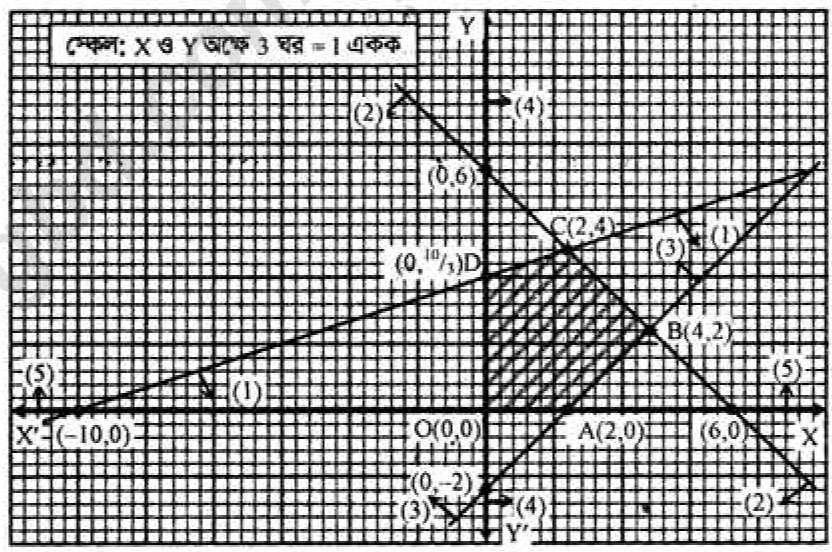
$-x + 3y = 10 \Rightarrow \frac{x}{-10} + \frac{y}{\frac{10}{3}} = 1$ ……… (1)

$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ ……… (2)

$x - y = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ ……… (3)

$x = 0$ ……… (4)

$y = 0$ ……… (5)



লেখচিত্রে দেখা যায় (1), (2), (3) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য এদের আনুষঙ্গিক অসমতাগুলো সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OABCD। যেখানে O হচ্ছে মূল বিন্দু।

$\therefore$ O (0, 0), A(2, 0)

B হচ্ছে (2) এবং (3) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ B(4, 2)

C হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদবিন্দু

$\therefore$ C(2, 4) এবং $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0$

A(2, 0) " $z = -2 + 0 = -2$

B(4, 2) " $z = -4 + 2 = -2$

C(2, 4) " $z = -2 + 4 = 2$

এবং $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$ " $z = 0 + \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$

স্পষ্টতঃ A(2, 0) ও B(4, 2) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$z_{min} = -2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৩ $z = 1 + ix, f(b) = b - 2$.

[চাঁদপুর সরকারি মহিলা কলেজ, চাঁদপুর]

ক. দেখাও যে, $a.0 = 0$ যখন $a \in R$. ২

খ. $f(x) f(x + 1) f(x + 2) \ge 0$ অসমতাটির সমাধান কর। ৪

গ. $p^2 + q^2 = 1; p, q \in R$. দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{\bar{z}}{z} = p - iq$ কে সিদ্ধ করে। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু $1 \in \mathbb{R}$,

$\therefore 1 + 0 = 1$ [যোজনের অভেদক বিধি]

বা, $a.(1 + 0) = a.1$ [গুণনের অনন্যতা বিধি]

বা, $a.1 + a.0 = a.1$ [বন্টনবিধি]

বা, $a + a.0 = a$ [গুণের অভেদক বিধি]

বা, $-a + a + a.0 = -a + a$ [যোগের অনন্যতা বিধি]

বা, $(-a + a) + a.0 = -a + a$ [যোগের সংযোগ বিধি]

বা, $0 + a.0 = 0$ [যোগের বিপরীতক বিধি]

$\therefore a.0 = 0$ **(দেখানো হলো)** [যোগের অভেদক বিধি]

খ দেওয়া আছে, $f(b) = b - 2$

$\therefore \quad f(x)\, f(x + 1)\, f(x + 2) = (x - 2)\,(x - 2 + 1)\,(x - 2 + 2)$
$= x(x - 1)\,(x - 2)$

এখন, $f(x)\, f(x + 1)\, f(x + 2) \geq 0 \;\therefore\; x(x - 1)\,(x - 2) \geq 0$

এখানে, উপাদানসমূহের চিহ্ন বিশ্লেষণ করে পাই,

	x<0	x=0	0<x<1	x=1	1<x<2	x=2	x>2
x−2	−	−	−	−	−	0	+
x−1	−	−	−	0	+	+	+
x	−	0	+	+	+	+	+
x(x−1)(x−2)	−	0	+	0	−	0	+

ছক হতে দেখা যাচ্ছে যে,

$0 \leq x \leq 1$ অথবা $x \geq 2$ এই দুটি সীমায় প্রদত্ত অসমতাটি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $0 \leq x \leq 1$ অথবা $x \geq 2$

গ দেওয়া আছে, $z = 1 + ix \quad \therefore \bar{z} = 1 - ix$

$\therefore \quad \dfrac{1 - ix}{1 + ix} = p - iq$

বা, $\dfrac{1 + ix}{1 - ix} = \dfrac{1}{p - iq}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\dfrac{1 + ix - 1 + ix}{1 + ix + 1 - ix} = \dfrac{1 - p + iq}{1 + p - iq}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\dfrac{2ix}{2} = \dfrac{(1 - p + iq)(1 + p + iq)}{(1 + p - iq)(1 + p + iq)}$

বা, $ix = \dfrac{(1 + iq - p)\,(1 + iq + p)}{(1 + p)^2 - (iq)^2} = \dfrac{(1 + iq)^2 - p^2}{1 + 2p + p^2 - i^2q^2}$

$= \dfrac{1 + 2iq + i^2q^2 - p^2}{1 + 2p + p^2 + q^2}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \dfrac{1 + 2iq - (p^2 + q^2)}{1 + 2p + p^2 + q^2}$

$= \dfrac{1 + 2iq - (p^2 + q^2)}{1 + 2p + p^2 + q^2} = \dfrac{1 + 2iq - 1}{1 + 2p + 1}$ $[\because p^2 + q^2 = 1]$

$= \dfrac{2iq}{2(1 + p)} = \dfrac{iq}{1 + p}$

বা, $x = \dfrac{q}{1 + p}$; যা x এর একটি বাস্তব মান **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২৪ দৃশ্যকল্প-১: সাকিব 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6টি বই ও 4টি খাতা কিনবেন। প্রতিটি বইয়ের দাম 30 টাকা ও প্রতিটি খাতার দাম 40 টাকা।
দৃশ্যকল্প-২: ω এককের ঘনমূলের কাল্পনিক মূল। *[চাঁদপুর সরকারি মহিলা কলেজ, চাঁদপুর]*

ক. $\sqrt[4]{\omega + \omega^2}$ মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $(1 - \omega + \omega^2)\,(1 - \omega^2 + \omega^4)\,(1 - \omega^4 + \omega^8)$ .... 2m উৎপাদক পর্যন্ত $= 2^{2m}$। ৪

গ. প্রত্যেক প্রকারের কতটি জিনিস কিনলে সে প্রদত্ত শর্তাধীনে সর্বোচ্চ জিনিস কিনতে পারবে? ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt[4]{\omega + \omega^2} = \sqrt[4]{-1} = (-1)^{\frac{1}{4}} = \left\{(-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= (\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{i}$

এখন, $\sqrt{i} = \sqrt{2i \times \dfrac{1}{2}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{2}(1^2 + i^2 + 2.1.i)}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 + i)^2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= (1 - \omega + \omega^2)\,(1 - \omega^2 + \omega^4)\,(1 - \omega^4 + \omega^8) \cdots$ 2m উৎপাদক

$= \{(1 - \omega + \omega^2)\,(1 - \omega + \omega^2) \cdots$ m সংখ্যক উৎপাদক$\} \times \{(1 - \omega^2 + \omega)\,(1 - \omega^2 + \omega) \cdots$ m সংখ্যক উৎপাদক$\}$

$= (1 - \omega + \omega^2)^m\,(1 - \omega^2 + \omega)^m$

$= (0 - 2\omega)^m\,(0 - 2\omega^2)^m \; [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= [(-2\omega)\,(-2\omega^2)]^m$

$= (4\omega^3)^m = 4^m = (2^2)^m$

$= 2^{2m} =$ ডানপক্ষ

$(1 - \omega + \omega^2)\,(1 - \omega^2 + \omega^4)\,(1 - \omega^4 + \omega^8) \cdots$ 2m উৎপাদক পর্যন্ত $= 2^{2m}$.
(দেখানো হলো)

গ মনে করি, বই xটি এবং খাতা yটি কিনতে হবে।

$\therefore$ অভীষ্ট ফাংশন $Z_{max} = x + y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x \geq 6$
$y \geq 4$
$30x + 40y \leq 500$

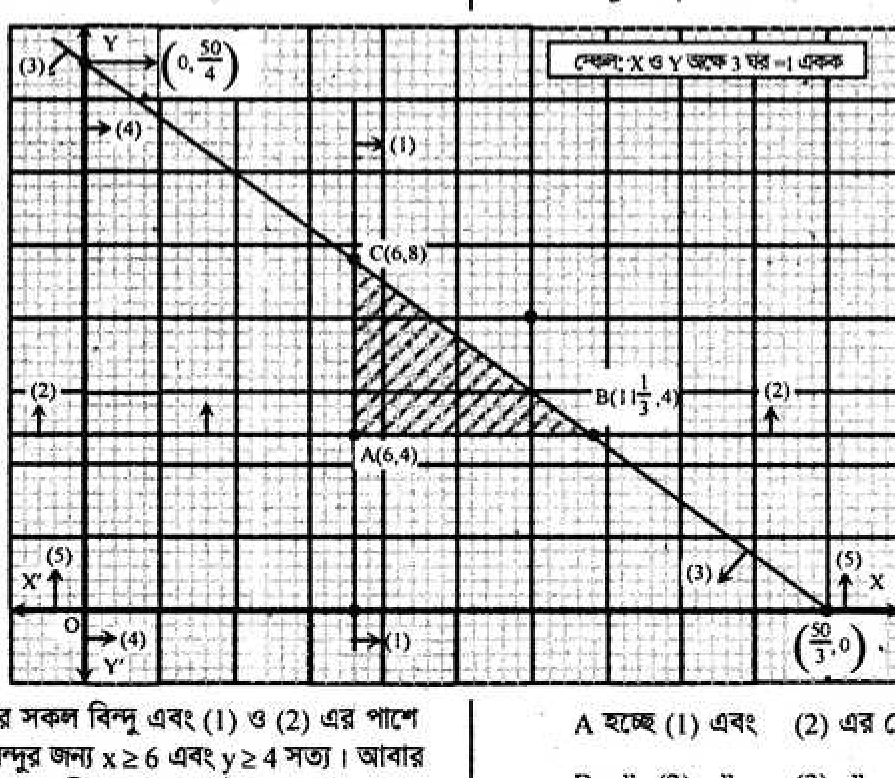
প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণ গুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

$\therefore$ আমরা পাই, $x = 6 \cdots\cdots\cdots (1)$

$y = 4 \cdots\cdots\cdots (2)$

$30x + 40y = 500$

বা, $\dfrac{x}{\frac{50}{3}} + \dfrac{y}{\frac{50}{4}} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (3)$



লেখচিত্রে দেখা যায় (1) এবং (2) এর সকল বিন্দু এবং (1) ও (2) এর পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \geq 6$ এবং $y \geq 4$ সত্য। আবার (3) এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু আছে, সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $30x + 40y \leq 500$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC.

A হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদবিন্দু। $\therefore A(6, 4)$

B " (2) " (3) " " $\therefore B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$

এবং C " (1) " (3) " " $\therefore C(6, 8)$

এখন A(6, 4) এর জন্য $z = 6 + 4 = 10$

$B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$ " " $z = 11.33 + 4 = 15.33$

C (6, 8) " " $z = 6 + 8 = 14$

দেখা যায়, $B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$ বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ হয় যা একটি ভগ্নাংশ। জিনিসের সংখ্যা ভগ্নাংশ হবে না। কাজেই এক্ষেত্রে x = 11 এবং y = 4

Ans. বই 11টি ও খাতা 4টি

প্রশ্ন ▶২৫ নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ্য কর:

(i) $|2 - 8x| \leq 6$ (ii) $-7 + 24i$

[চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ল্যাবরেটরী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. 1 এর ঘনমূল তিনটির সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপক (i) বর্ণিত অসমতাটি সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. উদ্দীপক (ii) বর্ণিত সংখ্যাটির বর্গমূল নির্ণয় কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$ তাহলে, $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

$\therefore$ ঘনমূল তিনটির সমষ্টি $= 1 + \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত অসমতা, $|2 - 8x| \leq 6$

বা, $|8x - 2| \leq 6$

বা, $-6 \leq 8x - 2 \leq 6$

বা, $-6 + 2 \leq 8x - 2 + 2 \leq 6 + 2$ ['2' যোগ করে]

বা, $-4 \leq 8x \leq 8$

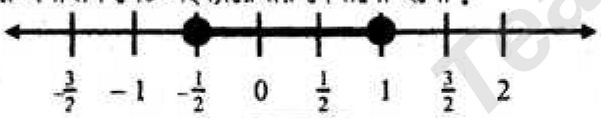
বা, $\frac{-4}{8} \leq \frac{8x}{8} \leq \frac{8}{8}$ ['8' দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

এবং সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$

নিম্নে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখানো হলো :



গ $-7 + 24i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{-7 + 24i}$

$= \pm\sqrt{(3)^2 + 2.3.4i + (4i)^2}$ [$\because i^2 = -1$]

$= \pm\sqrt{(3 + 4i)^2} = \pm(3 + 4i)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৬ $z = x + iy, f(x) = 3x + 1$

$P_1 = a + ib, P_2 = c + id$

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. উদ্দীপকের আলোকে $|2z - 1| = |z - 2|$ হলে, সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. $m : n = P_1 : P_2$ হলে উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$(c^2 + d^2)\frac{m}{n} + (a^2 + b^2)\frac{n}{m} = 2(bd + ac)$ ৪

গ. $\frac{1}{|f(x)|} \geq 5 \left[x \neq -\frac{1}{3}\right]$ সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৭(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫১

খ দেওয়া আছে, $\frac{m}{n} = \frac{a + ib}{c + id}$

বা, $m(c + id) = n(a + ib)$ বা, $cm + idm = an + ibn$

বা, $idm - ibn = an - cm$ বা, $i(dm - bn) = (an - cm)$

বা, $i^2(dm - bn)^2 = (an - cm)^2$ [বর্গ করে]

বা, $-(d^2m^2 - 2bdmn + b^2n^2) = a^2n^2 - 2acmn + c^2m^2$

বা, $-d^2m^2 + 2bdmn - b^2n^2 = a^2n^2 - 2acmn + c^2m^2$

বা, $(a^2 + b^2)n^2 + (c^2 + d^2)m^2 = 2(ac + bd)mn$

বা, $(c^2 + d^2)m^2 - 2(ac + bd)mn + (a^2 + b^2)n^2 = 0$

বা, $(c^2 + d^2)\frac{m}{n} - 2(ac + bd) + (a^2 + b^2)\frac{n}{m} = 0$

[উভয় পক্ষকে mn দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(c^2 + d^2)\frac{m}{n} + (a^2 + b^2)\frac{n}{m} = 2(bd + ac)$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = 3x + 1$

এখন, $\frac{1}{|f(x)|} \geq 5, x \neq -\frac{1}{3}$

$\frac{1}{|3x + 1|} \geq 5, x \neq -\frac{1}{3}$

বা, $|3x + 1| \leq \frac{1}{5}, x \neq -\frac{1}{3}$ বা, $-\frac{1}{5} \leq 3x + 1 \leq \frac{1}{5}, x \neq -\frac{1}{3}$

বা, $-\frac{6}{5} \leq 3x \leq -\frac{4}{5}$ [(−1) যোগ করে], $x \neq -\frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{6}{15} \leq x \leq -\frac{4}{15}, x \neq -\frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15}, x \neq -\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{-4}{15}, x \neq -\frac{1}{3}\right\}$



প্রশ্ন ▶২৭ $z = -8 - 6i$ এবং $a = x + y\omega + z\omega^2, b = x + y\omega^2 + z\omega$।

[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]

ক. $-1 + \sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট ও মডুলাস নির্ণয় কর। ২

খ. $\sqrt{z}$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $x + y + z = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^3 + b^3 = 27xyz$। ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $z = -1 + i\sqrt{3}$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$ **(Ans.)**

এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

খ এখানে, $z = -8 - i6$

বা, $\sqrt{z} = \pm\sqrt{-8 - i6} = \pm\sqrt{1 - 9 - i6}$

$= \pm\sqrt{1 + (i3)^2 - i6} = \pm\sqrt{1^2 - 2.1.i3 + (i3)^2}$

$= \pm\sqrt{(1 - i3)^2} = \pm(1 - i3)$ **(Ans.)**

গ উদ্দীপক থেকে পাই, $a = x + y\omega + z\omega^2$

$b = x + y\omega^2 + z\omega$

এখন, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a + b)\{a^2 + (\omega + \omega^2)ab + b^2\}$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$= (a + b)(a^2 + \omega ab + \omega^2 ab + b^2\omega^3)$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= (a + b)\{a(a + \omega b) + b\omega^2(a + b\omega)\}$

$= (a + b)(a + \omega b)(a + \omega^2 b)$

$a + b = x + y\omega + z\omega^2 + x + y\omega^2 + z\omega$

$= 2x + y(\omega + \omega^2) + z(\omega + \omega^2)$

$= 2x - y - z$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$a + \omega b = x + y\omega + z\omega^2 + \omega(x + y\omega^2 + z\omega)$

$= x + y\omega + z\omega^2 + x\omega + y\omega^3 + z\omega^2$

$= x + y\omega + z\omega^2 + x\omega + y + z\omega^2$

$= x(1 + \omega) + y(1 + \omega) + 2z\omega^2$

$= -x\omega^2 - y\omega^2 + 2z\omega^2 = \omega^2(-x - y + 2z)$

$a + \omega^2 b = x + y\omega + z\omega^2 + \omega^2(x + y\omega^2 + z\omega)$

$= x + y\omega + z\omega^2 + \omega^2 x + y\omega^4 + z\omega^3$

$= x + y\omega + z\omega^2 + x\omega^2 + y\omega + z = x(1 + \omega^2) + 2y\omega + z(1 + \omega^2)$

$= -x\omega + 2y\omega - z\omega = \omega(-x - z + 2y)$

$\therefore a^3 + b^3 = (x + y\omega + z\omega^2)^3 + (x + y\omega^2 + z\omega)^3$

$= (2x - y - z)(-x - y + 2z)(-x - z + 2y)\omega^3$

$= (2x - y - z)(2y - x - z)(2z - x - y).1$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= \{3x - (x + y + z)\}\{3y - (x + y + z)\}\{3z - (x + y + z)\}$

$= (3x - 0)(3y - 0)(3z - 0)$ [$\because x + y + z = 0$]

$= 3x.3y.3z = 27xyz$

$\therefore a^3 + b^3 = 27xyz$ **(প্রমাণিত)**

★ জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ ও এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট

১. $-2i - 3$ জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় কোনটি? (মধ্যম)
(ক) $(-2, -3)$ (খ) $(-2, 3)$
(গ) $(-3, -2)$ (ঘ) $(-3, 2)$ **(গ)**

২. জটিল সংখ্যার আকার কোনটি? (সহজ)
(ক) $x + iy$ (খ) $3 + \sqrt{2}$
(গ) $5 - \sqrt{2}$ (ঘ) $x + y$ **(ক)**

৩. i এর শক্তি যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে এর মান কোনটি? (মধ্যম)
(ক) ± 1 (খ) $\pm i$
(গ) $\pm 1, \pm i$ (ঘ) $1 \pm i$ **(গ)**

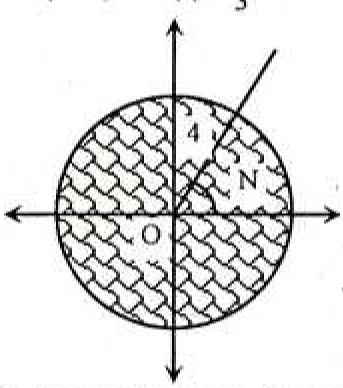
৪. $1 + \sqrt{2}i$ জটিল সংখ্যাটির অবস্থান y-অক্ষ হতে কত একক দূরে? (সহজ)
(ক) 1 (খ) $\sqrt{2}$
(গ) i (ঘ) $1 + \sqrt{2}$ **(ক)**

৫. $a + ib = 0$ বলতে কি বুঝায়? (সহজ)
(ক) $a = 0, b = 0$ (খ) $a = 0, b \neq 0$
(গ) $a \neq 0, b = 0$ (ঘ) $a \neq 0, b \neq 0$ **(ক)**

ব্যাখ্যা: $a + ib = 0$ বা, $a + ib = 0 + i0$
$\therefore a = 0, b = 0$

৬. আর্গন্ড চিত্রের বিন্দুসমূহের যে সেটটির জন্য $|z| \leq 4$ এবং আর্গুমেন্ট $(z) = \frac{\pi}{3}$ খাটে তার জ্যামিতিক প্রতিরূপ কোনটি? (মধ্যম)
(ক) একটি বৃত্ত ও একটি রেখা
(খ) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ
(গ) একটি বৃত্তের অংশক
(ঘ) একটি অসীমের বিস্তৃত রেখার অংশ **(খ)**

ব্যাখ্যা: $|z| \leq 4$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4$
$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4^2$
যাহা একটি বৃত্তের সমীকরণ।
আবার, আর্গুমেন্ট $(z) = \frac{\pi}{3}$



$\therefore$ চিত্র থেকে বলা যায় যে প্রদত্ত শর্তে এটি একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

৭. আর্গন্ড চিত্রে x ও y-অক্ষদ্বয়কে কি বলে? (সহজ)
(ক) বাস্তব ও কাল্পনিক অক্ষ
(খ) কাল্পনিক ও বাস্তব অক্ষ
(গ) আর্গন্ড অক্ষ
(ঘ) কার্তেসীয় অক্ষ **(ক)**

৮. জটিল সংখ্যা ব্যতীত সংখ্যা কোনটি? (সহজ)
(ক) 2 (খ) $a + ib$
(গ) $\sqrt{a + ib}$ (ঘ) $2 + 3i$ **(ক)**

৯. যেকোনো জটিল সংখ্যার মূল নিম্নের কোনটি? (মধ্যম)
(ক) বাস্তব সংখ্যা (খ) মৌলিক সংখ্যা
(গ) জটিল সংখ্যা (ঘ) কাল্পনিক সংখ্যা **(গ)**

১০. $a - ib = -1 - i$ হলে b এর মান কত? (মধ্যম)
(ক) -1 (খ) 1
(গ) i (ঘ) $-i$ **(খ)**

১১. $1 + i\sqrt{3}$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? (সহজ)
(ক) $\frac{\pi}{2}$ (খ) $\frac{\pi}{3}$
(গ) $\frac{\pi}{5}$ (ঘ) $\frac{\pi}{6}$ **(খ)**

১২. $-1 + \sqrt{3}i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? (মধ্যম)
(ক) $-\pi$ (খ) $\frac{\pi}{3}$
(গ) $\frac{2\pi}{3}$ (ঘ) π **(গ)**

১৩. i-এর নতির (আর্গুমেন্টের) সাধারণ মান কত? (সহজ)
(ক) $2n\pi$ (খ) $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$
(গ) $n\pi$ (ঘ) $\frac{n\pi}{2}$ **(খ)**

১৪. $-2 - 2i$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট কত? (সহজ)
(ক) $\frac{\pi}{4}$ (খ) $\frac{2\pi}{3}$
(গ) $\frac{5\pi}{4}$ (ঘ) $\frac{\pi}{3}$ **(গ)**

ব্যাখ্যা: আর্গুমেন্ট $= \pm\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-2}\right|$
$= \pm\pi + \frac{\pi}{4}$
$= -\frac{3\pi}{4}$ বা, $\frac{5\pi}{4}$

১৫. $-2\sqrt{3} + 6i$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? (সহজ)
(ক) $-\frac{\pi}{3}$ (খ) $\frac{\pi}{3}$
(গ) $\frac{2\pi}{3}$ (ঘ) $-\frac{2\pi}{3}$ **(গ)**

ব্যাখ্যা: $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{6}{-2\sqrt{3}}\right|$
$= \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3})$
$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

১৬. $-1-\sqrt{3}i$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? (সহজ)

ক $-\frac{\pi}{3}$ খ $\frac{\pi}{3}$
গ $\frac{2\pi}{3}$ ঘ $-\frac{2\pi}{3}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| - \pi$
$= \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \pi$
$= \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$

১৭. এককের জটিল মূলদ্বয় কিরূপ? (মধ্যম)

ক পরস্পর অনুবন্ধী
খ একটি অপরটির বর্গ
গ একটি অপরটির উল্টা
ঘ সবগুলি সত্য **ঘ**

১৮. $-1-i$ জটিল সংখ্যার পরম মান কত? (মধ্যম)

ক -1 খ 0
গ 1 ঘ $\sqrt{2}$ **ঘ**

১৯. $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? (সহজ)

ক $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ খ $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$
গ $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ ঘ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ **ক**

২০. $12+5i$ এর পরমমান কোনটি? (সহজ)

ক 12 খ 13
গ 14 ঘ 15 **খ**

২১. $\sqrt{3}+i$ এর পরমমান কোনটি? (সহজ)

ক 0 খ 1
গ 2 ঘ 3 **গ**

২২. $z=-1+i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস কোনটি? (সহজ)

ক 1 খ -2
গ $\sqrt{2}$ ঘ $\sqrt{3}$ **গ**

২৩. $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}}$ এর মান ও নতি কোনটি? (মধ্যম)

ক $0, 0$ খ $-2i, -\frac{\pi}{2}$
গ $2i, \frac{\pi}{2}$ ঘ $-2, -\pi$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{i-\frac{1}{i}}{i+\frac{2}{i}} = \frac{i^2-1}{i^2+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$

$\therefore$ নতি $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{0}{-2}\right| = 0 = \tan\pi$

$\therefore$ $\theta = \pi$

২৪. $i^{-1} = ?$ (সহজ)

ক i খ $-i$
গ 1 ঘ -1 **খ**

ব্যাখ্যা: $i^{-1} = \frac{1}{i}$
$= \frac{i}{i.i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1}$ $[\because i^2=-1]$
$= -i$

২৫. i^{4n+3} এর মান কত? (মধ্যম)

ক $-i$ খ i
গ -1 ঘ 1 **ক**

২৬. $2-3i$ জটিল সংখ্যাটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে? (সহজ)

ক চতুর্থ খ তৃতীয়
গ দ্বিতীয় ঘ প্রথম **ক**

২৭. আর্গন্ড চিত্রে $|z|=2$ এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ কিরূপ? (মধ্যম)

ক একটি সরলরেখা খ একটি প্যারাবোলা
গ একটি উপবৃত্ত ঘ একটি বৃত্ত **ঘ**

২৮. $z=x+iy$ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট θ হলে, θ এর সীমাবদ্ধতা নিম্নের কোনটি? (কঠিন)

ক $-\pi < \theta \le \pi$ খ $0 < \theta < \pi$
গ $-\pi < \theta < \frac{\pi}{2}$ ঘ $0 < \theta < 2\pi$ **ক**

২৯. $3-4i$ জটিল সংখ্যাকে $4-3i$ জটিল সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{25}(24+7i)$ খ $\frac{1}{25}(-24-7i)$
গ $\frac{1}{25}(24-7i)$ ঘ $\frac{1}{25}(-24+7i)$ **গ**

৩০. $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ জটিল সংখ্যার মডুলাস কোনটি? (মধ্যম)

ক 1 খ -1
গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **ক**

৩১. $1+\sqrt{3}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নিচের কোনটি? (সহজ)

ক 2 ও $\frac{\pi}{3}$ খ 4 ও $\frac{\pi}{3}$
গ 2 ও $\frac{\pi}{6}$ ঘ 4 ও $\frac{\pi}{6}$ **ক**

ব্যাখ্যা: মডুলাস $= \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{1+3}$
$= \sqrt{4} = 2$

এবং আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

৩২. $2 + 3i$ এর মডুলাস কত? (সহজ)

(ক) $\sqrt{6}$ (খ) $\sqrt{13}$

(গ) 2 (ঘ) 3 — খ

৩৩. $(1+\sqrt{3}i)^n$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\frac{\pi}{3}$ (খ) $\frac{n\pi}{3}$

(গ) $\frac{2n\pi}{3}$ (ঘ) $\frac{n\pi}{6}$ — খ

৩৪. $1 - i$ এর আর্গুমেন্ট কত? (মধ্যম)

(ক) $-45°$ (খ) $90°$

(গ) $135°$ (ঘ) $180°$ — ক

ব্যাখ্যা: যেহেতু $x > 0$ এবং $y < 0$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= -\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{-1}{1}\right| = -45°$

৩৫. $z = i$ এর আর্গুমেন্ট (নতি)-এর সাধারণ মান কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (খ) $n\pi$

(গ) $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (ঘ) $2n\pi$ — গ

৩৬. $z = 1$ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট নিম্নের কোনটি? (সহজ)

(ক) $-\frac{\pi}{2}$ (খ) 0

(গ) $\frac{\pi}{2}$ (ঘ) π — খ

৩৭. $i + i^2 + i^3 + i^4$ এর মান কোনটি? (সহজ)

(ক) 0 (খ) 1

(গ) $-i$ (ঘ) i — ক

ব্যাখ্যা: $i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$

৩৮. $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $-\frac{\pi}{2}$ (খ) $\frac{\pi}{2}$

(গ) $-\pi$ (ঘ) π — ক

৩৯. $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ হলে $z_1 + z_2$ এর অবস্থান কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত? (সহজ)

(ক) প্রথম (খ) দ্বিতীয়

(গ) তৃতীয় (ঘ) চতুর্থ — খ

৪০. $z_1 = 2 + i$ এবং $z_2 = 3 + i$ হলে $z_1\bar{z_2}$ এর মডুলাস কত? (মধ্যম)

(ক) 6 (খ) $5\sqrt{2}$

(গ) 7 (ঘ) $5\sqrt{3}$ — খ

৪১. $z = x + iy$ হলে $\frac{1}{i}(z + \bar{z})(z - \bar{z})$ এর মান কোনটি? (কঠিন)

(ক) $4xy$ (খ) $4ixy$

(গ) $-4xy$ (ঘ) $-4ixy$ — ক

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{i}(z + \bar{z})(z - \bar{z})$

$= \frac{1}{i}(x + iy + x - iy)(x + iy - x + iy)$

$= \frac{1}{i} \times 2x \times 2iy = 4xy$

৪২. $z = 6 - 3i$ হলে $z + \bar{z} =$ কত? (সহজ)

(ক) 6 (খ) 8

(গ) 10 (ঘ) 12 — ঘ

৪৩. $x + iy = i^2$ হলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) i (খ) -1

(গ) 0 (ঘ) অসংজ্ঞায়িত — ঘ

৪৪. $z = x + iy$ হলে $\frac{|z+1|}{|z+i|} = 1$ কী নির্দেশ করে? (কঠিন)

(ক) সরলরেখা (খ) বৃত্ত

(গ) পরাবৃত্ত (ঘ) উপবৃত্ত — ক

ব্যাখ্যা: $\frac{x + 1 + iy}{x + (1 + y)i} = 1$

বা, $\sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2} = \sqrt{x^2 + 1 + 2y + y^2}$

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + 1 + 2y + y^2$

বা, $x = y$ সরলরেখা

৪৫. $z = x + iy$ হলে $|z + 1| = 5$ সমীকরণটি কোনটি নির্দেশ করে? (মধ্যম)

(ক) উপবৃত্ত (খ) পরাবৃত্ত

(গ) অধিবৃত্ত (ঘ) বৃত্ত — ঘ

ব্যাখ্যা: $|z + 1| = 5$

বা, $|x + 1 + iy| = 5$

$\therefore (x + 1)^2 + y^2 = 5^2$

এটি বৃত্তের সমীকরণ।

৪৬. $z = x + iy$ হলে $z\bar{z} = 4$ কি নির্দেশ করে? (মধ্যম)

(ক) বৃত্ত (খ) উপবৃত্ত

(গ) অধিবৃত্ত (ঘ) পরাবৃত্ত — ক

ব্যাখ্যা: $z = x + iy \therefore \bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$

অতএব $z\bar{z} = 4$

বা, $(x + iy)(x - iy) = 4$ বা, $x^2 - i^2y^2 = 4$

$\therefore x^2 + y^2 = 4$ $[\because i^2 = -1]$

যাহা বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

৪৭. $|z - 2| = 4$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ কি? (মধ্যম)

(ক) সরলরেখা (খ) বৃত্ত

(গ) পরাবৃত্ত (ঘ) উপবৃত্ত — খ

ব্যাখ্যা: $|x + iy - 2| = 4$ বা, $(x - 2)^2 + y^2 = 16$ যা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

৪৮. $\left|\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)(3 - 4i)\right|$ এর মান কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{5}$ খ 0
গ 1 ঘ 5 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\left|\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)(3 - 4i)\right|$

$= \left|\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right| |3 - 4i|$

$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{8}{9}} . \sqrt{9 + 16} = 1.5 = 5$

৪৯. $a, b > 0$ হলে $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\sqrt{ab}$ খ $-\sqrt{ab}$
গ ab ঘ $-ab$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{i^2a}\sqrt{i^2b} = i\sqrt{a}.i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$

৫০. $\sqrt{-4} \times \sqrt{-1} =$ কোনটি? (মধ্যম)

ক -2 খ $\sqrt{2}$
গ $\pm\sqrt{2}$ ঘ $\sqrt{2}i$ **ক**

৫১. $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1}$ এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $4i$ খ 4ω
গ -4 ঘ 4 **গ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1} = 4i \times i = 4i^2 = -4.$

৫২. যদি $c, d \in \mathbb{R}$ হয় তবে $\sqrt{-c} \times \sqrt{-d}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\sqrt{cd}$ খ $-\sqrt{cd}$
গ $\sqrt{icd}$ ঘ $\sqrt{-cd}$ **খ**

৫৩. $2 + i = p + iq$ হলে $p^2 + q^2$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক 2 খ 3
গ 5 ঘ 7 **গ**

৫৪. $z = x + iy$ জটিল রাশির আর্গুমেন্ট $-\frac{\pi}{4}$ হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নিম্নের কোনটি? (মধ্যম)

ক $x + y = 0$ খ $x - y = 0$
গ $x + y = 1$ ঘ $x + y = -1$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\tan\theta = \frac{y}{x}$ বা, $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{x}$

বা, $-1 = \frac{y}{x}$ $\therefore x + y = 0$

৫৫. $2 + i = a + ib$ হলে $a^2 + b^2$ এর মান কোনটি? (সহজ)

ক 3 খ 5
গ 2 ঘ 7 **খ**

ব্যাখ্যা: $2 + i = a + ib$

$\therefore$ $a = 2$ এবং $b = 1$

$\therefore$ $a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

৫৬. $p + iq$ জটিল সংখ্যা বাস্তব সংখ্যা হবে যদি—

i. $p = 0$ হয়
ii. $q = 0$ হয়
iii. $p = q = 0$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

৫৭. a ও b দুইটি সংখ্যায় —

i. $a^2 > 0$ হলে a বাস্তব
ii. $b^2 < 0$ হলে b কাল্পনিক
iii. a বাস্তব হলে a কে সংখ্যারেখার মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় কিন্তু আর্গন্ডের চিত্রে চিত্রিত করা যায় না।

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৫৮. জটিল রাশির ক্ষেত্রে —

i. অনুবন্ধী দুইটি জটিল রাশির যোগফল কাল্পনিক
ii. কোনো জটিল সংখ্যার বর্গমূল একটি জটিল সংখ্যা
iii. এককের ঘনমূলের যোগফল শূন্য

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

ব্যাখ্যা: (i) $a + ib$ এবং $a - ib$ দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশি তাদের যোগফল $a + ib + a - ib = 2a$ যা বাস্তব রাশি।

$a + ib$ একটি জটিল সংখ্যা। a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা।

৫৯. ধরি, $Y = 3 - 5i$, এখানে—

i. Y একটি জটিল সংখ্যা
ii. Y একটি বাস্তব সংখ্যা
iii. Y এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করা যায়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i খ iii
গ i ও iii ঘ ii ও iii **গ**

৬০. $n \in \mathbb{Z}$ হলে i এর শক্তির ক্ষেত্রে—

i. $i^{4n} = 1$
ii. $\frac{i^{2n}}{i} = -1$
iii. $i^{8n-4} = 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬১ ও ৬২)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$z_1 = -4i$ এবং $z_2 = -1 - i$ দুইটি জটিল সংখ্যা।

৬১. z_1z_2 এর পরমমান কত? (কঠিন)

ক $4\sqrt{2}$ খ $2\sqrt{2}$

গ $\sqrt{2}$ ঘ 1 **ক**

ব্যাখ্যা: $z_1 . z_2 = -4i(-1-i) = 4i - 4 = -4 + 4i$

$\therefore |z_1 . z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

৬২. $\frac{z_2}{z_1}$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? (কঠিন)

ক $-45°$ খ $45°$

গ $90°$ ঘ $135°$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{-1-i}{-4i} = \frac{1}{4i} + \frac{1}{4} = \frac{-i}{4} + \frac{1}{4}$

যেহেতু $x > 0$ এবং $y < 0$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)$

$= -\tan^{-1}(1) = -45°$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (৬৩ ও ৬৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$z = x + iy$ এবং $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$

৬৩. z_1 এর মডুলাস কোনটি? (সহজ)

ক $\sqrt{2}$ খ 2

গ $\sqrt{3}$ ঘ 4 **খ**

৬৪. $|2z - z_1| = 1$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ কোনটি? (মধ্যম)

ক বৃত্ত খ পরাবৃত্ত

গ উপবৃত্ত ঘ অধিবৃত্ত **ক**

ব্যাখ্যা: $|2z - z_1| = 1$

বা, $|2x + i2y + 1 - \sqrt{3}i| = 1$

বা, $|(2x+1) + i(2y - \sqrt{3})| = 1$

বা, $(2x+1)^2 + (2y - \sqrt{3})^2 = 1^2$

বা, $4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 - 4\sqrt{3}y + 3 = 1$

বা, $4x^2 + 4y^2 + 4x - 4\sqrt{3}y + 3 = 0$

যা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

$z = 2i$ হলে, নিচের (৬৫ ও ৬৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৬৫. z এর আর্গুমেন্ট কোনটি? (সহজ)

ক 0 খ $\frac{\pi}{2}$

গ $\frac{\pi}{4}$ ঘ π **খ**

৬৬. z এর বর্গমূল কোনটি? (সহজ)

ক $-i$ খ $2i$

গ $\pm(1-i)$ ঘ $\pm(1+i)$ **ঘ**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (৬৭ ও ৬৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$z = 4 - 3i$ একটি জটিল সংখ্যা।

৬৭. z এর মডুলাস কোনটি? (সহজ)

ক $\sqrt{5}$ খ $\sqrt{7}$

গ 5 ঘ 7 **গ**

৬৮. z এর আর্গুমেন্ট কোনটি? (মধ্যম)

ক $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ খ $-\tan^{-1}\frac{3}{4}$

গ $\pi - \tan^{-1}\frac{4}{3}$ ঘ $-\pi + \tan^{-1}\frac{4}{3}$ **খ**

★ অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, জটিল সংখ্যার ধর্ম জটিল সংখ্যার যোগ-বিয়োগ ও গুণের জ্যামিতিক প্রতিরূপ

৬৯. $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? (সহজ)

ক $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ খ $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

গ $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ ঘ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ **খ**

৭০. $z = 10 + 5i$ হলে $z\bar{z} =$ কত? (সহজ)

ক 100 খ 105

গ 115 ঘ 125 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $z = 10 + 5i$ হলে $\bar{z} = 10 - 5i$

$\therefore z\bar{z} = (10 - 5i)(10 + 5i)$

$= (10)^2 - (5i)^2$

$= 100 + 25$

$= 125$

৭১. $\left(\overline{z - \bar{z}}\right)$ এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক $-4\sqrt{2}i$ খ $-2\sqrt{2}i$

গ $2\sqrt{2}i$ ঘ $4\sqrt{2}i$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $z = 2 - 2\sqrt{2}i$ হলে $\bar{z} = 2 + 2\sqrt{2}i$

$z - \bar{z} = -4\sqrt{2}\,i$

$\therefore \left(\overline{z - \bar{z}}\right) = 4\sqrt{2}i$

৭২. $z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i$ হলে, $z\bar{z}$ এর মান কোনটি? (সহজ)

ক $-\frac{5}{3}$ খ $-\frac{3}{5}$

গ $\frac{3}{5}$ ঘ $\frac{5}{3}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $z\bar{z} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}i\right)$

$= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

৭৩. $-3i - 2$ এর অনুবন্ধি সংখ্যা কোনটি? (সহজ)

ক $2i - 3$ খ $2 + 3i$
গ $-2 - 3i$ ঘ $-2 + 3i$ **ঘ**

৭৪. $\frac{1+i}{1-i}$ কে A + iB রূপে প্রকাশ করলে এর মান কত? (মধ্যম)

ক 0 খ 1
গ $-i$ ঘ i **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i^2+2i}{1-i^2}$

$= \frac{1-1+2i}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$

৭৫. n এর ধনাত্মক সর্বনিম্ন অখণ্ড মান কত যার জন্যে $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$? (মধ্যম)

ক 2 খ 3
গ 4 ঘ 6 **গ**

ব্যাখ্যা: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$

$i^4 = 1$

$\therefore n = 4$

৭৬. $4 + 3i$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা নিম্নের কোনটি? (সহজ)

ক $-3 - 4i$ খ $-4 + 3i$
গ $4 - 3i$ ঘ $3 - 4i$ **গ**

৭৭. $3 + \sqrt{-2}$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা নিম্নের কোনটি? (সহজ)

ক $-3 + \sqrt{2}$ খ $3 - \sqrt{2}$
গ $-3 + \sqrt{2}i$ ঘ $3 - \sqrt{2}i$ **ঘ**

৭৮. a + ib জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী কত? (সহজ)

ক $-a + ib$ খ $-a - ib$
গ $a - ib$ ঘ $b - ia$ **গ**

৭৯. $-2 + 3i$ জটিল সংখ্যাটির অনুবন্ধী জটিল কোনটি? (সহজ)

ক $2 + 3i$ খ $2 - 3i$
গ $-2 - 3i$ ঘ $-2 + 3$ **গ**

৮০. $\frac{a+ib}{x+iy}$ কে A + iB আকারে প্রকাশ কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{ax-by}{x^2+y^2} + i\frac{bx-ay}{x^2+y^2}$
খ $\frac{ax+by}{x^2+y^2} + i\frac{bx-ay}{x^2+y^2}$
গ $\frac{ax-by}{x^2-y^2} + i\frac{bx-ay}{x^2+y^2}$
ঘ $\frac{ax+by}{x^2-y^2} + i\frac{bx-ay}{x^2-y^2}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\frac{(a+ib)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}$

$= \frac{ax - iay + ibx + by}{x^2+y^2}$

$= \frac{ax+by}{x^2+y^2} + \frac{i(bx-ay)}{x^2+y^2}$

৮১. $\sqrt{-49}$ কে bi আকার কোনটি? যেখানে, b ∈ ℝ. (সহজ)

ক 49i খ −7i
গ 7i ঘ 0 **গ**

৮২. $\sqrt{-28}$ কে bi আকার কোনটি? যেখানে b ∈ ℝ. (সহজ)

ক −28i খ $2\sqrt{7}i$
গ 28i ঘ 0 **খ**

৮৩. $(2 - 5i) - (5 - 12i)$ কে a + bi আকার কোনটি? যেখানে a, b ∈ ℝ. (সহজ)

ক $3 + 7i$ খ $-3 - 7i$
গ $3 + 7i$ ঘ $-3 + 7i$ **ঘ**

৮৪. $(2 + 3i) - (2 - 3i)$ কে a + bi আকার কোনটি? যেখানে a, b ∈ ℝ. (সহজ)

ক 5i খ 6i
গ 7i ঘ 0 **খ**

৮৫. $i^2 = -1$ হলে $\frac{i^{-1} - i}{2i^{-1} + i}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক −2i খ 2i
গ −2 ঘ 2 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{i^{-1}-i}{2i^{-1}+i} = \frac{\frac{1}{i} - i}{\frac{2}{i} + i} = \frac{\frac{1-i^2}{i}}{\frac{2-1}{i}} = \frac{1-i^2}{i} \times \frac{i}{1}$

$= 1 + 1 = 2$

৮৬. a + ib ও তার অনুবন্ধীর মডুলাসের পার্থক্য কোনটি? (সহজ)

ক $\sqrt{a^2 - b^2}$ খ $\sqrt{a^2 + b^2}$
গ $a - b$ ঘ শূন্য **ঘ**

ব্যাখ্যা: $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|a - ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\therefore |a + ib| - |a - ib| = \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b^2} = 0$

৮৭. $\frac{2}{1 - i\sqrt{3}}$ এর x + iy আকার কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ খ $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$
গ $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ ঘ $\frac{1}{3}(3 + i\sqrt{2})$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$

$= \frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1)^2-(i\sqrt{3})^2}$

$= \frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i^2 3} = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{1+3}$

$= \frac{2(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

৮৮. $1 + i\sqrt{3}$ এর $\cos\theta + i\sin\theta$ আকার কোনটি? (মধ্যম)

ক $2(\cos 30° + i\sin 30°)$
খ $2(\cos 60° + i\sin 60°)$
গ $(\cos 120° + i\sin 120°)$
ঘ $2\cos(150° + i\sin 150°)$ — খ

ব্যাখ্যা: $2(\cos 60° + i\sin 60°)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 + i\sqrt{3}$

৮৯. $z = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$ হলে z এর সঙ্গে কোনটির যোগফল ও গুণফল বাস্তব সংখ্যা হবে? (সহজ)

ক $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{3}i)$ খ $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$
গ $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ ঘ $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-2i)$ — খ

ব্যাখ্যা: $z = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$ $\therefore \bar{z} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$

$z + \bar{z} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i) = 1$

$z\bar{z} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i).\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) = \frac{1}{4}(1+3) = 1$

৯০. $(2 + \omega + 2\omega^5)^6 = ?$ (মধ্যম)

ক 792 খ 729
গ 279 ঘ 722 — খ

ব্যাখ্যা: $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^6 = \{2(1+\omega^2) + 5\omega\}^6$

$= (-2\omega + 5\omega)^6 = (3\omega)^6 = 729\omega^6 = 729$

৯১. $\left|\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\left(\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i\right)\right|$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক 0 খ $\frac{3}{5}$
গ 1 ঘ $\sqrt{2}$ — গ

৯২. সরল কর, $(5 + i)(3 + 4i)$ (কঠিন)

ক $11 - 23i$ খ $10 - 23i$
গ $10 + 23i$ ঘ $11 + 23i$ — ঘ

ব্যাখ্যা: $(5+i)(3+4i) = 15 + 3i + 20i + 4i^2$

$= 15 + 23i - 4$

$= 11 + 23i$

৯৩. $|12 - 5i| = ?$ (সহজ)

ক 119 খ 7
গ 13 ঘ $\sqrt{119}$ — গ

ব্যাখ্যা: $|12 - 5i| = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

৯৪. $\left|\frac{x+iy}{x-iy}\right| = ?$ (মধ্যম)

ক 1 খ −1
গ i ঘ −i — ক

ব্যাখ্যা: $\left|\frac{x+iy}{x-iy}\right| = \frac{|x+iy|}{|x-iy|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$

৯৫. $z = x + iy$ হলে $|z - 1| = |z + 1|$ কী নির্দেশ করে? (মধ্যম)

ক সরলরেখা খ বৃত্ত
গ পরাবৃত্ত ঘ অধিবৃত্ত — ক

ব্যাখ্যা: $|x + iy - 1| = |x + iy + 1|$

বা, $(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2$

বা, $x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$

বা, $4x = 0$

$\therefore x = 0$ যা সরলরেখার সমীকরণ

৯৬. $|z - z_1| = |z_2|^2$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত বক্ররেখা কোনটি? (মধ্যম)

ক সরলরেখা খ বৃত্ত
গ উপবৃত্ত ঘ অধিবৃত্ত — খ

৯৭. $|x + iy| = 5$ সমীকরণটি কোনটি নির্দেশ করে? (সহজ)

ক বৃত্ত খ পরাবৃত্ত
গ উপবৃত্ত ঘ অধিবৃত্ত — ক

ব্যাখ্যা: $|x + iy| = 5$ বা, $x^2 + y^2 = 5^2$

৯৮. $x - 4i$ ও $-3 + iy$ পরস্পর অনুবন্ধী হলে xy এর মান কত? (মধ্যম)

ক −12 খ −3
গ 4 ঘ 12 — ক

৯৯. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $-3 + 4i$ হলে অপর মূলটি হবে — (সহজ)

ক $3 + 4i$ খ $-3 + 4i$
গ $3 - 4i$ ঘ $-3 - 4i$ — ঘ

১০০. $\frac{1}{1-i}$ এর বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমষ্টি কত? (কঠিন)

ক −1 খ 0
গ 1 ঘ 2 — গ

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{1+1}$

$= \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\therefore$ বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমষ্টি $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

১০১. $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ $1+i$ ⓚⓗ $1-i$
ⓖ -2 ⓖⓗ 2 **ক**

✍ ব্যাখ্যা: $\frac{i}{1-\frac{1}{\frac{i-1}{i}}} = \frac{i}{1-\frac{i}{i-1}} = \frac{i}{\frac{i-1-i}{i-1}}$

$= \frac{i}{\frac{-1}{i-1}} = -i(i-1) = -i^2+i = 1+i$

১০২. $(2+t)+i(1-t^2)$ যদি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে t এর মান কত? (কঠিন)

ক -2 খ 0
গ 1 ঘ ± 1 **ঘ**

✍ ব্যাখ্যা: বাস্তব সংখ্যা হলে i এর সহগ শূন্য

$\therefore 1-t^2=0$ বা, $t^2=1$ $\therefore t=\pm 1$

১০৩. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ সমীকরণের মূলের সংখ্যা কত? (সহজ)

ক 0 খ 1
গ 2 ঘ 3 **ঘ**

১০৪. $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ সমীকরণের মূলের সংখ্যা কত? (সহজ)

ক 1 খ 2
গ 3 ঘ 4 **ঘ**

১০৫. $(3-4i)(3+4i) = p+iq$ হলে pq এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক -16 খ 0
গ 9 ঘ 25 **খ**

✍ ব্যাখ্যা: $(3-4i)(3+4i)=p+iq$

বা, $9-16i^2=p+iq$ বা, $9+16=p+iq$ বা, $25=p+iq$

$\therefore p=25, q=0$

$\therefore pq = 25\times 0 = 0$

১০৬. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $6+5i$ হলে অপর মূলটি কত? (সহজ)

ক 6 খ $5i$
গ $6-5i$ ঘ $-6-4i$ **গ**

১০৭. $x-iy$ একটি জটিল সংখ্যা হলে

i. মডুলাস $\sqrt{x^2+y^2}$

ii. আর্গুমেন্ট $\tan^{-1}\frac{y}{x}$

iii. অনুবন্ধী $x+iy$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

১০৮. z একটি জটিল সংখ্যা এবং এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\bar{z}$ হলে —

i. $|z|>|\bar{z}|$

ii. $z+\bar{z}$ এবং $z\bar{z}$ উভয়ই বাস্তব সংখ্যা।

iii. $|z|^2=z\bar{z}=|\bar{z}|^2$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i খ i, ii
গ ii, iii ঘ i, ii, iii **গ**

১০৯. $z=\frac{i}{1+i}$ জটিল সংখ্যার —

i. আর্গুমেন্ট $\frac{\pi}{4}$

ii. পোলার আকৃতি $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$

iii. কাল্পনিক অংশ $\frac{1}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

✍ ব্যাখ্যা: $z=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{2}=\frac{i+1}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$

১১০. $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হলে —

i. $a+\bar{a}=\sqrt{2}$

ii. $\arg a=\frac{\pi}{4}$

iii. $a^6=i$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

✍ ব্যাখ্যা: $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

বা, $a+\bar{a}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore \arg a=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{\pi}{4}$ এবং $a^6=-i$

১১১. $z=i-2$ হলে —

i. $z^2=3-4i$

ii. $z\bar{z}=-5$

iii. $|z|=\sqrt{5}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

✍ ব্যাখ্যা: $z = i - 2$ বা, $z^2 = -1 - 4i + 4 = 3 - 4i$

$\therefore z\bar{z} = (i-2)(-i-2) = (-2)^2 - i^2 = 5$

এবং $|\bar{z}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

১১২. $2 + 3i$ জটিল সংখ্যাটির —

i. মডুলাস $\sqrt{13}$

ii. আর্গুমেন্ট $\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

iii. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $2 - 3i$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১১৩. $1 + \sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যাটির—

i. মডুলাস = 2

ii. আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{3}$

iii. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $= -1 + \sqrt{3}i$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১১৪. $2i - 5$ জটিল সংখ্যাটির —

i. বাস্তব অংশ −5

ii. আর্গুমেন্ট $\tan^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right)$

iii. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $2i + 5$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১১৫. z_1 ও z_2 জটিল সংখ্যা হলে—

i. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

ii. $|z_1|\,|z_2| = |z_1 z_2|$

iii. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১১৬. $z_1 = 3 + i$ এবং $z_2 = 5 + i$ হলে —

i. $z_1 + \bar{z}_2 = 8$

ii. $z_1^2 + z_2^2 = 32 + 16i$

iii. $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{17}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

✍ ব্যাখ্যা: $z_1 + \bar{z}_2 = 3 + i + 5 - i = 8$

$\therefore z_1^2 + z_2^2 = (3+i)^2 + (5+i)^2$

$= 9 + 6i - 1 + 25 + 10i - 1 = 32 + 16i$

এবং $|z_1 + z_2| = |8 + 2i| = \sqrt{64 + 4} = 2\sqrt{17}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (১১৭ ও ১১৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$X = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ একটি জটিল সংখ্যা।

১১৭. X এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা কোনটি? (সহজ)

ক $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$ খ $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

গ $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ ঘ $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ **গ**

১১৮. X এর আর্গুমেন্ট কোনটি? (সহজ)

ক $\frac{-2\pi}{3}$ খ $\frac{-\pi}{3}$

গ $\frac{\pi}{3}$ ঘ $\frac{2\pi}{3}$ **ঘ**

✍ ব্যাখ্যা: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$

আর্গুমেন্ট, $\tan\theta = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}}\right| = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

যেহেতু $x < 0$ এবং $y > 0$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

নিচের তথ্যের আলোকে (১১৯ ও ১২০)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x = 1 + 2i$ ও $y = 2 + 3i$ দুইটি জটিল সংখ্যা

১১৯. $\frac{x}{y}$ এর পরমমান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ খ $\frac{13}{\sqrt{5}}$

গ $\frac{\sqrt{65}}{13}$ ঘ $\frac{13}{\sqrt{65}}$ **গ**

✍ ব্যাখ্যা: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$= \frac{\sqrt{1+4}}{\sqrt{4+9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$

$= \frac{\sqrt{5}.\sqrt{13}}{\sqrt{13}.\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{65}}{13}$

১২০. $\frac{x}{y} = p + iq$ হলে $p^2 + 1$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{8}{13}$ খ $\frac{64}{169}$

গ $\frac{65}{169}$ ঘ $\frac{233}{169}$ **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১২১ ও ১২২) প্রশ্নের উত্তর দাও:

$(1 + 2i)(3 - 4i) = a + ib$ একটি জটিল সমীকরণ

১২১. $a - ib$ এর মান কত? (কঠিন)

ক $11 + 2i$ খ $11 - 2i$

গ $2 + 11i$ ঘ $2 - 11i$ **খ**

ব্যাখ্যা: $(1 + 2i)(3 - 4i) = a + ib \Rightarrow 3 - 8i^2 + 6i - 4i = a + ib$
$\Rightarrow 3 + 8 + 2i = a + ib \Rightarrow 11 + 2i = a + ib$
$\therefore a = 11, b = 2$
$\therefore a - ib = 11 - 2i$

১২২. $\sqrt{a^2 + b^2}$ এর মান কত? (সহজ)
ক) 5 খ) $5\sqrt{5}$
গ) 25 ঘ) $25\sqrt{5}$ — খ

★ জটিল সংখ্যার বর্গমূল, এককের ঘনমূল

১২৩. $-i$ এর বর্গমূল কোনটি? (সহজ)
ক) $\pm\frac{1}{2}(1 + i)$ খ) $\pm\frac{1}{2}(1 - i)$
গ) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ ঘ) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ — গ

ব্যাখ্যা: $\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2}(-2i)}$
$= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - 2i - 1)}$
$= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - 2i + i^2)}$
$= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - i)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

১২৪. $\frac{5 + 12i}{3 - 4i}$ এর বর্গমূল কোনটি? (মধ্যম)
ক) $-1 + 3i$ খ) $\frac{\sqrt{5}}{7} + 2i$
গ) $\pm\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i\right)$ ঘ) $\pm\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right)$ — গ

ব্যাখ্যা: $\frac{(5 + 12i) \times (3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{15 - 48 + 56i}{9 + 16}$
$= \frac{-33 + 56i}{25}$
$\therefore \sqrt{\frac{-33 + 56i}{25}} = \pm\frac{1}{5}\sqrt{16 + 56i - 49}$
$= \pm\frac{1}{5}\sqrt{4^2 + 2.4.7i + (7i)^2}$
$= \pm\frac{1}{5}(4 + 7i)$

১২৫. $1 + \omega$ এর মান কত? (মধ্যম)
ক) 0 খ) 1
গ) $-\omega^2$ ঘ) ω^2 — গ

১২৬. $\cos\pi + i\sin\pi$ এর মান কত? (সহজ)
ক) 0 খ) i
গ) -1 ঘ) 1 — গ

১২৭. ω^{100} এর মান কত? (মধ্যম)
ক) 0 খ) 1
গ) ω ঘ) ω^2 — গ

১২৮. ω^3 এর মান কত? (সহজ)
ক) 0 খ) 1
গ) 2 ঘ) 3 — খ

১২৯. i^2 এর মান কত? (সহজ)
ক) 1 খ) -1
গ) 0 ঘ) -2 — খ

১৩০. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, ω^{242} এর মান নিম্নের কোনটি? (সহজ)
ক) 0 খ) 1
গ) ω ঘ) ω^2 — ঘ

ব্যাখ্যা: $\omega^{242} = \omega^{(3 \times 80) + 2} = \omega^2$

১৩১. i^{29} এর মান কত? (সহজ)
ক) -1 খ) 1
গ) $-i$ ঘ) i — ঘ

ব্যাখ্যা: $i^{29} = (i^2)^{14}.\, i = (-1)^{14}.\, i = i\ [\because i^2 = -1]$

১৩২. $i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots\ldots + i^{25}$ এর মান নিম্নের কোনটি? (মধ্যম)
ক) -1 খ) $-i$
গ) 1 ঘ) i — ঘ

১৩৩. $i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots\ldots + i^{24}$ এর মান নিম্নের কোনটি? (মধ্যম)
ক) 0 খ) $-i$
গ) 1 ঘ) i — ক

১৩৪. $i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots\ldots + i^{23}$ এর মান নিম্নের কোনটি? (মধ্যম)
ক) 1 খ) -1
গ) i ঘ) $-i$ — খ

১৩৫. i^{-49} এর মান কোনটি? (মধ্যম)
ক) 1 খ) -1
গ) i ঘ) $-i$ — ঘ

ব্যাখ্যা: $i^{-49} = \frac{1}{i^{49}} = \frac{1}{i.i^{48}} = \frac{-i^2}{i} = -i$

১৩৬. $(i)^7 = ?$ (সহজ)
ক) 1 খ) -1
গ) i ঘ) $-i$ — ঘ

ব্যাখ্যা: $(i)^7 = (i^2)^3.i = (-1)^3 i = -i$

১৩৭. সরল কর: $(2i)^5$? (সহজ)
ক) 32 খ) -32
গ) $-32i$ ঘ) $32i$ — ঘ

ব্যাখ্যা: $(2i)^5 = 32.(i^2)^2.i = 32.(-1)^2.i = 32i.$

১৩৮. $\omega^{10} = ?$ (সহজ)
ক) 1 খ) -1
গ) ω ঘ) $-\omega$ — গ

১৩৯. $\left(\frac{i}{1+i}\right)^2 = ?$ (মধ্যম)

ক -1 খ $-2i$

গ i ঘ $\frac{i}{2}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\left(\frac{i}{1+i}\right)^2 = \frac{i^2}{1+2i+i^2} = \frac{-1}{1+2i-1}$

$= \frac{-1}{2i} = \frac{i^2}{2i} = \frac{i}{2}$

১৪০. $(1+\omega^2)^6$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক -1 খ 0

গ ω ঘ 1 **ঘ**

১৪১. $\sin\left\{(\omega^{16}+\omega^{23})\pi + \frac{\pi}{4}\right\} = ?$ (মধ্যম)

ক $\sqrt{2}$ খ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

গ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ঘ $-\sqrt{2}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\sin\left\{(\omega^{16}+\omega^{23})\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$

$= \sin\left\{(\omega+\omega^2)\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$

$= \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

১৪২. $(1+\omega)^3$ এর মান কত? (সহজ)

ক 1 খ -1

গ $-\omega^2$ ঘ ω^2 **খ**

১৪৩. $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এর বর্গ নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ খ $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$

গ $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ ঘ $\frac{1}{2}b(1-\sqrt{-3})$ **গ**

১৪৪. $\sqrt[4]{-81}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ খ $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm 2i)$

গ $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(2+i)$ ঘ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i)$ **ক**

ব্যাখ্যা: মনে করি, $\sqrt[4]{-81} = x$

বা, $x^4 = -81 = (9i)^2$ বা, $x^2 = \pm 9i = \frac{9}{2}(\pm 2i)$

বা, $x^2 = \frac{9}{2}(1\pm i)^2$ $\therefore x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

১৪৫. $4-4\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল কোনটি? (মধ্যম)

ক $\pm(2-\sqrt{-2})$

খ $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{8}-2)^{\frac{1}{2}}\right]$

গ $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}} - i(2-\sqrt{8})^{\frac{1}{2}}\right]$

ঘ $\pm(4-\sqrt{-2})$ **খ**

১৪৬. $8+4\sqrt{5}i$ বর্গমূল কোনটি? (মধ্যম)

ক $\pm(3-2i)$ খ $\pm(\sqrt{10}-\sqrt{2}i)$

গ $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$ ঘ $\pm(3+2i)$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt{8+4\sqrt{5}i} = \sqrt{10+4\sqrt{5}i-2}$

$= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 2.\sqrt{10}.\sqrt{2}i + (\sqrt{2}i)^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)^2} = \pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$

১৪৭. এককের ঘনমূলগুলো $1, \omega, \omega^2$ হলে $(1+\omega^2+\omega^4)^7$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক -1 খ 0

গ 1 ঘ ω^2 **খ**

১৪৮. এককের ঘনমূল তিনটির গুণফল নিম্নের কোনটি? (সহজ)

ক -1 খ 0

গ 1 ঘ i **গ**

১৪৯. 64 এর কাল্পনিক ঘনমূল কয়টি? (সহজ)

ক 0 খ 1

গ 2 ঘ 3 **গ**

ব্যাখ্যা: $x^3 = 64$ বা, $x^3 - 64 = 0$

বা, $(x-4)(x^2+4x+16) = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণটির পৃথায়ক $= 16 - 4\times 16$

$= -48 < 0$

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণ মূল দুইটি কাল্পনিক।

১৫০. -1 এর বাস্তব ঘনমূল কোনটি? (সহজ)

ক -1 খ $-i$

গ 1 ঘ i **ক**

ব্যাখ্যা: $x^3 = -1$ বা, $x^3 + 1 = 0$

বা, $(x+1)(x^2-x+1) = 0$

$\therefore x+1 = 0$ বা, $x = -1$

১৫১. $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হলে, a^6 এর মান কত? (মধ্যম)

ক 1 খ -1

গ i ঘ $-i$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

বা, $\sqrt{2}a = 1+i$ বা, $2a^2 = (1+i)^2$

বা, $2a^2 = 1+i^2+2i$

বা, $2a^2 = 1-1+2i = 2i$

$\therefore a^2 = i$

$\therefore a^6 = (i)^3 = i^2.i = -i$

১৫২. $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হলে, x^8 এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক i খ $-i$

গ 1 ঘ -1 **গ**

ব্যাখ্যা: $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ বা, $x^2 = \frac{1+2i-1}{2}$

বা, $x^2 = \frac{2i}{2} = i$

বা, $x^8 = i^4$ $\therefore x^8 = 1$

১৫৩. $x = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ হলে, x^6 এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 1 খ -1

গ i ঘ $-i$ **গ**

ব্যাখ্যা: $x = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ বা, $x^2 = \frac{1-2i-1}{2}$

বা, $x^2 = -i$ বা, $x^6 = (-i)^3$ $\therefore x^6 = i$

১৫৪. $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ হলে $\omega^2 = ?$ (সহজ)

ক 0 খ 1

গ $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ ঘ $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)$ **ঘ**

১৫৫. $\sqrt{3i}$ এর মান কোনগুলি? (মধ্যম)

ক $\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1+i)$ খ $\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+i)$

গ $\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i)$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt{3i} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2i} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+i)$

১৫৬. $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ এর মান কত? (কঠিন)

ক 0 খ 1

গ i ঘ $\sqrt{2}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt{i} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot(-2i)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$\therefore \sqrt{i}+\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i+1-i)$

$= \pm\frac{2}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$

১৫৭. $x = 3+2i$ এবং $y = 3-2i$ হলে, x^2+xy+y^2 এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 21 খ 23

গ 27 ঘ 29 **খ**

ব্যাখ্যা: $x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy$

$= (3+2i+3-2i)^2 - (3+2i)(3-2i)$

$= 6^2 - (9+4) = 23$

১৫৮. $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক ± 2 খ ± 3

গ $\pm\sqrt{2}$ ঘ $\pm\sqrt{3}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt{i}+\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i+1-i)$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.2 = \pm\sqrt{2}$

১৫৯. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে $(1+\omega-\omega^2)^3 - (1-\omega+\omega^2)^3$ এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক 0 খ 1

গ ω ঘ ω^2 **ক**

ব্যাখ্যা: $(-\omega^2-\omega^2)^3 - (-\omega-\omega)^3$

$= (-2\omega^2)^3 - (-2\omega)^3 = -8+8 = 0$

১৬০. 1 এর অবাস্তব ঘনমূল কোন্ সমীকরণের মূল? (মধ্যম)

ক $x^2-x+1=0$ খ $x^2+x+2=0$

গ $x^2+x-2=0$ ঘ $x^2+x+1=0$ **ঘ**

১৬১. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, ω^n এর মান নিম্নের কোনটি? যখন n, 3 দ্বারা বিভাজ্য? (মধ্যম)

ক 0 খ 1

গ ω ঘ ω^2 **খ**

১৬২. এককের কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয় x এবং y হলে $(1-x)(1-y)$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 2 খ -2

গ 3 ঘ -3 **গ**

১৬৩. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1+\omega-\omega^2)\times(1-\omega+\omega^2)$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 1 খ 2

গ 4 ঘ 8 **গ**

ব্যাখ্যা: $(1+\omega-\omega^2)\times(1-\omega+\omega^2)$

$= (-2\omega^2)(-2\omega) = 4\omega^3 = 4$

১৬৪. $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $y = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে $1-x-y+xy$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক 0 খ 1

গ 2 ঘ 3 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $x = \omega, y = \omega^2$

$\therefore 1-x-y+xy = 1-\omega-\omega^2+\omega^3$

$= 1+1-\omega-\omega^2$

$= 2-(\omega+\omega^2)$

$= 2-(-1)$

$= 3$

১৬৫. ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল হলে $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2$ এর মান কত? (সহজ)

ক 3 খ -3

গ 4 ঘ -4 **ঘ**

১৬৬. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, নিচের কোন সম্পর্কটি মিথ্যা? (সহজ)

(ক) $1 + \omega + \omega^2 = 0$
(খ) $\omega^2 - \omega = 0$
(গ) $\omega^3 = 1$
(ঘ) অপর কাল্পনিক ঘনমূলটি হলো ω^2 **খ**

ব্যাখ্যা: $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
বা, $\omega^2 - \omega + 2\omega + 1 = 0$
বা, $\omega^2 - \omega = -(2\omega + 1)$

১৬৭. $\sqrt[3]{-i}$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $-i, \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{3})$ (খ) $i, \frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{3})$
(গ) $0, \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{3})$ (ঘ) $0, \frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{3})$ **খ**

১৬৮. $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$ হলে $\sqrt[3]{a - ib}$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $x - iy$ (খ) $(x + iy)^3$
(গ) $(x - iy)^3$ (ঘ) $x + iy$ **ক**

১৬৯. $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \ldots}}} = x$ হলে, x এর মান কোনটি? (কঠিন)

(ক) $2 - 2i$ (খ) $1 - i$
(গ) $-1 + i$ (ঘ) $-i - i$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \ldots}}} = x$
বা, $\sqrt{-2 + 2x} = x$
বা, $-2 + 2x = x^2$
বা, $x^2 - 2x + 2 = 0$
$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$
$\therefore x = 1 - i$

১৭০. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $\omega^{99} + \omega^{100} + \omega^{101}$ এর মান নিম্নের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) 1
(গ) ω (ঘ) ω^2 **ক**

ব্যাখ্যা: $\omega^{99} + \omega^{100} + \omega^{101} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$

১৭১. এককের ঘনমূল ω হলে $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8)$ এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) 1
(গ) ω (ঘ) ω^2 **খ**

ব্যাখ্যা: $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8) = (1+\omega)^2 (1+\omega^2)^2$
$= (-\omega^2)^2(-\omega)^2 = \omega^4.\omega^2 = \omega^6 = 1$

১৭২. $(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10}) = ?$ (মধ্যম)

(ক) 9 (খ) 10
(গ) 11 (ঘ) 12 **ক**

ব্যাখ্যা: $(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10})$
$= (1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)$
$= \{(1 - \omega^2)(1 - \omega)\}^2$
$= (1 - \omega - \omega^2 + \omega^3)^2$
$= (1 - \omega - \omega^2 + 1)^2 = \{2 - (\omega + \omega^2)\}^2$
$= \{2 - (-1)\}^2$
$= 3^2 = 9$

১৭৩. $(1 + \omega - \omega^2)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^2 + 1 - \omega) = ?$ (মধ্যম)

(ক) 8 (খ) − 8
(গ) 4 (ঘ) − 4 **খ**

১৭৪. এককের ঘনমূল ω হলে, $\begin{vmatrix} \omega^{2n} & 1 \\ 1 & \omega^n \end{vmatrix}$ এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) −1 (খ) 0
(গ) 1 (ঘ) ω **খ**

ব্যাখ্যা: $\omega^{2n}.\omega^n - 1 = \omega^{3n} - 1 = 1 - 1 = 0$

১৭৫. এককের জটিল ঘনমূলদ্বয় x ও y হলে $x^3 + x^{-3}$ এর মান নিম্নের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) 1
(গ) 2 (ঘ) 3 **গ**

১৭৬. $x = 1 + i$ হলে $x^4 - 2x^3 + 2x^2$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

(ক) −1 (খ) 0
(গ) 1 (ঘ) i **খ**

ব্যাখ্যা: $x - 1 = i$
বা, $x^2 - 2x + 1 = i^2 = -1$
বা, $x^2 - 2x + 2 = 0$
$\therefore x^4 - 2x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 - 2x + 2) = x^2.0 = 0$

১৭৭. এককের ঘনমূলগুলি 1, ω, ω^2 হলে-

i. ω^{17} এর মান ω^2 এর সমান
ii. জটিল মূল দুইটির গুণফল শূন্য
iii. ঘনমূল তিনটির যোগফল এক

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i (খ) ii
(গ) i ও ii (ঘ) i ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: (i) $\omega^{17} = (\omega^3)^5.\omega^2 = 1^5.\omega^2 = \omega^2$ $[\because \omega^3 = 1]$
(ii) সঠিক নয়। কারণ, $\omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$
(iii) সঠিক নয়। কারণ, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

১৭৮. $\sqrt[4]{1}$ এর মান —

i. i
ii. −i
iii. ±1

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: ধরি, $\sqrt[4]{1} = x$
$\Rightarrow 1 = x^4 \Rightarrow x^4 - 1 = 0$
$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$ অথবা, $x^2 + 1 = 0$
$\therefore x = \pm 1, x = \pm i$

১৭৯. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে —

i. $1 + \omega^4 + \omega^8 = 0$

ii. $\sqrt{\omega + \omega^2} = i$

iii. $\left|\frac{1}{\omega}\right| = 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $1 + \omega^4 + \omega^8 = 1 + \omega + \omega^2 = 0$

$\therefore \sqrt{\omega + \omega^2} = \sqrt{-1} = i$ এবং $\left|\frac{1}{\omega}\right| = \frac{|1|}{|\omega|} = 1$

১৮০. এককের কাল্পনিক ঘনমূল x ও y হলে—

i. $x = y^2$

ii. $1 + x + y = 0$

iii. $xy = 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১৮১. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল p হলে—

i. $p + p^2 = -1$

ii. 2p এর মডুলাস 2

iii. p এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা p^2

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: একটি জটিল ঘনমূল p হলে

$1 + p + p^2 = 0$

$\therefore p + p^2 = -1$

$p = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ হলে $2p = -1 + \sqrt{3}i$

$\therefore$ মডুলাস $= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

জটিল ঘনমূল একটি অপরটির বর্গ।

১৮২. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ হলে —

i. $\omega^{10} = \omega$

ii. $|\omega| = 1$

iii. $\arg\omega = \frac{2\pi}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore |\omega| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

এবং $\arg \omega = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}}\right| = \frac{2\pi}{3}$

১৮৩. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে —

i. $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 = -1$

ii. $(1 + \omega - \omega^2)^3 - (1 - \omega + \omega^2)^3$ এর মান $= 0$

iii. n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে $\omega^{2n} + \omega^n = -2$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১৮৪. –i এর ঘনমূল—

i. $-i$

ii. i

iii. $\frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i)$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১৮৫ ও ১৮৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + px + q = 0$ একটি বীজগাণিতিক সমীকরণ এবং $ix + 1 - x^2 = 0$ একটি জটিল সমীকরণ। সমীকরণদ্বয় একই সমীকরণ নির্দেশ করে।

১৮৫. p + q = কত? (মধ্যম)

ক $1 + i$ খ $1 - i$

গ $-1 + i$ ঘ $-1 - i$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: যেহেতু সমীকরণদ্বয় একই সমীকরণ নির্দেশ করে

সুতরাং আমরা পাই,

$\frac{1}{-1} = \frac{p}{i} = \frac{q}{1}$

$\therefore p = -i; q = -1$

$\therefore p + q = -1 - i$

১৮৬. $p^2 + pq + q^2$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক 1 খ $-i$

গ i ঘ $2 + i$ **গ**

ব্যাখ্যা: $p = -i, q = -1$

$\therefore p^2 + pq + q^2 = (-i)^2 + (-i)(-1) + (-1)^2$

$= i^2 + i + 1$

$= -1 + i + 1 = i$

নিচের তথ্যের আলোকে (১৮৭ ও ১৮৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\sqrt{2}p - i - 1 = 0$ একটি জটিল সমীকরণ।

১৮৭. p^2 এর মান কত? (সহজ)

ক 1 খ 0

গ i ঘ $-i$ **গ**

১৮৮. $p^4\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}\right)$ এর মান কত? (কঠিন)

ক -1 খ 1

গ $-i$ ঘ i **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt{2}p = i + 1$

$\Rightarrow p = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow p^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2}$

$\therefore p^2 = i$

$p^4\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}\right) = p^4 + p^2 + 1$

$= i^2 + i + 1 = -1 + i + 1 = i$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (১৮৯ ও ১৯০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω,

যেখানে $\omega = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$।

১৮৯. $(1+\omega)(1+\omega^2)$ এর মান কোনটি? (সহজ)

ক -1 খ 0

গ 1 ঘ 2 **গ**

ব্যাখ্যা: $(1+\omega)(1+\omega^2) = (-\omega^2)(-\omega) = \omega^3 = 1$

১৯০. $\arg \omega$ কোনটি? (মধ্যম)

ক $-\frac{2\pi}{3}$ খ $\frac{2\pi}{3}$

গ $-\frac{\pi}{3}$ ঘ $\frac{\pi}{3}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\arg \omega = -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}}\right)$

$= -\pi + \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= -\frac{2\pi}{3}$ $[x < 0, y < 0]$

নিচের তথ্যের আলোকে (১৯১-১৯২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

এককের ঘনমূলগুলি $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

১৯১. এককের কাল্পনিক ঘনমূল সমূহের গুণফলের মান কত? (সহজ)

ক 0 খ 1

গ -1 ঘ $\sqrt{-1}$ **খ**

১৯২. ঘনমূলগুলির যোগফলের মান কত? (সহজ)

ক 0 খ 1

গ -1 ঘ $\sqrt{-1}$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (১৯৩ ও ১৯৪)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ একটি জটিল সমীকরণ।

১৯৩. $a + b$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3$

খ $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

গ $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

ঘ $x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$ **ক**

১৯৪. $\frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক $2(x^2 + y^2)$ খ $2(x^2 - y^2)$

গ $2(y^2 - x^2)$ ঘ $-2(x^2 + y^2)$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$

$\Rightarrow a + ib = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$

$\therefore a = x^3 - 3xy^2, b = 3x^2y - y^3$

$\therefore a + b = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3$

এবং $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x} - \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$= x^2 - 3y^2 - 3x^2 + y^2$

$= -2x^2 - 2y^2$

$= -2(x^2 + y^2)$

নিচের তথ্যের আলোকে (১৯৫ ও ১৯৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x = (1 + 3\omega + \omega^2)^2$ ও $y = (1 + \omega + 3\omega^2)^2$ যেখানে ω একটি জটিল মূল।

১৯৫. $x + y$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক -4 খ 4ω

গ $4\omega^2$ ঘ 4 **ক**

১৯৬. xy এর মান কত? (মধ্যম)

ক 16 খ -4ω

গ $-4\omega^2$ ঘ -16 **ক**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (১৯৭ ও ১৯৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$x = i$ একটি কাল্পনিক সংখ্যা।

১৯৭. x^{-49} এর মান কোনটি? (সহজ)

ক -1 খ $-i$

গ 1 ঘ i **খ**

ব্যাখ্যা: $x^{-49} = i^{-49} = \frac{1}{i^{49}} = \frac{1}{i^{(4\times12)+1}}$

$= \frac{1}{i} = \frac{i}{-1} = -i$

১৯৮. $\sqrt{x}$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক ± 1 খ $\pm i$

গ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ ঘ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $i = \frac{1}{2}(2i) = \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2)$

$= \frac{1}{2}(1+i)^2$

$\therefore$ বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)^2$

অধ্যায়-৪: বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

প্রশ্ন ▶১ যদি $f(x) = ax^2 + bx + c$ এবং $g(x) = cx^2 + bx + a$ হয় তবে, */দি. বো. ১৭/*

ক. $f(x) = 0$ এর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α, β হলে দেখাও যে, ৪

$(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$

গ. $f(x) = 0$ এর একটি মূল, $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

এখানে, $f(x) = 0$

বা, $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণটির সমাধান, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4ac$ এর সাহায্যে (i) নং সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নিশ্চিতভাবে জানা যায়।

(i) $b^2 - 4ac > 0$ ও পূর্ণবর্গ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও অসমান হবে।

(ii) $b^2 - 4ac < 0$ হলে, মূলদ্বয় জটিল ও অসমান হবে।

(iii) $b^2 - 4ac = 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।

(iv) $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ না হলে, মূলদ্বয় বাস্তব, অমূলদ ও অসমান হবে।

খ দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

এখন, $f(x) = 0$ বা, $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

বা, $a\alpha + a\beta = -b$

বা, $a\alpha + b = -a\beta$ ... ... (ii)

আবার, $a\beta + b = -a\alpha$ ... ... (iii)

এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ .... (iv)

এখন, $(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = (-a\beta)^{-3} + (-a\alpha)^{-3}$

$= -\frac{1}{a^3\beta^3} - \frac{1}{a^3\alpha^3} = -\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\alpha^3}\right)$

$= -\frac{1}{a^3}\left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3}\right) = -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3}\right\}$

$= -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^3 - 3 \cdot \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{-b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}\right\} = -\frac{1}{a^3}\frac{\left(\frac{-b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}\right)}{\frac{c^3}{a^3}}$

$= -\frac{1}{a^3}\left(\frac{-b^3 + 3abc}{a^3}\right) \times \frac{a^3}{c^3} = \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = 0$ বা, $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

এবং $g(x) = 0$ বা, $cx^2 + bx + a = 0$ ... ... (ii)

মনে করি, (ii) নং সমীকরণের একটি মূল α

$\therefore$ (i) নং সমীকরণের একটি মূল 2α

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ ... ... (iii)

এবং (i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$a(2\alpha)^2 + b(2\alpha) + c = 0$

বা, $4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$ ... ... (iv)

(iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ এ বজ্রগুণন পদ্ধতি ব্যবহার করে পাই,

$\frac{\alpha^2}{bc - 2ab} = \frac{\alpha}{4a^2 - c^2} = \frac{1}{2bc - 4ab}$

এখন, $\alpha^2 = \frac{bc - 2ab}{2bc - 4ab}$ বা, $\alpha^2 = \frac{(bc - 2ab)}{2(bc - 2ab)}$ $\therefore \alpha^2 = \frac{1}{2}$

আবার, $\alpha = \frac{4a^2 - c^2}{2bc - 4ab}$

বা, $\alpha^2 = \left(\frac{4a^2 - c^2}{2bc - 4ab}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{1}{2} = \left\{\frac{(2a)^2 - c^2}{2b(c - 2a)}\right\}^2$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{(2a + c)^2(2a - c)^2}{4b^2\{-(2a - c)\}^2}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{(2a + c)^2(2a - c)^2}{4b^2(2a - c)^2}$

বা, $2b^2(2a - c)^2 = (2a + c)^2(2a - c)^2$

বা, $2b^2(2a - c)^2 - (2a + c)^2(2a - c)^2 = 0$

বা, $(2a - c)^2\{2b^2 - (2a + c)^2\} = 0$

$\therefore (2a - c)^2 = 0$ অথবা, $2b^2 - (2a + c)^2 = 0$

বা, $2a - c = 0$ $\therefore 2b^2 = (2a + c)^2$

$\therefore 2a = c$

সুতরাং, $2a = c$ অথবা $2b^2 = (2a + c)^2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶২ দৃশ্যকল্প-১: $z = 2 + 4i - i^2$ */রা. বো. ১৭/*

দৃশ্যকল্প-২: $px^2 + qx + r = 0$

ক. এককের জটিল ঘনমূল ω, ω^2 হলে $(-1 + \sqrt{-3})^7 + (-1 - \sqrt{-3})^7$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ $\bar{z}$ এর বর্গমূলের মডুলাস সর্বদা $\sqrt{5}$ সঠিক কী না যাচাই কর। যেখানে $\bar{z}$ হচ্ছে z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লেখিত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, এককের কাল্পনিক মূলদ্বয়

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ এবং $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

অর্থাৎ $2\omega = -1 + \sqrt{-3}$ এবং $2\omega^2 = -1 - \sqrt{-3}$

$\therefore (-1 + \sqrt{-3})^7 + (-1 - \sqrt{-3})^7 = (2\omega)^7 + (2\omega^2)^7$

$= 2^7\omega^7 + 2^7\omega^{14} = 128(\omega^7 + \omega^{14})$

$= 128(\omega + \omega^2) = 128 \times (-1) = -128$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = 2 + 4i - i^2 = 2 + 4i - (-1)$

$= 2 + 4i + 1 = 3 + 4i$

$\bar{z}$, z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

$\therefore \bar{z} = 3 - 4i$

$\bar{z}$ এর বর্গমূল $= \sqrt{3 - 4i}$

ধরি, $\sqrt{3 - 4i} = x + iy$ ... ... (i)

বা, $3 - 4i = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + i^2y^2$

$\therefore 3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xiy$

উভয় পক্ষের বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^2 - y^2 = 3$ ... ... (ii)

$2xy = -4$

এখন, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$

$= (3)^2 + (2xy)^2$

$= 9 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$

$\therefore x^2 + y^2 = \pm 5$

কিন্তু $x^2 + y^2 \neq -5$ কারণ দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফল ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x^2 + y^2 = 5$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2x^2 = 8$ বা, $x^2 = 4$ $\therefore x = \pm 2$

x এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$4 - y^2 = 3$ বা, $y^2 = 1$ ∴ $y = \pm 1$

x ও y এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $\pm 2 \pm i$

∴ বর্গমূলের মডুলাস $= \sqrt{(\pm 2)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{5}$

∴ $\bar{z}$ এর বর্গমূলের মডুলাস সর্বদা $\sqrt{5}$

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $px^2 + qx + r = 0$

দেওয়া আছে, মূলদ্বয় α, β

∴ $\alpha + \beta = \frac{-q}{p}$ এবং $\alpha\beta = \frac{r}{p}$

$\frac{2}{\alpha}$ এবং $\frac{2}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)x + \frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = 0$

বা, $x^2 - 2\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)x + \frac{4}{\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - 2\left(\frac{-\frac{q}{p}}{\frac{r}{p}}\right)x + \frac{4}{\frac{r}{p}} = 0$

বা, $x^2 + \frac{2q}{r}x + 4 \times \frac{p}{r} = 0$

∴ $rx^2 + 2qx + 4p = 0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $mx^2 + nx + l = 0$, $lx^2 + nx + m = 0$ *[দি. বো. ১৭]*

ক. উৎপাদকের সাহায্যে $2x^2 + 5x - 9 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $m + l = \pm n$ ৪

গ. উদ্দীপকের ১ম সমীকরণটির মূলদ্বয় α, β হলে $ml(x^2 + 1) - (n^2 - 2ml)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $2x^2 + 5x - 9 = 0$

বা, $16x^2 + 40x - 72 = 0$

বা, $16x^2 + 40x + 25 - 97 = 0$

বা, $(4x + 5)^2 - (\sqrt{97})^2 = 0$

বা, $(4x + 5 + \sqrt{97})(4x + 5 - \sqrt{97}) = 0$

হয়, $4x + 5 + \sqrt{97} = 0$ অথবা, $4x + 5 - \sqrt{97} = 0$

বা, $4x = -5 - \sqrt{97}$ বা, $4x = -5 + \sqrt{97}$

∴ $x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{4}$ ∴ $x = \frac{-5 + \sqrt{97}}{4}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{97}}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $mx^2 + nx + l = 0$

$lx^2 + nx + m = 0$

মনে করি, α সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল।

∴ $m\alpha^2 + n\alpha + l = 0$ ... ... (i)

এবং $l\alpha^2 + n\alpha + m = 0$

(−) করে, $\alpha^2(m - l) + l - m = 0$

বা, $\alpha^2(m - l) - (m - l) = 0$

বা, $(m - l)(\alpha^2 - 1) = 0$

কিন্তু $m - l \neq 0$ [সমীকরণদ্বয় একই হবে $m = l$ হলে]

∴ $\alpha^2 - 1 = 0$ বা, $\alpha = \pm 1$

এখন, (i) নং হতে পাই,

$m(\pm 1)^2 + n(\pm 1) + l = 0$

বা, $m \pm n + l = 0$

∴ $m + l = \pm n$ **(দেখানো হলো)**

গ $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = \frac{-n}{m}$

$\alpha\beta = \frac{l}{m}$

এখন, $ml(x^2 + 1) - (n^2 - 2ml)x = 0$

বা, $\frac{ml(x^2+1)}{m^2} - \frac{1}{m^2}(n^2 - 2ml)x = 0$ [m^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{l}{m}(x^2 + 1) - \left(\frac{n^2}{m^2} - 2\frac{l}{m}\right)x = 0$

বা, $\frac{l}{m}(x^2 + 1) - \left\{\left(\frac{-n}{m}\right)^2 - 2\frac{l}{m}\right\}x = 0$

বা, $\alpha\beta(x^2 + 1) - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}x = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 + \alpha\beta - \alpha^2 x - \beta^2 x = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x + \alpha\beta - \beta^2 x = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

বা, $(\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0$

∴ $\beta x - \alpha = 0$ অথবা, $\alpha x - \beta = 0$

বা, $x = \frac{\alpha}{\beta}$ বা, $x = \frac{\beta}{\alpha}$

∴ মূল দুইটি $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β *[চ. বো. ১৭]*

ক. উদ্দীপকের সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত? ২

খ. $c(x^2 + 1) - (b^2 - 2c)x = 0$ এর মূল দুইটি α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\beta + \frac{1}{\alpha}$ ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac$.

∴ $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $b^2 - 4.1.c$

$= b^2 - 4c$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

∴ $\alpha + \beta = -b$

$\alpha\beta = c$

এখন, $c(x^2 + 1) - (b^2 - 2c)x = 0$

বা, $cx^2 - (b^2 - 2c)x + c = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta)x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

বা, $(\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0$

∴ $x = \frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$

∴ মূল দুইটি $\frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$ **(Ans.)**

গ $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

∴ $\alpha + \beta = -b$

$\alpha\beta = c$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল,

$\alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

$= -b + \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = -b + \frac{-b}{c} = \frac{-bc - b}{c}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = c + 2 + \frac{1}{c}$

$= \frac{c^2 + 2c + 1}{c} = \frac{(c + 1)^2}{c}$

∴ $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)$ ও $\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ মূলবিশিষ্ট নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - \frac{-bc - b}{c}x + \frac{(c + 1)^2}{c} = 0$

∴ $cx^2 + b(c + 1)x + (c + 1)^2 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ একটি জটিল রাশি। [সি. বো. ১৭]

ক. $x + iy = \sqrt{\frac{p+iq}{r+is}}$ হলে দেখাও $(x^2+y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}$ ২

খ. $\text{Arg}(\sqrt{z})$ নির্ণয় কর। ৪

গ. কোনো ত্রিঘাত সমীকরণের একটি মূল z এবং মূলগুলির গুণফল 80 হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x + iy$ এর জটিল অনুবন্ধী $x - iy$

$\therefore x - iy = \sqrt{\frac{p-iq}{r-is}}$

$\therefore (x+iy)(x-iy) = \sqrt{\frac{p+iq}{r+is}} \cdot \sqrt{\frac{p-iq}{r-is}}$

বা, $x^2 - i^2y^2 = \sqrt{\frac{(p+iq)(p-iq)}{(r+is)(r-is)}}$

বা, $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2-i^2q^2}{r^2-i^2s^2}}$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}}$

$\therefore (x^2+y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}$ **(দেখানো হলো)**

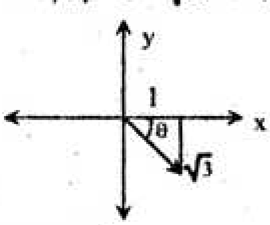
খ দেওয়া আছে, $Z = -2 - 2\sqrt{3}i$

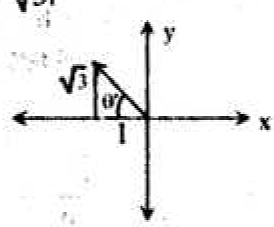
$= 1^2 - 2.1.\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2$

$= (1 - \sqrt{3}i)^2$

$\therefore \sqrt{Z} = \pm(1 - \sqrt{3}i)$

ধরি, $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ এবং $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$





$\therefore \arg z_1 = -\theta$

$= -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

$= -\frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

$\therefore \arg z_2 = \pi - \theta'$

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

$= \pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, একটি মূল Z

$\therefore$ অপর মূলটি হবে $\bar{z} = -2 + 2\sqrt{3}i$

ধরি, তৃতীয় মূল = t

প্রশ্নমতে,

$Z\bar{Z}t = 80$

বা, $(-2 - 2\sqrt{3}i).(-2 + 2\sqrt{3}i).t = 80$

বা, $\{(-2)^2 - (2\sqrt{3}i)^2\}.t = 80$

বা, $(4 - 4.3i^2).t = 80$

বা, $(4 + 12).t = 80$

বা, $t = \frac{80}{16} = 5$

এখন, $Z + \bar{Z} + t = -2 - 2\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i + 5$

$= 5 - 4 = 1$

$Z\bar{Z} + \bar{Z}t + tZ$

$= (-2 - 2\sqrt{3}i)(-2 + 2\sqrt{3}i) + (-2 + 2\sqrt{3}i).5 + 5(-2 - 2\sqrt{3}i)$

$= (4 - 4.3i^2) + 10\sqrt{3}i - 10 - 10 - 10\sqrt{3}i$

$= 16 - 20$

$= -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^3 - (Z + \bar{Z} + t)x^2 + (Z\bar{Z} + \bar{Z}t + tZ)x - Z\bar{Z}t = 0$

বা, $x^3 - x^2 - 4x - 80 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ (i) $bx^2 + ax + a = 0$ এবং (ii) $x^2 + 6x - 5k = 0$

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

ক. যদি $4 - 3i$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূল হয়, তবে সমীকরণটি নির্ণয় কর। ২

খ. যদি (i) এর মূলদ্বয়ের অনুপাত p : q হয়, তবে দেখাও যে,

$\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ ৪

গ. যদি (i) ও (ii) এ সাধারণ মূল থাকে, তবে k এর মান নির্ণয় কর। যখন $a = -k$ এবং $b = 1$ ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, জটিল মূল জোড়ায় জোড়ায় থাকে।

সুতরাং $(4 - 3i)$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি মূল হলে অপর মূলটি হবে $(4 + 3i)$.

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ,

$x^2 - (4 + 3i + 4 - 3i)x + (4 + 3i)(4 - 3i) = 0$

বা, $x^2 - 8x + \{4^2 - (3i)^2\} = 0$

বা, $x^2 - 8x + (16 - 9.i^2) = 0$

বা, $x^2 - 8x + (16 + 9) = 0$ $[\because i^2 = -1]$

$\therefore$ $x^2 - 8x + 25 =$ **(Ans.)**

খ মনে করি, $bx^2 + ax + a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $p\alpha$ এবং $q\alpha$

$\therefore$ $p\alpha + q\alpha = -\frac{a}{b}$

$\therefore$ $p + q = \frac{-a}{b\alpha}$ .... (i)

এবং $p\alpha \cdot q\alpha = \frac{a}{b}$

$\therefore$ $pq = \frac{a}{b\alpha^2}$ .... (ii)

বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} = \frac{p+q}{\sqrt{pq}}$

$= \frac{\frac{-a}{b\alpha}}{\sqrt{\frac{a}{b\alpha^2}}} = \frac{-a}{b\alpha} \times \frac{\sqrt{b}\alpha}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= -\sqrt{\frac{a}{b}} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $bx^2 + ax + a = 0$

বা, $x^2 - kx - k = 0$ $[\because a = -k$ এবং $b = 1]$ .... (i)

এবং $x^2 + 6x - 5k = 0$ .... (ii)

যদি সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকে তবে মনে করি তা α.

তাহলে α দ্বারা (i) ও (ii) সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হবে।

$\alpha^2 - k\alpha - k = 0$ .... (iii)

$\alpha^2 + 6\alpha - 5k = 0$ .... (iv)

(iii) ও (iv) নং হতে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই,

$\frac{\alpha^2}{5k^2 + 6k} = \frac{\alpha}{-k + 5k} = \frac{1}{6 + k}$

বা, $\frac{\alpha^2}{k(5k+6)} = \frac{\alpha}{4k} = \frac{1}{6+k}$

$\therefore$ $\alpha = \frac{k(5k+6)}{4k}$; $\alpha = \frac{4k}{6+k}$

$\therefore$ $\frac{k(5k+6)}{4k} = \frac{4k}{6+k}$

বা, $k(5k + 6)(6 + k) = 16k^2$

বা, $k(30k + 36 + 5k^2 + 6k) = 16k^2$

বা, $k(5k^2 + 36k + 36 - 16k) = 0$

বা, $k(5k^2 + 20k + 36) = 0$

$\therefore$ $k = 0$ অথবা $5k^2 + 20k + 36 = 0$

$\therefore$ $k = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.(5)(36)}}{2.5}$

$= \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 720}}{10}$

$= -2 \pm \frac{4i}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ k এর মান: 0, $\left(-2 + \frac{4i}{\sqrt{5}}\right)$ এবং $\left(-2 - \frac{4i}{\sqrt{5}}\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ 'x' চলক বিশিষ্ট $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে— *[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]*

ক. যদি $\alpha = 5\beta$ হয়, তবে দ্বিঘাত সমীকরণ হতে a, b এবং c এর মধ্যে সম্পর্ক বের কর। ২

খ. প্রদত্ত সমীকরণে যদি মূলদ্বয় সমান হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $ax^2 + bx + c$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ। ৪

গ. যদি $(a^2 - b^2)x^2 + 2(b^2 - c^2)x + (c^2 - a^2)$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a = b = c$. ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ ... ... (ii)

এবং $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ... ... (iii)

(ii) নং হতে পাই, $5\beta + \beta = \dfrac{-b}{a}$ $[\because \alpha = 5\beta]$

বা, $6\beta = \dfrac{-b}{a}$

$\therefore$ $\beta = \dfrac{-b}{6a}$ ... ... (iv)

(iii) নং হতে পাই, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

বা, $5\beta.\beta = \dfrac{c}{a}$

বা, $5\beta^2 = \dfrac{c}{a}$

বা, $5\left(\dfrac{-b}{6a}\right)^2 = \dfrac{c}{a}$ [(iv) নং হতে]

বা, $\dfrac{5b^2}{36a^2} = \dfrac{c}{a}$

বা, $5b^2 = \dfrac{36a^2 . c}{a}$

$\therefore$ $5b^2 = 36ac$

এটিই দ্বিঘাত সমীকরণ হতে a, b ও c এর মধ্যে সম্পর্ক। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক, $D = 0$

বা, $b^2 - 4ac = 0$ ... ... (ii)

এখন, $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$

বা, $x^2 + 2.\dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a} = 0$

বা, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$

বা, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{0}{4a^2} = 0$ [(ii) নং হতে]

$\therefore$ $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$

সুতরাং মূলদ্বয় সমান হলে $ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে। **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $(a^2 - b^2)x^2 + 2(b^2 - c^2)x + (c^2 - a^2)$ একটি দ্বিঘাত রাশি। প্রদত্ত দ্বিঘাত রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে যদি,

$(a^2 - b^2)x^2 + 2(b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।

$\therefore$ নিশ্চায়ক, $D = \{2(b^2 - c^2)\}^2 - 4(a^2 - b^2)(c^2 - a^2)\}$

$= 4(b^4 - 2b^2c^2 + c^4) - 4(a^2c^2 - b^2c^2 - a^4 + a^2b^2)$

$= 4b^4 - 8b^2c^2 + 4c^4 - 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 4a^4 - 4a^2b^2$

$= 4b^4 - 4b^2c^2 + 4c^4 - 4a^2c^2 + 4a^4 - 4a^2b^2$

$= 2(2b^4 - 2b^2c^2 + 2c^4 - 2a^2c^2 + 2a^4 - 2a^2b^2)$

$= 2\{(b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2\}$

যেহেতু মূলদ্বয় সমান

$\therefore$ $D = 0$

$\therefore$ $2\{(b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2\} = 0$

কতগুলো রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে তাদের প্রতিটির মান আলাদাভাবে শূন্য হবে।

$\therefore$ $(b^2 - c^2)^2 = 0$ বা $b = c$

এবং $(c^2 - a^2)^2 = 0$ বা, $c = a$

$\therefore$ $a = b = c$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

ক. সমাধান কর : $x^2 + 14x + 51 = 0$ ২

খ. প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণ দুটির যদি একটি সাধারণ মূল থাকে তবে দেখাও যে, $b + c + 1 = 0$ ৪

গ. সমীকরণ দুটির মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুবকপদ হলে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$ ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 + 14x + 51 = 0$

$\therefore$ $x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4.51.1}}{2.1} = \dfrac{-14 \pm \sqrt{196 - 204}}{2}$

$= \dfrac{-14 \pm \sqrt{-8}}{2} = \dfrac{-14 \pm \sqrt{8}.\sqrt{-1}}{2}$

$= \dfrac{-14 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = -7 \pm \sqrt{2}i$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x^2 - bx + c = 0$ ... ... (i)

$x^2 - cx + b = 0$ ... ... (ii)

ধরি (i) এবং (ii) নং সমীকরণের সাধারণ মূল α

$\alpha^2 - b\alpha + c = 0$

$\alpha^2 - c\alpha + b = 0$

$\dfrac{\alpha^2}{-b^2 + c^2} = \dfrac{\alpha}{c - b} = \dfrac{1}{-c + b}$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{(c - b)(c + b)} = \dfrac{\alpha}{c - b} = \dfrac{1}{-(c - b)}$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{c + b} = \dfrac{\alpha}{1} = \dfrac{1}{-1}$

বা, $\dfrac{\alpha}{c + b} = 1$

বা, $\alpha = c + b$

আবার $\dfrac{\alpha}{1} = -1$

বা, $\alpha = -1$

$\therefore$ $c + b = -1$

বা, $b + c + 1 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x^2 - bx + c = 0$ ... ... (i)

$x^2 - cx + b = 0$ ... ... (ii)

ধরি (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore$ $\alpha + \beta = b$

$\alpha\beta = c$

এবং (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ

$\therefore$ $\gamma + \delta = c$

$\gamma\delta = b$

শর্তমতে, $\alpha - \beta = \gamma - \delta = k$

বা, $\alpha - \beta = \gamma - \delta$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$

বা, $b^2 - 4c = c^2 - 4b$

বা, $b^2 - c^2 + 4b - 4c = 0$

বা, $(b + c)(b - c) + 4(b - c) = 0$

বা, $(b - c)(b + c + 4) = 0$

$\therefore$ $b + c + 4 = 0$ $[\because b - c \neq 0]$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৯ $x^2 - 2ax + b = 0$ ... ... (i); $x^2 - cx + d = 0$ ... ... (ii)
(i) এর একটি মূল (ii) এর একটি মূলের অর্ধেক এবং $Z_1 = i - \sqrt{3}$।

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. $\bar{Z}_1$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। ২
খ. Z_1 এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ৪
গ. প্রমাণ কর যে, $(4ad - 4bc)(c - 4a) = (d - 4b)^2$ ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $Z_1 = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$
$\therefore \quad \bar{Z}_1 = -\sqrt{3} - i$
$\bar{Z}$ কে $Z = x + iy$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
$x = -\sqrt{3}, y = -1$
$\bar{Z}_1$ এর মডুলাস $|\bar{Z}_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ **(Ans.)**

$\bar{Z}_1$ এর আর্গুমেন্ট, $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$
$= -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right|$
$= -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$
$= -\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6}$ **(Ans.)**

খ $Z_1 = -\sqrt{3} + i$
ধরি, $\sqrt{-\sqrt{3} + i} = x + iy$; যেখানে x, y বাস্তব সংখ্যা।
বা, $-\sqrt{3} + i = (x + iy)^2$ [বর্গ করে]
বা, $-\sqrt{3} + i = (x^2 - y^2) + 2ixy$
বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,
$\therefore \quad x^2 - y^2 = -\sqrt{3}$ ... ... (i)
$2xy = 1$ ... ... (ii)
এখন, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$
$= (-\sqrt{3})^2 + 1^2$
$= 3 + 1 = 4$
$\therefore \quad x^2 + y^2 = 2$ ... ... (iii)
[যেহেতু x, y দুটি বাস্তব সংখ্যা সুতরাং $x^2 + y^2$ ধনাত্মক]
(i) ও (iii) থেকে পাই,
$x^2 = \frac{-\sqrt{3}+2}{2}$ বা, $x = \pm\left(\frac{-\sqrt{3}+2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
এবং $y^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$
$y = \pm\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল : $x + iy = \pm\left[\left(\frac{-\sqrt{3}+2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} i\right]$

গ দেওয়া আছে, $x^2 - 2ax + b = 0$ ... ... (i)
এবং $x^2 - cx + d = 0$ ... ... (ii)
ধরি, (i) নং এর একটি মূল $= \alpha$
$\therefore$ (ii) নং এর একটি মূল $= 2\alpha$
সুতরাং (i) হতে, $\alpha^2 - 2a\alpha + b = 0$ ... ... (iii)
এবং (ii) হতে, $4\alpha^2 - 2\alpha c + d = 0$ ... ... (iv)
(iii) ও (iv) নং এ বজ্রগুণন সূত্রানুসারে পাই,
$\frac{\alpha^2}{-2ad + 2bc} = \frac{\alpha}{4b - d} = \frac{1}{-2c + 8a}$
বা, $\alpha^2 = \frac{ad - bc}{c - 4a}$ ... ... (v)
$\alpha = \frac{d - 4b}{2c - 8a}$ ... ... (vi)
(v) ও (vi) হতে পাই, $\frac{ad - bc}{c - 4a} = \left(\frac{d - 4b}{2c - 8a}\right)^2$
$\therefore (4ad - 4bc)(c - 4a) = (d - 4b)^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ১০ দৃশ্যকল্প-১: $(p + 1)x^2 + 2(p + 3)x + 2p + 3$ একটি রাশি।
দৃশ্যকল্প-২: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. $x^3 + qx + r = 0$ এর মূলগুলি α, β, γ হলে $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. p এর মান কত হলে ১ম দৃশ্যকল্পে উল্লেখিত রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? ৪
গ. দ্বিতীয় দৃশ্যকল্পে উল্লেখিত সমীকরণটির মূলদ্বয় a, b হলে $\alpha\gamma(x^2 + 1) - (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x = 0$ এর মূলদ্বয় a, b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^3 + qx + r = 0$ এর মূলগুলি α, β, γ
$\therefore \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$
$\alpha\beta\gamma = -r$
প্রদত্ত রাশি $= \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$
$= \frac{\alpha^2}{-\alpha} + \frac{\beta^2}{-\beta} + \frac{\gamma^2}{-\gamma}$
$= -(\alpha + \beta + \gamma)$
$= 0$ **(Ans.)**

খ $(p + 1)x^2 + 2(p + 3)x + 2p + 3$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে যদি $(p + 1)x^2 + 2(p + 3)x + 2p + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।
অর্থাৎ, সমীকরণের পৃথায়ক $= 0$ হয়।
অর্থাৎ, $\{2(p + 3)\}^2 - 4(p + 1)(2p + 3) = 0$
বা, $p^2 + 6p + 9 - (2p^2 + 5p + 3) = 0$
বা, $p^2 + 6p + 9 - 2p^2 - 5p - 3 = 0$
বা, $-p^2 + p + 6 = 0$
বা, $p^2 - p - 6 = 0$
বা, $p^2 - 3p + 2p - 6 = 0$
বা, $p(p - 3) + 2(p - 3) = 0$
বা, $(p + 2)(p - 3) = 0$
$\therefore \quad p = 3, -2$
$\therefore$ নির্ণেয় মান $p = 3, -2$ **(Ans.)**

গ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ এর মূলগুলি a ও b হলে,
$a + b = -\frac{\beta}{\alpha}$
$ab = \frac{\gamma}{\alpha}$
প্রদত্ত সমীকরণ, $\alpha\gamma(x^2 + 1) - (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x = 0$
বা, $\alpha\gamma x^2 - (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x + \alpha\gamma = 0$
বা, $\frac{\gamma}{\alpha}x^2 - \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\gamma}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ [α^2 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $abx^2 - \{(a + b)^2 - 2ab\}x + ab = 0$
বা, $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$
বা, $abx^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$
বা, $ax(bx - a) - b(bx - a) = 0$
বা, $(bx - a)(ax - b) = 0$
$\therefore \quad x = \frac{a}{b}$ এবং $\frac{b}{a}$
$\therefore$ মূলদ্বয় $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{b}{a}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল এবং a, b, c ধ্রুবক ও
$\alpha = a + b\omega + c\omega^2$ ... ... (i)
$\beta = a + b\omega^2 + c\omega$ ... ... (ii)
$\gamma = a + b + c$ ... ... (iii)

[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]

ক. k এর মান কত হলে, $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ এর সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব ও সমান হবে। ২
খ. দেখাও যে, $\alpha\beta\gamma = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. ৪
গ. $\gamma = 0$ হলে, দেখাও যে, $(\alpha^2)^{\frac{3}{2}} + (\beta^2)^{\frac{3}{2}} - 27abc = 0$. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$

পৃথায়ক $=\{-(k+2)\}^2-4(k-1)4$
$=k^2+4k+4-16k+16$
$=k^2-12k+20$
$=k^2-10k-2k+20$
$=k(k-10)-2(k-10)$
$=(k-2)(k-10)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে যদি পৃথায়ক শূন্য হয়।
অর্থাৎ, $(k-2).(k-10)=0$
$\therefore\ k=2$ অথবা $k=10$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\alpha=a+b\omega+c\omega^2$
$\beta=a+b\omega^2+c\omega$
$\gamma=a+b+c$
$\therefore\ \alpha\beta\gamma=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)(a+b+c)$
ডানপক্ষ $=a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=(a+b+c)\{a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)\}$
$=(a+b+c)\{a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab\omega+ab\omega^2+bc\omega^4+bc\omega^2+ca\omega+ca\omega^2\}$
$=(a+b+c)\{a(a+b\omega+c\omega^2)+b\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)+c\omega(a+b\omega+c\omega^2)\}$
$=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=\alpha\beta\gamma$
= বামপক্ষ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $\gamma=0$
বা, $a+b+c=0$
এখন, $(\alpha^2)^{\frac{3}{2}}+(\beta^2)^{\frac{3}{2}}=\alpha^3+\beta^3$
$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$
ধরি, $a+b\omega+c\omega^2=x$ এবং $a+b\omega^2+c\omega=y$
$\therefore\ x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$=(x+y)\{x^2+(\omega+\omega^2)xy+\omega^3y^2\}\ [\because 1+\omega+\omega^2=0]$
$=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2y)$
এখন, $x+y=2a+b(\omega+\omega^2)+c(\omega+\omega^2)=2a-b-c$
$x+\omega y=a+b\omega+c\omega^2+a\omega+b\omega^3+c\omega^2$
$=a(1+\omega)+b(1+\omega)+2c\omega^2$
$=-a\omega^2-b\omega^2+2c\omega^2$
$=(-a-b+2c)\omega^2$
$x+\omega^2y=a+b\omega+c\omega^2+a\omega^2+b\omega^4+c\omega^3$
$=a(1+\omega^2)+b(\omega+\omega)+c(1+\omega^2)$
$=-a\omega+2b\omega-c\omega$
$=(-a+2b-c)\omega$
$\therefore\ (a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$
$=(x^3+y^3)$
$=(2b-a-c)(2a-b-c)(2c-a-b)\omega^3$
$=(2b-a-c)(2a-b-c)(2c-a-b)$
$=\{3b-(a+b+c)\}\{3a-(a+b+c)\}\{3c-(a+b+c)\}$
$=(3b-0)(3a-0)(3c-0)\ [\because a+b+c=0]$
$=3b.3a.3c$
$=27abc$
$\therefore\ (a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3=27abc$
বা, $(\alpha^2)^{\frac{3}{2}}+(\beta^2)^{\frac{3}{2}}-27abc=0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১২ $ax^2+bx+c=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। *[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. $a=1, b=4, c=13$ হলে দেখাও যে, প্রাপ্ত সমীকরণের মূলগুলো জটিল। ২

খ. $c=b$ হলে প্রাপ্ত সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m:n$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$ ৪

গ. সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $c(a-b)^3=a(c-b)^3$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c=0$ এবং $a=1, b=4, c=13$
দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক $=b^2-4ac$
$=(4)^2-4\times1\times13$
$=16-52=-36$
যেহেতু নিশ্চায়ক $-36<0$
সেহেতু সমীকরণটির মূলগুলো জটিল। **(দেখানো হলো)**

খ $ax^2+bx+c=0$
বা, $ax^2+bx+b=0\ [\because b=c]$
মনে করি, $ax^2+bx+b=0$
প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $m\alpha$ এবং $n\alpha$

$$m\alpha+n\alpha=-\frac{b}{a}\text{ এবং } m\alpha.n\alpha=\frac{b}{a}$$

$\therefore\ m+n=-\frac{b}{a\alpha}$ .... (i)

$\therefore\ mn=\frac{b}{a\alpha^2}$ .... (ii)

এখন, $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$

$=\frac{-\frac{b}{a\alpha}}{\sqrt{\frac{b}{a\alpha^2}}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$=-\frac{b}{a\alpha}\cdot\frac{\sqrt{a}\cdot\alpha}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=0$

$\therefore\ \sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে, অপরটি α^2

$\therefore\ \alpha+\alpha^2=-\frac{b}{a}$ ...... (i) এবং $\alpha.\alpha^2=\frac{c}{a}$

$\therefore\ \alpha^3=\frac{c}{a}$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে

$\alpha+\alpha^2+\alpha^3=-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$

বা, $\alpha(1+\alpha+\alpha^2)=\frac{c-b}{a}$

বা, $\alpha\left(1-\frac{b}{a}\right)=\frac{c-b}{a}\ \left[\because \alpha+\alpha^2=-\frac{b}{a}\right]$

বা, $\alpha\left(\frac{a-b}{a}\right)=\frac{c-b}{a}$

বা, $\alpha(a-b)=c-b$

বা, $\alpha^3(a-b)^3=(c-b)^3$

বা, $\frac{c}{a}(a-b)^3=(c-b)^3\ \left[\because \alpha^3=\frac{c}{a}\right]$

$\therefore\ c(a-b)^3=a(c-b)^3$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১৩ $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq0$ *[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]*

ক. $a=2, b=-3, c=-2$ হলে, $f(x)=0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $c(x^2+1)-\left(\frac{b^2}{a}-2c\right)x=0$ এর মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. $a=1, b=-2q, c=p^2-q^2$ হলে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $f(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের যোগবোধক মান হবে। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq0$
$a=2, b=-3, c=-2$ হলে, $f(x)=2x^2-3x-2$
$\therefore\ f(x)=0$
$\therefore\ 2x^2-3x-2=0$
নিশ্চায়ক $=(-3)^2-4\times2\times(-2)$
$=9+16=25>0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা
$\therefore$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x)=0$
বা, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{-b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

এখন, $c(x^2+1)-\left(\frac{b^2}{a}-2c\right)x=0$

বা, $\frac{c}{a}(x^2+1)-\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)x=0$

বা, $\alpha\beta(x^2+1)-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x=0$

বা, $\alpha\beta x^2+\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2)x=0$

বা, $\alpha\beta x^2-\alpha^2x-\beta^2x+\alpha\beta=0$

বা, $\alpha x(\beta x-\alpha)-\beta(\beta x-\alpha)=0$

বা, $(\alpha x-\beta)(\beta x-\alpha)=0$

$\therefore\ x=\frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$

$\therefore$ মূল দুইটি α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

গ দেওয়া আছে, $f(x)=ax^2+bx+c$

$a=1, b=-2q, c=p^2-q^2$ হলে,

$f(x)=x^2-2qx+p^2-q^2$

$\therefore\ f(x)=0$

$\therefore\ x^2-2qx+(p^2-q^2)=0$

মনে করি, সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\alpha+\beta=\frac{-(-2q)}{1}=2q$

$\alpha\beta=\frac{p^2-q^2}{1}=p^2-q^2$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(2q)^2-4(p^2-q^2)$

$=4q^2-4p^2+4q^2$

$=8q^2-4p^2$

$\alpha-\beta=\sqrt{4(2q^2-p^2)}$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=2\sqrt{2q^2-p^2}$ [যোগবোধক মান]

মূল দুইটি $\alpha+\beta, |\alpha-\beta|$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $=\alpha+\beta+|\alpha-\beta|$

$=2q+2\sqrt{2q^2-p^2}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $=(\alpha+\beta)\times(|\alpha-\beta|)$

$=2q\times2\sqrt{2q^2-p^2}$

$=4q\sqrt{2q^2-p^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(2q+2\sqrt{2q^2-p^2})x+4q\sqrt{2q^2-p^2}=0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ উদ্দীপক-১: $x^3+\alpha x^2+\beta x-\gamma=0$ সমীকরণের মূলগুলো u, v, w

উদ্দীপক-২: $x^2-bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

ক. এককের জটিল ঘনমূল ω হলে,

$\left(\frac{-4+\sqrt{-48}}{4}\right)^4+\left(\frac{-4-\sqrt{-48}}{4}\right)^4=?$ ২

খ. উদ্দীপক-১: ব্যবহার করে $\frac{1}{u^2v^2}+\frac{1}{v^2w^2}+\frac{1}{u^2w^2}$ এর মান নির্ণয় কর? ৪

গ. উদ্দীপক-২: ব্যবহার করে $ca(x^2+1)-(ab^2-2ac)x=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর? ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore\left(\frac{-4+\sqrt{-48}}{4}\right)^4+\left(\frac{-4-\sqrt{-48}}{4}\right)^4$

$=\left(\frac{-4+\sqrt{-3\times16}}{4}\right)^4+\left(\frac{-4-\sqrt{-3\times16}}{4}\right)^4$

$=\left(\frac{-4+4\sqrt{-3}}{4}\right)^4+\left(\frac{-4-4\sqrt{-3}}{4}\right)^4$

$=(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4$

$=(2\omega)^4+(2\omega^2)^4$

$=16\omega^4+16\omega^8$

$=16\omega+16\omega^2$

$=16(\omega+\omega^2)$

$=16(-1)$

$=-16$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$x^3+\alpha x^2+\beta x-\gamma=0$ সমীকরণের মূলত্রয় u, v, w.

$\therefore\ u+v+w=-\alpha$

$uv+vw+uw=\beta$

$uvw=\gamma$

$\therefore\ \frac{1}{u^2v^2}+\frac{1}{v^2w^2}+\frac{1}{u^2w^2}=\frac{w^2+u^2+v^2}{u^2v^2w^2}$

$=\frac{(u+v+w)^2-2(uv+vw+uw)}{u^2v^2w^2}$

$=\frac{(-\alpha)^2-2\beta}{(\gamma)^2}$

$=\frac{\alpha^2-2\beta}{\gamma^2}$

$=\frac{1}{\gamma^2}(\alpha^2-2\beta)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $x^2-bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore\ \alpha+\beta=b$

$\alpha\beta=c$

এখন, $ac(x^2+1)-(ab^2-2ac)x=0$

বা, $acx^2+ac-ab^2x+2acx=0$

বা, $acx^2-(ab^2-2ac)x+ac=0$

বা, $x^2-\left(\frac{b^2}{c}-2\right)x+1=0$

বা, $x^2-\left\{\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right\}x+1=0$

বা, $x^2-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)x+1=0$

বা, $\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$

বা, $\alpha\beta x^2-\alpha^2x-\beta^2x+\alpha\beta=0$

বা, $\alpha x(\beta x-\alpha)-\beta(\beta x-\alpha)=0$

বা, $(\beta x-\alpha)(\alpha x-\beta)=0$

হয়, $\beta x-\alpha=0$ অথবা, $\alpha x-\beta=0$

বা, $\beta x=\alpha$ বা, $\alpha x=\beta$

$\therefore\ x=\frac{\alpha}{\beta}$ $\therefore\ x=\frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore$ মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এবং ত্রিঘাত সমীকরণ $x^3+ax^2+bx+c=0$ *[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা]*

ক. দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 3 ঃ 4 হলে, প্রমাণ কর যে, $12b^2=49ac$। ২

খ. দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)$ এবং $\beta+\frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর। ৪

গ. ত্রিঘাত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum\alpha^3$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, মূলদ্বয় 3α ও 4α

$\therefore\ 3\alpha+4\alpha=-\frac{b}{a}$

বা, $7\alpha=-\frac{b}{a}$

বা, $\alpha=-\frac{b}{7a}$

এবং $3\alpha.4\alpha=\frac{c}{a}$

বা, $12\alpha^2=\frac{c}{a}$

বা, $12.\left(\frac{-b}{7a}\right)^2=\frac{c}{a}$

বা, $\frac{12b^2}{49a^2}=\frac{c}{a}$

$\therefore\ 12b^2=49ac$ (প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha}$

$$= (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= (\alpha + \beta) + \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)$$

$$= \left(\frac{-b}{a}\right) + \left(\frac{-b/a}{c/a}\right) = \frac{-b}{a} - \frac{b}{c}$$

$$= \frac{-bc - ab}{ac} = -\frac{(ab + bc)}{ac}$$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = \frac{c}{a} + \frac{1}{c/a} + 2$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + 2 = \frac{c^2 + a^2 + 2ac}{ac}$$

$\therefore \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)$ এবং $\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ মূলবিশিষ্ট নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - \left\{\frac{-(ab + bc)}{ac}\right\} x + \frac{c^2 + a^2 + 2ac}{ac} = 0$

বা, $x^2 + \frac{(a + c)bx}{ac} + \frac{c^2 + a^2 + 2ac}{ac} = 0$

$\therefore \quad acx^2 + b(a + c)x + (c + a)^2 = 0$ **(Ans.)**

গ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই,

$\alpha + \beta + \gamma = -a$ ...... (i)

$\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma = b$ ...... (ii)

$\alpha\beta\gamma = -c$ ...... (iii)

এখন, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma)$

বা, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\}$

বা, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3(-c) = (-a)\{(-a)^2 - 3.b\}$; [(i), (ii), (iii) নং থেকে]

বা, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3c = -a^3 + 3ab$

$\therefore \quad \Sigma\alpha^3 = 3ab - a^3 - 3c$

$\therefore \quad$ নির্ণেয় মান, $3ab - a^3 - 3c$

প্রশ্ন ▶১৬ $P(x) = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

$p + iq = \frac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta}$ *[নারায়ণগঞ্জ সরকারি মহিলা কলেজ, নারায়ণগঞ্জ]*

ক. $3x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলি সর্বদা বাস্তব হবে এবং $a = b = c$ না হলে মূলগুলি সমান হতে পারে না। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $2(p^2 + q^2) = 3p - 1$ ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^2 + 2x + 1 = 0$

সমীকরণের নিশ্চায়ক $= (2)^2 - 4 \times 3 \times 1$

$= 4 - 12 = -8 < 0$

যেহেতু নিশ্চায়ক < 0 অর্থাৎ মূলদ্বয় জটিল ও অসমান হবে।

খ দেওয়া আছে, $P(x) = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$

প্রশ্নমতে, $P(x) = 0$

বা, $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} = 0$

এখানে, $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} = 0$

বা, $\frac{(x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)}{(x - a)(x - b)(x - c)} = 0$

বা, $x^2 - bx - cx + bc + x^2 - ax - cx + ac + x^2 - ax - bx + ab = 0 \times (x - a)(x - b)(x - c)$

বা, $3x^2 - 2bx - 2cx - 2ax + ab + bc + ca = 0$

বা, $3x^2 - 2x(a + b + c) + (ab + bc + ca) = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব হবে যদি সমীকরণটির পৃথায়ক, $D \geq 0$ হয়।

এখন, পৃথায়ক, $D = \{2(a + b + c)\}^2 - 4 \times 3(ab + bc + ca)$

$= 4(a + b + c)^2 - 12(ab + bc + ca)$

$= 4\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\}$

$= 4\{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - 3(ab + bc + ca)\}$

$= 4\{a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)\}$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= 4 \times \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$ ....(i)

$[\because (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)]$

$= 2\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

a, b, c প্রত্যেকেই বাস্তব হলে অবশ্যই

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ হবে

অর্থাৎ পৃথায়ক, $D \geq 0$

$\therefore p(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে। **(দেখানো হলো)**

মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হয় যখন পৃথায়ক $= 0$ হয়। (i) নং হতে পাই

পৃথায়ক $D = 4 \times \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$। পৃথায়ক শূন্য হবে যদি ও কেবল যদি $a = b = c$ হয়।

$\therefore \; a = b = c$ না হলে মূলগুলি সমান হতে পারে না। **(দেখানো হলো)**

গ এখানে, $p + iq = \frac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta}$

$$= \frac{2(3 + \cos\theta - i\sin\theta)}{(3 + \cos\theta + i\sin\theta)(3 + \cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$= \frac{6 + 2\cos\theta - i2\sin\theta}{(3 + \cos\theta)^2 - i^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{6 + 2\cos\theta - i2\sin\theta}{9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{2(3 + \cos\theta) - i2\sin\theta}{9 + 6\cos\theta + 1} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{2(3 + \cos\theta)}{10 + 6\cos\theta} - \frac{i2\sin\theta}{10 + 6\cos\theta}$$

$$= \frac{2(3 + \cos\theta)}{2(5 + 3\cos\theta)} - \frac{i2\sin\theta}{2(5 + 3\cos\theta)}$$

$$= \frac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta} + i\frac{(-\sin\theta)}{5 + 3\cos\theta}$$

$\therefore p = \frac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta}$ .... (i) এবং $q = \frac{-\sin\theta}{5 + 3\cos\theta}$ .... (ii)

বামপক্ষ $= 2(p^2 + q^2)$

$$= 2\left\{\left(\frac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\theta}{5 + 3\cos\theta}\right)^2\right\} \text{ [(i) ও (ii) নং হতে]}$$

$$= 2\left\{\frac{9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}{(5 + 3\cos\theta)^2}\right\}$$

$$= 2 \times \left\{\frac{9 + 6\cos\theta + 1}{(5 + 3\cos\theta)^2}\right\} = 2 \times \frac{(10 + 6\cos\theta)}{(5 + 3\cos\theta)^2}$$

$$= 2 \times \frac{2(5 + 3\cos\theta)}{(5 + 3\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{4}{5 + 3\cos\theta}$$

ডানপক্ষ $= 3p - 1 = 3 \times \frac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta} - 1 = \frac{9 + 3\cos\theta - 5 - 3\cos\theta}{5 + \cos\theta}$

$$= \frac{4}{5 + 3\cos\theta}$$

$\therefore \quad 2(p^2 + q^2) = 3p - 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৭ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল বিদ্যমান।

[রাজেন্দ্রপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, গাজীপুর]

ক. দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $1 + i$. ২

খ. উল্লিখিত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণের মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $c(a - b)^3 = a(c - b)^3$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, একটি মূল $1 + i$

তাহলে, অপর মূলটি হবে $1 - i$ [∵ জটিল মূল জোড়ায় জোড়ায় বিদ্যমান]

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \{(1+i)+(1-i)\}x + (1+i)(1-i) = 0$

বা, $x^2 - 2x + 1 - i^2 = 0$

∴ $x^2 - 2x + 2 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α, β

∴ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$

বা, $\frac{c}{a}x^2 - 2\frac{b}{a}x + 4 = 0$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\alpha\beta x^2 + 2(\alpha+\beta)x + 4 = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 + 2\alpha x + 2\beta x + 4 = 0$

বা, $\alpha x(\beta x + 2) + 2(\beta x + 2) = 0$

বা, $(\alpha x + 2)(\beta x + 2) = 0$

হয় $(\alpha x + 2) = 0$ অথবা, $(\beta x + 2) = 0$

বা, $x = -\frac{2}{\alpha}$ বা, $x = -\frac{2}{\beta}$

অতএব, মূল দুইটি $-\frac{2}{\alpha}$ এবং $-\frac{2}{\beta}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৭

প্রশ্ন ▶১৮ $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x$ এবং $h(x) = 32x^3 - 48x^2 + 22x - 3$

[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]

ক. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে মূল ও সহগের সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α এবং β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. $h(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত হলে মূলগুলো নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β

∴ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ এর দুইটি মূল α এবং β

∴ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $g(x) = ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$

বা, $acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

বা, $\frac{c}{a}x^2 - \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ [a^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\alpha\beta x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

বা, $(\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0$

∴ $x = \frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$

∴ মূল দুইটি $\frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$ **(Ans.)**

গ এখানে, $h(x) = 32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$

∴ $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$

মনে করি, মূলত্রয় যথাক্রমে $a - k, a, a + k$

তাহলে, $(a - k) + a + (a + k) = -\left(\frac{-48}{32}\right) = \frac{3}{2}$

বা, $3a = \frac{3}{2}$ ∴ $a = \frac{1}{2}$

আবার, $a(a - k) + a(a + k) + (a - k)(a + k) = \frac{22}{32}$

বা, $3a^2 - k^2 = \frac{11}{16}$

বা, $3.\frac{1}{4} - k^2 = \frac{11}{16}$ [∵ $a = \frac{1}{2}$]

বা, $k^2 = \frac{1}{16}$

∴ $k = \pm\frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{4}$ ধরে মূলত্রয় যথাক্রমে $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

উভয় ক্ষেত্রে একই মূল পাওয়া যায়। তাই k-এর যেকোনো একটি মান ধরে মূল সেট নির্ণয় করা যায়।

∴ মূলত্রয় যথাক্রমে $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৯ $ax^2 + bx + c = 0$ ……… (i) $cx^2 + bx + a = 0$ ……… (ii)

[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]

ক. k এর মান কত হলে $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ এর মূলদ্বয় জটিল হবে। ২

খ. যদি (i) এর মূলদ্বয় α, β হয় তবে (ii) এর মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. যে শর্ত সাপেক্ষে (i) এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয় তা নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$

পৃথায়ক $= \{-(k + 2)\}^2 - 4.(k - 1)4$

$= (k + 2)^2 - 16(k - 1)$

$= k^2 + 4k + 4 - 16k + 16$

$= k^2 - 12k + 20$

$= k^2 - 10k - 2k + 20$

$= k(k - 10) - 2(k - 10)$

$= (k - 10)(k - 2)$

মূলদ্বয় জটিল হলে পৃথায়ক ঋণাত্মক হবে।

∴ $(k - 10)(k - 2) < 0$

ইহা সম্ভব হবে যদি $k - 2 > 0$

এবং $k - 10 < 0$ হয়। অর্থাৎ $k > 2$

এবং $k < 10$

∴ $2 < k < 10$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ ……… (i)

$cx^2 + bx + a = 0$ ……… (ii)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(ii) নং থেকে পাই, $\frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0$

বা, $\frac{c}{a}x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + 1 = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha x - \beta x + 1 = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - 1) - 1(\beta x - 1) = 0$

বা, $(\beta x - 1)(\alpha x - 1) = 0$

∴ $\beta x - 1 = 0$ এবং $\alpha x - 1 = 0$

∴ $x = \frac{1}{\beta}$ ∴ $x = \frac{1}{\alpha}$

∴ (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ **(Ans.)**

গ মনে করি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে, অপরটি α^2

∴ $\alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a}$ …… (i)

এবং $\alpha.\alpha^2 = \frac{c}{a}$

∴ $\alpha^3 = \frac{c}{a}$ ……… (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে

$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = -\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

বা, $\alpha(1 + \alpha + \alpha^2) = \frac{c - b}{a}$

বা, $\alpha\left(1-\frac{b}{a}\right)=\frac{c-b}{a}$ [∵ $\alpha+\alpha^2=-\frac{b}{a}$]

বা, $\alpha\left(\frac{a-b}{a}\right)=\frac{c-b}{a}$

বা, $\alpha(a-b)=c-b$

বা, $\alpha^3(a-b)^3=(c-b)^3$

বা, $\frac{c}{a}(a-b)^3=(c-b)^3$ [∵ $\alpha^3=\frac{c}{a}$]

∴ $c\,(a-b)^3=a\,(c-b)^3$

(i) কে ঘন করে,

$(\alpha+\alpha^2)^3=\left(-\frac{b}{a}\right)^3$

বা, $(\alpha)^3+(\alpha^2)^3+3\alpha.\alpha^2(\alpha+\alpha^2)=-\frac{b^3}{a^3}$

বা, $(\alpha)^3+(\alpha^3)^2+3\alpha^3(\alpha+\alpha^2)=-\frac{b^3}{a^3}$

বা, $\frac{c}{a}+\left(\frac{c}{a}\right)^2+3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}$

বা, $\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}-\frac{3bc}{a^2}=-\frac{b^3}{a^3}$

বা, $ca^2+c^2a-3abc=-b^3$ [উভয়পক্ষকে a^3 দ্বারা গুণ করে]

∴ $a^2c+ac^2+b^3=3abc$

সুতরাং, $c(a-b)^3=a(c-b)^3$ এবং $a^2c+ac^2+b^3=3abc$ হলে (i) এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ $px^2+qx+r=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

[রাণীভবানী সরকারী মহিলা কলেজ, নাটোর]

ক. সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি আলোচনা কর। ২

খ. যদি $q=r$ এবং মূলদ্বয় α ও β হলে প্রমাণ কর যে,
$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{r}{p}}=0.$ ৪

গ. যদি $p=4, q=-6$ ও $r=1$ এবং মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha+\frac{1}{\beta}$ এবং $\beta+\frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণ, $px^2+qx+r=0$

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান $x=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4pr}}{2p}$

(i) যদি $q^2-4pr=0$ হয়, তবে মূলদ্বয় $x=-\frac{q}{2p}$ এবং $-\frac{q}{2p}$ হয়, অর্থাৎ মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।

(ii) যদি q^2-4pr ধনাত্মক অর্থাৎ, $q^2-4pr>0$ হয়, তবে মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।

(iii) যদি q^2-4pr ঋণাত্মক অর্থাৎ, $q^2-4pr<0$ হয়, তবে মূলদ্বয় জটিল ও অসমান হবে। জটিল মূলদ্বয় একটি অপরটির অনুবন্ধী হবে।

(iv) যদি q^2-4pr ধনাত্মক অর্থাৎ, $q^2-4pr>0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা এবং p, q, r মূলদ সংখ্যা হয়, তবে মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে।

খ সৃজনশীল ১২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৭

গ 'খ' হতে পাই,

$\alpha+\beta=-\frac{q}{p}=\frac{-(-6)}{4}=\frac{3}{2}$ [∵ $p=4$ এবং $q=-6$]

এবং $\alpha\beta=\frac{r}{p}=\frac{1}{4}$ [∵ $r=1$ এবং $p=4$]

এখন, $\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

$=\frac{3}{2}+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{4}{1}$

$=\frac{3}{2}+6$

$=\frac{15}{2}$

এবং $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=\frac{1}{4}+2+\frac{1}{\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{4}+2+4$

$=\frac{1+8+16}{4}=\frac{25}{4}$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ: x^2- (মূলদ্বয়ের সমষ্টি)x + মূলদ্বয়ের গুণফল $=0$

বা, $x^2-\frac{15}{2}x+\frac{25}{4}=0$

বা, $\frac{4x^2-30x+25}{4}=0$

∴ $4x^2-30x+25=0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২১ সমীকরণ দুটি লক্ষ কর: $x^2+gx+t=0$ ……… (i)

$x^4+3x^3-11x^2-53x-60=0$ …… (ii)

[কারমাইকেল কলেজ, রংপুর]

ক. দ্বিঘাত সমীকরণটি গঠন কর যার একটি মূল $2-\sqrt{3}$। ২

খ. সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হলে দেখাও যে, $g=\pm\sqrt{4t+1}$ যখন $g, t\in R$। ৪

গ. সমীকরণ (ii) এর একটি মূল $-2+i$ হলে অন্য মূলগুলি নির্ণয় কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, যেহেতু অমূলদ মূলগুলি জোড়ায় থাকে কাজেই একটি মূল $2-\sqrt{3}$ হলে, অপর মূলটি $=2+\sqrt{3}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $=4$

মূলদ্বয়ের গুণফল $=4^2-(\sqrt{3})^2=16-3=13$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-4x+13=0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x^2+gx+t=0$

মনে করি, সমীকরণটির একটি মূল α এবং অপর মূলটি $\alpha+1$

∴ $\alpha+\alpha+1=-g$

$2\alpha=-g-1$

$\alpha=\frac{-g-1}{2}$

এবং $\alpha(\alpha+1)=t$

$\frac{-g-1}{2}\left(\frac{-g-1}{2}+1\right)=t$

বা, $\frac{-g-1}{2}\left(\frac{-g-1+2}{2}\right)=t$

বা, $-\frac{(g+1)}{2}\left\{\frac{-(g-1)}{2}\right\}=t$

$g^2-1=4t$

বা, $g^2=4t+1$

$g=\pm\sqrt{4t+1}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $x^4+3x^3-11x^2-53x-60=0$

যেহেতু বাস্তব সহগবিশিষ্ট জটিল মূলদ্বয় যুগলে থাকে।

∴ একটি মূল $-2+i$ হলে অপর মূলটি হবে $-2-i$

$-2-i$ ও $-2+i$ মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2-(-2-i-2+i)x+(-2-i)(-2+i)=0$

বা, $x^2+4x+5=0$

প্রদত্ত সমীকরণ, $x^4+3x^3-11x^2-53x-60=0$

বা, $x^4+4x^3+5x^2-x^3-4x^2-5x-12x^2-48x-60=0$

বা, $x^2(x^2+4x+5)-x(x^2+4x+5)-12(x^2+4x+5)=0$

বা, $(x^2+4x+5)(x^2-x-12)=0$

বা, $(x^2+4x+5)(x^2-4x+3x-12)=0$

বা, $(x^2+4x+5)\{x(x-4)+3(x-4)\}=0$

বা, $(x^2+4x+5)(x+3)(x-4)=0$

∴ হয়, $x^2+4x+5=0$

বা, $x=-2-i, -2+i$

অথবা, $x+3=0$ অথবা, $x-4=0$

বা, $x=-3$ বা, $x=4$

∴ অন্য মূলগুলি $-2-i, -3, 4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ $ax^2 + bx + b = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

[আহমদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]

ক. $\alpha^4 + \beta^4$ এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{P}{Q}} + \sqrt{\frac{Q}{P}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$ যখন মূলদ্বয়ের অনুপাত P : Q। ৪

গ. $\frac{1}{\alpha - 4\beta}$ ও $\frac{1}{\beta - 4\alpha}$ মূলগুলো দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $ax^2 + bx + b = 0$

এবং মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

এবং $\alpha\beta = \frac{b}{a}$

এখন, $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2$

$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$= \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$= \left\{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \times \frac{b}{a}\right\}^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right)^2$

$= \left(\frac{b^2 - 2ab}{a^2}\right)^2 - 2\frac{b^2}{a^2}$

$= \frac{(b^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2}{a^4}$

$= \frac{b^4 - 4ab^3 + 4a^2b^2 - 2a^2b^2}{a^4}$

$= \frac{b^4 - 4ab^3 + 2a^2b^2}{a^4}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৭

গ $ax^2 + bx + b = 0$

এবং মূলদ্বয় α, β হলে,

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = \frac{b}{a}$

এখন, $\frac{1}{\alpha - 4\beta} + \frac{1}{\beta - 4\alpha}$

$= \frac{\beta - 4\alpha + \alpha - 4\beta}{(\alpha - 4\beta)(\beta - 4\alpha)}$

$= \frac{-3\alpha - 3\beta}{\alpha\beta - 4\alpha^2 - 4\beta^2 + 16\alpha\beta}$

$= \frac{-3(\alpha + \beta)}{17\alpha\beta - 4(\alpha^2 + \beta^2)}$

$= \frac{-3(\alpha + \beta)}{17\alpha\beta - 4\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}}$

$= \frac{-3\left(-\frac{b}{a}\right)}{17 \times \frac{b}{a} - 4\left\{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \times \frac{b}{a}\right\}}$

$= \frac{\frac{3b}{a}}{\frac{17b}{a} - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{8b}{a}}$

$= \frac{3b}{a} \times \frac{a^2}{17ab - 4b^2 + 8ab}$

$= \frac{3b}{a} \times \frac{a^2}{25ab - 4b^2}$

$= \frac{3ab}{25ab - 4b^2}$

আবার, $\left(\frac{1}{\alpha - 4\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta - 4\alpha}\right)$

$= \frac{1}{(\alpha - 4\beta)(\beta - 4\alpha)}$

$= \frac{a^2}{25ab - 4b^2}$

$\therefore \left(\frac{1}{\alpha - 4\beta}\right)$ ও $\left(\frac{1}{\beta - 4\alpha}\right)$ মূল দুটি দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$x^2 - \frac{3ab}{25ab - 4b^2}x + \frac{a^2}{25ab - 4b^2} = 0$

$\therefore (25ab - 4b^2)x^2 - 3abx + a^2 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৩ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β।

[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]

ক. a, b, c মূলদ এবং $a + b + c = 0$ হলে দেখাও যে, $(b + c - a)x^2 + (c + a - b)x + (a + b - c) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে। ২

খ. $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ এর মূল দুইটি α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণটির পৃথায়ক $= (c + a - b)^2 - 4(b + c - a)(a + b - c)$

$= (a + b + c - 2b)^2 - 4(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)$

$= (-2b)^2 - 4(-2a)(-2c)$ $[\because a + b + c = 0]$

$= 4b^2 - 16ac = 4(b^2 - 4ac) = 4\{(-a - c)^2 - 4ac\}$ $[\because b = -a - c]$

$= 4(a^2 - 2ac + c^2) = 4(a - c)^2 = \{2(a - c)\}^2$ যা একটি পূর্ণবর্গ।

আবার a, b, c মূলদ বলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি মূলদ।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে। **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৬

গ সৃজনশীল ১৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৯

প্রশ্ন ▶ ২৪ $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$; $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 5$

[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]

ক. k এর মান কত হলে $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? ২

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{p^2}{q}$ এবং $\frac{q^2}{p}$ হলে, p, q মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x) = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর যার একটি মূল $(2 + i)$। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে যদি $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।

অতএব সমীকরণের পৃথায়ক $= 0$ হয়।

অর্থাৎ, $\{2(k + 3)\}^2 - 4(k + 1)(2k + 3) = 0$

বা, $k^2 + 6k + 9 - (2k^2 + 5k + 3) = 0$

বা, $k^2 + 6k + 9 - 2k^2 - 5k - 3 = 0$

বা, $-k^2 + k + 6 = 0$

বা, $k^2 - k - 6 = 0$

বা, $k^2 - 3k + 2k - 6 = 0$

বা, $k(k - 3) + 2(k - 3) = 0$

বা, $(k + 2)(k - 3) = 0$

$\therefore k = 3, -2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k = 3, -2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

এখন, $f(x) = 0$ হলে আমরা পাই,

$2x^2 + 7x - 4 = 0$ ……… (i)

(i) নং সমীকরনের মূলদ্বয় $\frac{p^2}{q}$ ও $\frac{q^2}{p}$ হওয়ায়,

$\frac{p^2}{q} + \frac{q^2}{p} = \frac{-7}{2}$ ……… (ii)

এবং $\frac{p^2}{q} \cdot \frac{q^2}{p} = \frac{-4}{2}$

বা, $pq = -2$

(ii) নং থেকে পাই, $\frac{p^2}{q} \times pq + \frac{q^2}{p} \times pq = \frac{-7}{2} \times pq$

বা, $p^3 + q^3 = \frac{-7}{2}(-2)$ $[\because pq = -2]$

বা, $p^3 + q^3 = 7$

বা, $(p + q)^3 - 3pq(p + q) = 7$

বা, $(p + q)^3 - 3(-2)(p + q) = 7$

বা, $(p+q)^3 + 6(p+q) = 7$

বা, $(p+q)^3 + 6(p+q) - 7 = 0$

বা, $(p+q)^3 - (p+q)^2 + (p+q)^2 - (p+q) + 7(p+q) - 7 = 0$

বা, $(p+q)^2(p+q-1) + (p+q)(p+q-1) + 7(p+q-1) = 0$

বা, $(p+q-1)\{(p+q)^2 + (p+q) + 7\} = 0$

বা, $(p+q-1)(p^2 + 2pq + q^2 + p + q + 7) = 0$

এখন, p ও q এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $p^2 + 2pq + q^2 + p + q + 7$ রাশিটির মান জটিল সংখ্যা হওয়ায় $p^2 + 2pq + q^2 + p + q + 7 \neq 0$

$\therefore$ $p + q - 1 = 0$

$\therefore$ $p + q = 1$

এখন, p, q মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - (p+q)x + pq = 0$

বা, $x^2 - 1.x + (-2) = 0$

$\therefore$ $x^2 - x - 2 = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 5$

এখন, $g(x) = 0$ হলে আমরা পাই,

$2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$

$2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2 + i$ যা একটি জটিল সংখ্যা। কিন্তু, জটিল মূল জোড়ায় থাকে। সুতরাং এর দ্বিতীয় মূলটি $2 - i$।

ধরি, তৃতীয় মূলটি α।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হতে পাই, $2 + i + 2 - i + \alpha = \frac{9}{2}$

বা, $4 + \alpha = \frac{9}{2}$

বা, $\alpha = \frac{9}{2} - 4 = \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ মূলত্রয় যথাক্রমে $2 \pm i, \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৫ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β।

[চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ল্যাবরেটরী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. উদ্দীপকের সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত? ২

খ. এরূপ একটি সমীকরণ গঠন কর যার মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha^2}$ এবং $\frac{1}{\beta^2}$। ৪

গ. $\alpha\beta^2 = 1$ হলে দেখাও যে, $a^3 + c^3 + abc = 0$ ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β।

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\frac{1}{\alpha^2}$ ও $\frac{1}{\beta^2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)x + \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{\beta^2} = 0$

বা, $x^2 - \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2}x + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = 0$

বা, $x^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}x + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = 0$

বা, $x^2 - \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}x + \frac{1}{\frac{c^2}{a^2}} = 0$

বা, $x^2 - \frac{b^2 - 2ca}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$

$\therefore c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\alpha\beta^2 = 1$

$\therefore$ $\alpha = \frac{1}{\beta^2}$ ……… (i)

'খ' হতে পাই, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ……… (ii)

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ……… (iii)

(iii) হতে, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

বা, $\frac{1}{\beta^2}.\beta = \frac{c}{a}$ [(i) হতে মান বসিয়ে]

বা, $\frac{1}{\beta} = \frac{c}{a}$

$\therefore$ $\beta = \frac{a}{c}$

$\therefore$ $\alpha = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{c}\right)^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{c^2}} = \frac{c^2}{a^2}$

α ও β এর মান (ii) নং এ বসিয়ে,

$\frac{c^2}{a^2} + \frac{a}{c} = -\frac{b}{a}$

বা, $\frac{c^3 + a^3}{a^2c} = -\frac{b}{a}$

বা, $c^3 + a^3 = \frac{-a^2bc}{a}$

বা, $a^3 + c^3 = -abc$

$\therefore$ $a^3 + c^3 + abc = 0$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶২৬ দৃশ্যকল্প-১: $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^m + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^m$

দৃশ্যকল্প-২: $\frac{1}{\alpha^2}$ এবং $\frac{1}{\beta^2}$ দুইটি মূল।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর : $\frac{1+2i}{3-4i}$ ২

খ. দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত রাশির মান 2 হবে যখন m এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং – 1 হবে যখন m অপর কোনো পূর্ণসংখ্যা। ৪

গ. $x^2 - x + 6 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় কর। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$= \frac{3 + 10i + 8i^2}{(3)^2 - (4i)^2} = \frac{3 + 10i - 8}{9 + 16}$

$= \frac{-5 + 10i}{25} = \frac{-5}{25} + \frac{10i}{25} = -\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$ **(Ans.)**

খ যেহেতু, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ এবং $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ উভয় রাশি এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং একটি অপরটির বর্গ,

অতএব, একটি $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega$ ধরলে অপরটি $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega^2$ হবে।

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \left[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\right]^m + \left[\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\right]^m$

$= \omega^m + (\omega^2)^m$

$= \omega^m + \omega^{2m}$

এখানে $m = 3n$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= \omega^{3n} + (\omega^2)^{3n}$

$= (\omega^3)^n + (\omega^3)^{2n} = 1 + 1 = 2$

$m = 3n + 1$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3n+1} + (\omega^2)^{3n+1}$

$= (\omega^3)^n.\omega + (\omega^3)^{2n}.\omega^2$

$= \omega + \omega^2$

$= -1$

$m = 3n + 2$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3n+2} + (\omega^2)^{3n+2}$

$= (\omega^3)^n.\omega^2 + (\omega^3)^{2n}.\omega^4$

$= \omega^2 + \omega$

$= -1$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

অর্থাৎ, m এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে প্রদত্ত রাশিটি = 2 এবং m এর মান অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে রাশিটি = –1 (দেখানো হলো)

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - x + 6 = 0$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = \frac{-(-1)}{1} = 1$ ……… (ii)

$\alpha\beta = \frac{6}{1} = 6$ ……… (iii)

এখন, $\frac{1}{\alpha^2}$ ও $\frac{1}{\beta^2}$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)x + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\beta^2}\right) = 0$$

বা, $x^2 - \left\{\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}\right\}x + \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = 0$

বা, $x^2 - \left\{\frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}\right\}x + \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{1^2 - 2.6}{6^2}\right)x + \frac{1}{6^2} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{1-12}{36}\right)x + \frac{1}{36} = 0$

বা, $\frac{36x^2 + 11x + 1}{36} = 0$

$\therefore$ $36x^2 + 11x + 1 = 0$ ... ... (iv)

সুতরাং সমীকরণ (iv) ই হচ্ছে $\frac{1}{\alpha^2}$ ও $\frac{1}{\beta^2}$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৭ $f(x) = px^2 + qx + r$ একটি আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ।

[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]

ক. C এর মান কত হলে $x^2 - 2x + C = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে? ২

খ. $p = 2b$, $q = 2a + 2b$, $r = 3a - 2b$ এর জন্য $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে প্রমাণ কর যে, $a - 2b = 0$ বা $4a - 11b = 0$ ৪

গ. $r = q$ এর জন্য $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত $m : n$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$। ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^2 - 2x + C = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে যদি এর নিশ্চায়ক ঋণাত্মক হয়।

অর্থাৎ $(-2)^2 - 4.1.C < 0$

বা, $4 - 4C < 0$

বা, $-4C < -4$

$\therefore$ $C > 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = px^2 + qx + r$

এখন, $p = 2b$, $q = 2a + 2b$, $r = 3a - 2b$

এর জন্য $f(x) = 2bx^2 + (2a + 2b)x + (3a - 2b)$

শর্তমতে, $2bx^2 + (2a + 2b)x + 3a - 2b = 0$

প্রদত্ত সমীকরণটির পৃথায়ক

$= \{2(a+b)\}^2 - 4.2b.(3a - 2b) = 4(a+b)^2 - 8b(3a - 2b)$

$= 4(a^2 + 5b^2 - 4ab) = 4(a^2 + 4b^2 - 4ab + b^2)$

$= 4\{(a - 2b)^2 + b^2\} \geq 0$

অতএব, মূলগুলো বাস্তব।

ধরি, সমীকরণটির একটি মূল α, তাহলে অপরটি 2α

$\therefore$ $\alpha + 2\alpha = -\frac{2(a+b)}{2b} = -\frac{a+b}{b}$

সুতরাং, $\alpha = -\frac{a+b}{3b}$ ... ... (i)

এবং $\alpha.\ 2\alpha = \frac{3a - 2b}{2b}$

সুতরাং, $2\alpha^2 = \frac{3a - 2b}{2b}$ ... ... (ii)

(i) নং থেকে α এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$2\left(-\frac{a+b}{3b}\right)^2 = \frac{3a - 2b}{2b}$

বা, $\frac{2(a^2 + b^2 + 2ab)}{9b} = \frac{3a - 2b}{2}$

বা, $4a^2 + 22b^2 - 19ab = 0$

বা, $4a^2 - 11ab - 8ab + 22b^2 = 0$

বা, $a(4a - 11b) - 2b(4a - 11b) = 0$

বা, $(a - 2b)(4a - 11b) = 0$

$\therefore$ $a - 2b = 0$ বা, $4a - 11b = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৭

প্রশ্ন ▶ ২৮ $z = x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা। *[সরকারি বি এল কলেজ, খুলনা]*

ক. দেখাও যে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $-\frac{b}{a}$ ২

খ. $z_1 = 3i$ এবং $z_2 = -3i$ হলে $|z - z_1| + |z - z_2| = 10$ সঞ্চারপথের আদর্শ আকার নির্ণয় কর। ৪

গ. $\sqrt{-5} - 1$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β।

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\therefore$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha)(x - \beta)$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta)$

$\therefore$ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy$, $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$

প্রদত্ত সমীকরণ, $|z - z_1| + |z - z_2| = 10$

বা, $|x + iy - 3i| + |x + iy + 3i| = 10$

বা, $|x + i(y - 3)| + |x + i(y + 3)| = 10$

বা, $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 10$

ব, $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$

বা, $x^2 + (y-3)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$

বা, $x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2 + 6y + 9 + 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$

বা, $20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 12y + 100$

বা, $5\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 3y + 25$

বা, $25(x^2 + y^2 + 6y + 9) = 9y^2 + 150y + 625$

বা, $25x^2 + 25y^2 + 150y + 225 = 9y^2 + 150y + 625$

বা, $25x^2 + 16y^2 = 400$

বা, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore$ ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

যার আদর্শ আকার $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **(Ans.)**

গ ধরি, একটি মূল α, অপরটি β

$\therefore$ $\alpha = \sqrt{-5} - 1 = -1 + \sqrt{5}i$

$\therefore$ $\beta = -1 - \sqrt{5}i$

$\therefore$ $\alpha + \beta = -1 + \sqrt{5}i - 1 - \sqrt{5}i$
$= -2$

$\therefore$ $\alpha\beta = (-1 + \sqrt{5}i)(-1 - \sqrt{5}i)$
$= (-1)^2 - (\sqrt{5}i)^2 = 1 + 5 = 6$

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\therefore$ $x^2 + 2x + 6 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৯ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = |2x - 7|$

দৃশ্যকল্প-২: $\phi(x) = x^2 - 5x + 6$ *[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]*

ক. $\frac{7 - i}{3 + i}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। ২

খ. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও : $\frac{1}{f(x)} > 2$; যখন $x \neq \frac{7}{2}$ ৪

গ. $\phi(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে α^3 ও β^3 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $z = \frac{7 - i}{3 + i}$

$\therefore$ $z = \frac{7 - i}{3 + i} = \frac{(7 - i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)}$

$= \frac{21 - 3i - 7i + i^2}{(3)^2 - (i)^2}$

$= \frac{21 - 10i - 1}{9 - (-1)}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{20 - 10i}{9 + 1} = \frac{10(2 - i)}{10} = 2 - i$

∴ জটিল সংখ্যার মডুলাস $= |z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ **(Ans.)**

এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-1}{2}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

যেহেতু $(2, -1)$ বিন্দুটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত

∴ আর্গুমেন্ট, $\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = |2x - 7|$

$\therefore \frac{1}{f(x)} > 2$

বা, $\frac{1}{|2x-7|} > 2 \quad \left[x \neq \frac{7}{2}\right]$

বা, $|2x - 7| < \frac{1}{2}$ বা, $-\frac{1}{2} < 2x - 7 < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} + 7 < 2x - 7 + 7 < \frac{1}{2} + 7$ [উভয়পক্ষে 7 যোগ করে]

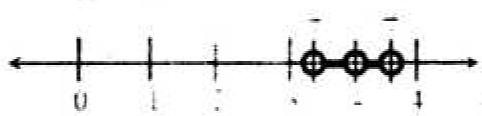
বা, $\frac{-1+14}{2} < 2x < \frac{1+14}{2}$ বা, $\frac{13}{2} < 2x < \frac{15}{2}$

$\therefore \frac{13}{4} < x < \frac{15}{4}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

∴ নির্ণেয় সমাধান : $\frac{13}{4} < x < \frac{15}{4}$ এবং $x \neq \frac{7}{2}$ **(Ans.)**

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{13}{4} < x < \frac{15}{4} \text{ এবং } x \neq \frac{7}{2}\right\}$

সংখ্যারেখায় :



(Ans.)

গ দেওয়া আছে, $\phi(x) = x^2 - 5x + 6$

$\therefore \quad \phi(x) = 0$

বা, $\quad x^2 - 5x + 6 = 0 \ldots\ldots (i)$

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = \frac{-(-5)}{1} = 5 \ldots\ldots (ii)$

এবং $\alpha\beta = \frac{6}{1} = 6 \ldots\ldots (iii)$

এখন, α^3 ও β^3 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $x^2 - (\alpha^3 + \beta^3)x + \alpha^3\beta^3 = 0$

বা, $\quad x^2 - \{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}x + (\alpha\beta)^3 = 0$

বা, $\quad x^2 - \{(5)^3 - 3.6.5\}x + (6)^3 = 0$ [(ii) ও (iii) হতে মান বসিয়ে]

বা, $\quad x^2 - (125 - 90)x + 216 = 0$

$\therefore \quad x^2 - 35x + 216 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩০ দৃশ্যকল্প-১: $p = 4x + 6y,\ Q = 10x + 6y;\ x, y \in R$

দৃশ্যকল্প-২: $cx^2 + bx + a = 0$ *[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]*

ক. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $\left(\frac{1+\omega-\omega^2}{2}\right)^9 + \left(\frac{1+\omega^2-\omega}{2}\right)^9$ এর মান কত? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $P \leq 12$, $Q \geq 15$ এবং $x, y \geq 0$ হলে $z = 2x - 4y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল দৃশ্যকল্প-২ এর একটি মূলের দ্বিগুণ হলে প্রমাণ কর যে, $(2a + c)^2 = 2b^2$ অথবা $2a = c$ ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(\frac{1+\omega-\omega^2}{2}\right)^9 + \left(\frac{1+\omega^2-\omega}{2}\right)^9$

$= \left(\frac{-\omega^2-\omega^2}{2}\right)^9 + \left(\frac{-\omega-\omega}{2}\right)^9 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= \left(\frac{-2\omega^2}{2}\right)^9 + \left(\frac{-2\omega}{2}\right)^9 = (-\omega^2)^9 + (-\omega)^9$

$= \{(-1)\omega^2\}^9 + \{(-1)\omega\}^9 = -\omega^{18} - \omega^9 = -(\omega^3)^6 - (\omega^3)^3$

$= -1 - 1 \quad [\because \omega^3 = 1]$

$= -2$ **(Ans.)**

খ অভীষ্ট ফাংশন: $Z = 2x - 4y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $P \leq 12$

$\therefore \quad 4x + 6y \leq 12 \quad [\because P = 4x + 6y]$

আবার, $Q \geq 15$

$\therefore \quad 10x + 6y \geq 15 \quad [\because Q = 10x + 6y]$

এবং $x, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই, $4x + 6y = 12$

বা, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

$10x + 6y = 15$

বা, $\frac{2x}{3} + \frac{2y}{5} = 1$

বা, $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$x = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

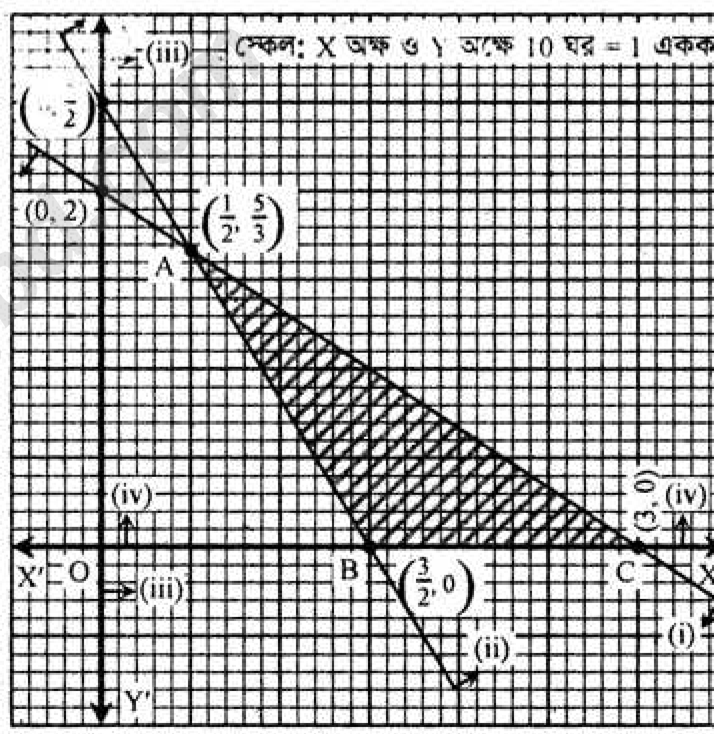
এবং $y = 0 \ldots\ldots\ldots (iv)$

লেখচিত্র হতে দেখা যায় (i) এর সকল বিন্দু এবং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $4x + 6y \leq 12$ সত্য। আবার, (ii) এর সকল বিন্দু এবং (ii) এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $10x + 6y \geq 15$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC

A হচ্ছে (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু;

B হচ্ছে (ii) ও (iv) এর ছেদবিন্দু এবং C হচ্ছে (i) ও (iv) এর ছেদবিন্দু

$A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right) \quad B\left(\frac{3}{2}, 0\right) \quad C(3, 0)$



এখন, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$ বিন্দুতে, $z = 2 \times \frac{1}{2} - 4\frac{5}{3} = 1 - 6.667 = -5.667$

$B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ বিন্দুতে, $z = 2 \times \frac{3}{2} - 4 \times 0 = 3$

$C(3, 0)$ বিন্দুতে, $z = 2 \times 3 - 4 \times 0 = 6 - 0 = 6$

স্পষ্টত $A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$ এর জন্য z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{3}; z = -5.667$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬২

★ বহুপদী, উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান, দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান

১. নিচের কোনটি বহুপদী? (সহজ)
ক $x^3 - x^{-2} + 1$ খ $1 + x + x^2 + x^3 + ...$
গ $x^3 + x^2 + 2$ ঘ $x^3 + 4x^{\frac{1}{2}} + 5$ **গ**

২. বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য কোনটি? (সহজ)
ক n ঘাতের সমীকরণের কমপক্ষে n মূল আছে
খ n ঘাতের সমীকরণের n সংখ্যক অবাস্তব মূল
গ n ঘাতের সমীকরণের n সংখ্যক মূল আছে
ঘ n ঘাতের সমীকরণের n বাস্তব মূল আছে **গ**

৩. $x^n - a^n$ বহুপদীকে যদি $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে নিঃশেষে বিভাজ্য হয় তবে ভাগফল কত ঘাতের হবে? (সহজ)
ক 1 খ n − 1
গ n ঘ n + 1 **খ**

৪. $9x^2 - 6x + 1$ রাশিটির ক্ষুদ্রতম মান কত? (সহজ)
ক 0 খ 1
গ 2 ঘ 3 **ক**

ব্যাখ্যা: ক্ষুদ্রতম মান $= c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{(-6)^2}{4.9} = 0$

৫. $3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 7x + 9$ কে $(x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত? (মধ্যম)
ক 6 খ 10
গ 16 ঘ − 12 **খ**

ব্যাখ্যা:
$f(1) = 3(1)^4 - 5(1)^3 - 4(1)^2 + 7.1 + 9$
$= 10$

৬. x বাস্তব হলে, $5 + 3x - x^2$ এর সর্বোচ্চ মান কত? (মধ্যম)
ক 3 খ $\frac{11}{4}$
গ $\frac{29}{4}$ ঘ $\frac{27}{4}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $5 + 3x - x^2$
$= 5 - \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4}$
$= \frac{29}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
∴ সর্বোচ্চ মান $= \frac{29}{4}$

৭. $-5x^2 + 10x + 5$ রাশির ক্ষেত্রে নির্ণয় করা সম্ভব — (মধ্যম)
ক সর্বোচ্চ মান খ সর্বনিম্ন মান
গ উভয় ঘ কোনোটিই নয় **ক**

ব্যাখ্যা: $f(x) = -5x^2 + 10x + 5$ হলে,
$f'(x) = -10x + 10$
এবং $f''(x) = -10 < 0$
সুতরাং, রাশিটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

৮. α এর মান কত হলে $x^3 + x^2 + x + \alpha$ রাশিটি $x + 2$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে? (মধ্যম)
ক 4 খ − 6
গ 6 ঘ − 85 **গ**

ব্যাখ্যা: $x^3 + x^2 + x + \alpha$, $x + 2$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হলে,
$(-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + \alpha = 0$
বা, $-8 + 4 - 2 + \alpha = 0$
$\therefore \alpha = 6$

৯. $-3x^2 + 11x + 7$ এর সর্বোচ্চ মানের জন্য x এর মান হবে $(x \in R)$ — (মধ্যম)
ক 3 খ 2
গ $\frac{2}{5}$ ঘ $\frac{11}{6}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $f(x) = -3x^2 + 11x + 7$ হলে
$f'(x) = -6x + 11$
$f''(x) = -6 < 0$
সর্বোচ্চ মানের জন্য, $f'(x) = -6x + 11 = 0$
$\therefore x = \frac{11}{6}$

১০. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে অন্য মূলটি কত? (মধ্যম)
ক 1 খ 2
গ 3 ঘ 4 **ক**

ব্যাখ্যা: $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4,
ধরি, অপর মূলটি α.
$\therefore \alpha + 4 = 5$
$\therefore \alpha = 1$

১১. $x^2 = 2$ সমীকরণটি কত ঘাত বিশিষ্ট? (সহজ)
ক 2 খ 1
গ 0 ঘ −1 **ক**

১২. $xyz + x^2 + x^2y^2z + 3y$ বহুপদীটির ঘাত কত? (সহজ)
ক 3 খ 4
গ 2 ঘ 5 **ঘ**

১৩. n ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সর্বোচ্চ কতটি মূল থাকবে? (সহজ)
ক 0 খ 1
গ n ঘ n + 1 **গ**

১৪. কোনগুলো $ax^2 = 0$ সমীকরণের মূল? (সহজ)
ক −a, 0 খ a, 0
গ 0, 0 ঘ a, a **গ**

১৫. মূলদ সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ হলে, অপর মূল কোনটি? (কঠিন)

ক $2+\sqrt{3}$ খ $2-\sqrt{3}$
গ $\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$ ঘ $\frac{1}{-2-\sqrt{3}}$ ক

ব্যাখ্যা: অপর মূল $= \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

$= \frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$= \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$

১৬. কোন দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি মূল $\sqrt{-5}-1$? (কঠিন)

ক $x^2+2x+6=0$ খ $x^2+x+3=0$
গ $x^2+2x-6=0$ ঘ $x^2+x-3=0$ ক

১৭. $f(x) = 45x^4+18x^3+4x^2-22x-45$ এর একটি উৎপাদক — (কঠিন)

ক $x-1$ খ $x+4$
গ $x+1$ ঘ $x-3$ ক

ব্যাখ্যা: $f(x) = 45x^4+18x^3+4x^2-22x-45$
এখানে, $f(1)=0$ অর্থাৎ, $x-1$, একটি উৎপাদক

১৮. $f(x) = x^3-6x^2+9x-4$ সমীকরণের দুইটি উৎপাদক $(x-1)$ ও $(x-1)$ হলে x এর অপর মান কত? (সহজ)

ক 4 খ 2
গ −2 ঘ −4 ক

১৯. $2x^2+x-1=0$ এবং $2x^2-3x+1=0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল কোনটি? (মধ্যম)

ক −1 খ 0
গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1 গ

ব্যাখ্যা: $2x^2+x-1=0$ এবং $2x^2-3x+1=0$
$\Rightarrow (2x-1)(x+1)=0$ $\Rightarrow (2x-1)(x-1)=0$
$\therefore x=\frac{1}{2}, x=-1$ $\therefore x=\frac{1}{2}, x=1$

$\therefore$ সাধারণ মূল $\frac{1}{2}$

২০. $5+\sqrt{3}$ এবং $5-\sqrt{3}$ মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $x^2-9x+20=0$
খ $x^2+9x-18=0$
গ $x^2-18x-20=0$
ঘ $x^2-10x+22=0$ ঘ

২১. যদি $p+q+r=0$ হয়, তবে $x^2+rx+pq=0$ সমীকরণের মূল দুইটি হলো — (কঠিন)

ক p, q খ r, pq
গ p, r ঘ q, r ক

২২. $x^2-6x+7=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কত? (মধ্যম)

ক $2\pm\sqrt{2}$ খ $3\pm\sqrt{2}$
গ $2\pm2\sqrt{2}$ ঘ $3\pm2\sqrt{2}$ খ

২৩. $x(x-1)(x-3)=0$ সমীকরণের মূলগুলি হবে — (মধ্যম)

ক 1, 3 খ 0, 1, 3
গ 0, −1, 3 ঘ 0, −1, −3 খ

২৪. মূলদ সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $a-b$ (a অমূলদ ও b মূলদ) হলে অপর মূল কোনটি? (সহজ)

ক $a+b$ খ $-a-b$
গ $-a+b$ ঘ $a-b$ খ

ব্যাখ্যা: যেহেতু a অমূলদ
$\therefore$ অপর মূলটি হবে $-a-b$

২৫. $x=\sqrt{2}+1$ হলে x^2-2x+1 এর মান কত? (সহজ)

ক $\sqrt{2}-1$ খ $\sqrt{2}$
গ 2 ঘ 4 গ

ব্যাখ্যা: $x^2-2x+1=(x-1)^2$
$=(\sqrt{2}+1-1)^2$
$=(\sqrt{2})^2=2$

২৬. বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল i^3 হলে অপর মূল কোনটি? (মধ্যম)

ক 0 খ −1
গ −i ঘ i ঘ

২৭. বাস্তব সহগবিশিষ্ট কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল i হলে সমীকরণটি হবে— (মধ্যম)

ক $x^2-1=0$ খ $x^2+1=0$
গ $x^2-i=0$ ঘ $x^2+i=0$ খ

ব্যাখ্যা: ধরি একটি মূল i
$\therefore$ অপরটি −i
$\therefore$ সমীকরণ $(x+i)(x-i)=0$
বা, $x^2+1=0$

২৮. $x^2+2x-1=0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি কি? (সহজ)

ক মূলদ খ জটিল
গ বাস্তব ও অসমান ঘ বাস্তব ও সমান গ

ব্যাখ্যা: $x^2+2x-1=0$ সমীকরণের পৃথায়ক
$=2^2-4.1.(-1)=4+4=8>0$
$\therefore$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

২৯. x-এর কোন মান $\log_3(x^2+4x+12)=2$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে? (সহজ)

ক 2, −4 খ 1, −3
গ −1, 3 ঘ −1, −3 ঘ

ব্যাখ্যা: $x^2 + 4x + 12 = 3^2$ বা, $x^2 + 4x + 3 = 0$
$\therefore x = -1, -3$

৩০. $x^2 + px + q = 0$ এর একটি মূল $2 + i\sqrt{3}$ হলে p ও q এর মান কত? (সহজ)
ক) 4, − 7　খ) 4, 7
গ) − 4, 7　ঘ) − 4, − 7　**গ**

৩১. $x^2 - 3x + 2 = 0$ এর বাস্তব সমাধান কয়টি? (সহজ)
ক) 1　খ) 2
গ) 3　ঘ) 4　**খ**

৩২. $(x - 1)^2 - 4 = 0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? (মধ্যম)
ক) 3, 3　খ) − 3, − 3
গ) 3, − 1　ঘ) − 1, − 1　**গ**

ব্যাখ্যা: $(x - 1)^2 - 4 = 0$
বা, $x^2 - 2x - 3 = 0$
বা, $x^2 - 3x + x - 3 = 0$
বা, $(x - 3)(x + 1) = 0$
বা, $x = 3, -1$

৩৩. $|2x - x^2 - 3| = 1$ সমীকরণের বাস্তব সমাধান কয়টি? (সহজ)
ক) 0　খ) 2
গ) 3　ঘ) 4　**ক**

৩৪. $x^2 - 11x + a = 0$ এবং $x^2 - 14x + 2a = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে a এর মান কত? (মধ্যম)
ক) 0　খ) 12
গ) 24　ঘ) 32　**গ**

৩৫. বহুপদী সমীকরণ —
i. এ বহুপদীর ঘাতের সমান সংখ্যক মূল থাকে।
ii. বাস্তব সহগবিশিষ্ট হলে জটিল মূল জোড়ায় জোড়ায় থাকে।
iii. মূলদ সহগবিশিষ্ট হলে অমূলদ মূল যুগলে থাকে।
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক) i ও ii　খ) i ও iii
গ) ii ও iii　ঘ) i, ii ও iii　**ঘ**

৩৬. $2x^3 + 3x^2y + 4xy^2 + 5y^3$ একটি —
i. দ্বি-চলকের বহুপদী সমীকরণ
ii. ত্রিঘাত বিশিষ্ট বহুপদী
iii. সমমাত্রিক বহুপদী
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক) i ও ii　খ) ii ও iii
গ) i ও iii　ঘ) i, ii ও iii　**ঘ**

৩৭. $f(x) = x^6 - 3x^4 - 2x^3$ বহুপদী সমীকরণে —
i. $f(0) = 0$
ii. একটি মূল 0
iii. $x - 2$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক) i ও ii　খ) i ও iii
গ) ii ও iii　ঘ) i, ii ও iii　**ঘ**

৩৮. $P(x) = x^3 + x + 2$ হলে —
i. $P(-1) = 0$
ii. সমীকরণ $P(x) = 0$ এর একটি মূল − 1
iii. $P(x)$ বহুপদী নয়
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক) i ও ii　খ) ii ও iii
গ) iii　ঘ) সবগুলি　**ক**

ব্যাখ্যা: (i) $P(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$
(ii) $x = -1$ হলে $P(x) = 0$ হয়
(iii) $x^3 + x + 2$ একটি বহুপদী।

৩৯. $(a + x)^n = 0$ বহুপদী সমীকরণের —
i. সকল মূলই অবাস্তব হবে
ii. মূলের সংখ্যা n
iii. পদের সংখ্যা n + 1
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক) i ও ii　খ) i ও iii
গ) ii ও iii　ঘ) i, ii ও iii　**গ**

৪০. $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2 + i\sqrt{3}$ হলে সমীকরণটির —
i. a এর মান − 4
ii. b এর মান 7
iii. নিশ্চায়ক − 12
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক) i ও ii　খ) i ও iii
গ) ii ও iii　ঘ) i, ii ও iii　**ঘ**

৪১. $cx^2 - (ac + b)x + ab = 0$ সমীকরণের একটি উৎপাদক $(x - a)$ হলে —
i. $f(a) = 0$
ii. একটি মূল $\frac{b}{c}$
iii. অপর উৎপাদক $\left(x - \frac{a}{b}\right)$
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক) i ও ii　খ) i ও iii
গ) ii ও iii　ঘ) i, ii ও iii　**ক**

ব্যাখ্যা: $cx^2 - (ac + b)x + ab = 0 \Rightarrow cx^2 - acx - bx$
$\Rightarrow cx(x - a) - b(x - a) = 0 \quad \Rightarrow (x - a)(cx - b) = 0$

৪২. $x^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণের —
i. একটি মূল $1 - \sqrt{2}$ ii. মূলদ্বয় অমূলদ
iii. মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক) i ও ii　খ) i ও iii
গ) ii ও iii　ঘ) i, ii ও iii　**ঘ**

৪৩. $x^2 + x + a = 0$ সমীকরণের মূলগুলো —

i. $a = \frac{1}{4}$ হলে বাস্তব ও সমান হবে

ii. $a < 0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে

iii. $a > 0$ হলে মূলদ্বয় অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(ঘ)**

৪৪. $kx^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণটি —

i. দ্বিঘাত, যখন $k \neq 0$ii. দুটি মূল আছে

iii. মূলগুলো বাস্তব

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(ক)**

৪৫. $x^2 + px + 10 = 0$ এবং $x^2 + qx - 10 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল α হলে —

i. $\alpha = 0$ ii. $\alpha \neq 0$

iii. $\alpha = \frac{-20}{p-q}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(গ)**

৪৬. $(x - a)^2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় —

i. বাস্তব, সমান ii. বাস্তব, মূলদ

iii. অবাস্তব, অসমান

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(ক)**

ব্যাখ্যা: $(x - a)^2 = 0 \Rightarrow (x - a)(x - a) = 0$

$\therefore x = a, a$

$\therefore$ মূলদ্বয় বাস্তব, সমান ও মূলদ।

৪৭. $4x^2 - 20x + 25 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় —

i. সমান

ii. বাস্তব

iii. অমূলদ

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i (খ) ii

(গ) i ও ii (ঘ) i, ii ও iii **(গ)**

ব্যাখ্যা: নিশ্চায়ক $= (-20)^2 - 4.4.25$

$= 400 - 400$

$= 0$

$\therefore$ মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান।

নিচের তথ্যের আলোকে ৪৮ ও ৪৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$x^2 - 3x + 2 + k = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যেখানে k ধ্রুবক।

৪৮. k এর মান কত হলে $x - 3$ প্রদত্ত সমীকরণের উৎপাদক (সহজ)

(ক) -3 (খ) -2

(গ) 1 (ঘ) 2 **(খ)**

ব্যাখ্যা: যেহেতু $x - 3$ একটি উৎপাদক

$\therefore 3^2 - 3.3 + 2 + k = 0 \Rightarrow 2 + k = 0 \;\therefore k = -2$

৪৯. $k = -6$ হলে সমীকরণের একটি ধনাত্মক মূল কত হবে? (মধ্যম)

ab = 0

(ক) -4 (খ) -1

(গ) 1 (ঘ) 4 **(ঘ)**

ব্যাখ্যা: $k = -6$ হলে

$x^2 - 3x + 2 - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$

$\therefore x = 4, x = -1$

যেহেতু মূল ধনাত্মক। $\therefore$ ধনাত্মক মূল 4

নিচের তথ্যের আলোকে (৫০ ও ৫১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$ax^2yz + bxy^3 + cx^2 + dxyz + eyz + k = 0$

একটি তিন চলকের বহুপদী সমীকরণ যেখানে a, b, c, d, e ও k ধ্রুবক।

৫০. প্রদত্ত সমীকরণটি কত ঘাতের? (সহজ)

(ক) 4 (খ) 3

(গ) 2 (ঘ) 1 **(ক)**

৫১. a ও b উভয় শূন্য হলে সমীকরণটি কত ঘাতের হবে? (সহজ)

(ক) 0 (খ) 1

(গ) 2 (ঘ) 3 **(ঘ)**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫২ ও ৫৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$\frac{px^2}{2} + x + \frac{1}{2} = 0$ এবং $x^2 + 2x + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের 2টি সাধারণ মূল আছে।

৫২. p এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) -1 (খ) 0

(গ) 1 (ঘ) 2 **(গ)**

ব্যাখ্যা: $\frac{px^2}{2} + x + \frac{1}{2} = 0$ বা, $px^2 + 2x + 1 = 0$

যদি $p = 1$ হয়, তবে $px^2 + 2x + 1 = 0$ এবং $x^2 + 2x + p = 0$ একই সমীকরণ হবে।

৫৩. সাধারণ মূল কত? (মধ্যম)

(ক) -1 (খ) 0

(গ) 1 (ঘ) ± 1 **(ক)**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৪ ও ৫৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$x^2 - (a + 1)x + a = 0$ এবং $x^2 + (b - 1)x - b = 0$ দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি সাধারণ মূল আছে।

৫৪. সাধারণ মূলটি কত? (কঠিন)

(ক) -1 (খ) 1

(গ) a (ঘ) b **(খ)**

৫৫. কোন শর্তে দুটি সাধারণ মূল থাকবে? (মধ্যম)
ক $a = 1$　　খ $b = 1$
গ $a = -b$　　ঘ $a = b$　　**গ**

ব্যাখ্যা:
$x^2 - (a+1)x + a = 0$　　$x^2 + (b-1)x - b = 0$
বা, $x^2 - ax - x + a = 0$　　বা, $x^2 + bx - x - b = 0$
বা, $(x-1)(x-a) = 0$　　বা, $(x-1)(x+b) = 0$
$\therefore x = 1, x = a$　　$\therefore x = 1, x = -b$
$\therefore$ সাধারণ মূল 1. শর্ত $a = -b$

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৬ ও ৫৭)নং প্রশ্নের উত্তর দাও।
$px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

৫৬. সাধারণ মূল কত? (কঠিন)
ক 0　　খ 1
গ p　　ঘ q　　**খ**

৫৭. $p + q$ এর মান কত? (কঠিন)
ক -2　　খ -1
গ 0　　ঘ 1　　**খ**

ব্যাখ্যা: সাধারণ মূল α
$p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$
$q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$
$\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{p^2-q^2}$
$\therefore \frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{q-p}$ এবং $\frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{p^2-q^2}$
$\therefore \alpha = 1 \Rightarrow p + q + 1 = 0$
$\therefore p + q = -1$

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৮ ও ৫৯)নং প্রশ্নের উত্তর দাও।
$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ একটি বীজগাণিতিক সমীকরণ।

৫৮. সমীকরণটি কত ঘাতের? (সহজ)
ক 0　　খ 1
গ 2　　ঘ 3　　**গ**

৫৯. $a = b = c = 1$ হলে সমীকরণের মূলগুলো কোনটি? (মধ্যম)
ক 1, 1　　খ ± 1
গ $-1, -1, -1$　　ঘ 1, 1, 1　　**ক**

ব্যাখ্যা: $(x-1)^2 + (x-1)^2 + (x-1)^2 = 0$
$\Rightarrow 3(x-1)^2 = 0$
$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$
$\therefore x = 1, 1$

নিচের তথ্যের আলোকে (৬০ ও ৬১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
মূলদ সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $-1 + \sqrt{3}$।

৬০. অপর মূলটি কত হবে? (সহজ)
ক $-1-\sqrt{3}$　　খ $1+\sqrt{3}$
গ $1-\sqrt{3}$　　ঘ $-1+\sqrt{3}$　　**ক**

৬১. মূলদ্বয়ের যোগফল কত হবে? (সহজ)
ক -1　　খ -2
গ 1　　ঘ 2　　**খ**

★ **দ্বিঘাত সমীকরণের মূল-সহগ সম্পর্ক, পৃথায়ক, দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয়**

৬২. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের $b^2 - 4ac = 0$ হলে, মূলদ্বয় কেমন হবে? (সহজ)
ক অবাস্তব ও অসমান
খ বাস্তব ও সমান
গ বাস্তব ও অসমান
ঘ অবাস্তব ও সমান　　**খ**

৬৩. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর পৃথায়ক $D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে, মূলদ্বয় — (সহজ)
ক পরস্পর সমান, বাস্তব ও মূলদ হবে।
খ পরস্পর অসমান, বাস্তব ও মূলদ হবে।
গ বাস্তব এবং অসমান।
ঘ পরস্পর সমান, অবাস্তব ও মূলদ হবে।　　**খ**

৬৪. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর পৃথায়ক $D < 0$ মূলদ্বয়— (সহজ)
ক পরস্পর সমান, বাস্তব ও মূলদ হবে।
খ পরস্পর অসমান, বাস্তব ও মূলদ হবে।
গ বাস্তব এবং অসমান।
ঘ জটিল সংখ্যা।　　**ঘ**

৬৫. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এ $b = 0$ হলে, মূলদ্বয়— (সহজ)
ক পরস্পর সমান, বাস্তব ও মূলদ হবে।
খ পরস্পর অসমান, বাস্তব ও মূলদ হবে।
গ বাস্তব এবং অসমান।
ঘ সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।　　**ঘ**

৬৬. $x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণে k এর মান কত হলে মূলদ্বয় জটিল হবে? (মধ্যম)
ক $-4 < k$　　খ $-1 < k < 1$
গ $-2 < k < 2$　　ঘ $0 < k < 1$　　**গ**

ব্যাখ্যা: $k^2 - 4 < 0$ বা, $k^2 < 4$
$\therefore -2 < k < 2$

৬৭. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক কোনটি? (সহজ)
ক $a^2 - bc$　　খ $b^2 - 2bc$
গ $b^2 - 4ac$　　ঘ $\sqrt{b^2 - 4ac}$　　**গ**

৬৮. $ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে কখন? (মধ্যম)
ক $b^2 - 4ac > 0$ হলে
খ $b^2 - 4ac < 0$ হলে
গ $b^2 - 4ac$ পূর্ণবর্গ হলে
ঘ $b^2 - 4ac = 0$ হলে　　**ঘ**

৬৯. কোন শর্তে $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল শূন্য হবে? (সহজ)
ক $a = 0$　　খ $b = 0$
গ $c = 0$　　ঘ $x = 0$　　**গ**

৭০. নিম্নের কোন শর্ত সাপেক্ষে $ax^2 + bx + c = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হবে? (সহজ)

ⓚ $b \neq 0$ ⓚ্ব $a \neq 0$

ⓖ $c \neq 0$ ⓖ্ব $a \neq b \neq c$ — **খ**

(ক) $b \neq 0$ (খ) $a \neq 0$ (গ) $c \neq 0$ (ঘ) $a \neq b \neq c$ — **খ**

৭১. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হলে কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) $b^2 - 49ca = 0$ (খ) $12b^2 = 49ca$

(গ) $12c^2 = 49ab$ (ঘ) $c^2 = 49ab$ — **খ**

ব্যাখ্যা: $3\alpha + 4\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \frac{-b}{7a}$

$12\alpha^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 12\left(\frac{-b}{7a}\right)^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \frac{12b^2}{49a^2} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 12b^2 = 49ac$

৭২. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির গুণফল 1 হলে কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) $a = c$ (খ) $a = b$

(গ) $b = c$ (ঘ) $a = 0$ — **ক**

৭৩. $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ সমীকরণের মূল দুইটি সমান ও পরস্পর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) $a = 0$ (খ) $b = 0$

(গ) $c = 0$ (ঘ) $a = c$ — **খ**

৭৪. $b = c = 0$ হলে $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ সমীকরণের উভয় মূলই কেমন হবে? (সহজ)

(ক) শূন্য (খ) ধনাত্মক

(গ) ঋণাত্মক (ঘ) কাল্পনিক — **ক**

৭৫. $\frac{1}{x} + p + qx = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $p^2 - 4q = 0$ (খ) $q = p^2$

(গ) $q^2 = 4p$ (ঘ) $p = q$ — **ক**

৭৬. $ax^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে — (মধ্যম)

(ক) a, b, c সমান্তর প্রগমনে থাকবে

(খ) a, b, c বিপরীত প্রগমনে থাকবে

(গ) a, b, c গুণোত্তর প্রগমনে থাকবে

(ঘ) ক ও গ উভয়েই — **গ**

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় সমান হলে, পৃথায়ক শূন্য।

$\therefore (2b)^2 - 4ac = 0$

বা, $4b^2 = 4ac$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

৭৭. $3x^2 - 4x - 7 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির যোগফল কত? (সহজ)

(ক) 5 (খ) $\frac{-5}{3}$

(গ) -5 (ঘ) $\frac{4}{3}$ — **ঘ**

৭৮. সমীকরণ $x^2 + a^2x + a^4 = 0$ এর মূলগুলি কীরূপ? (a বাস্তব) (মধ্যম)

(ক) বাস্তব (খ) জটিল

(গ) কাল্পনিক (ঘ) জটিল ও কাল্পনিক — **খ**

ব্যাখ্যা: পৃথায়ক, $(a^2)^2 - 4.1.a^4 = -3a^4 < 0$

$\therefore$ মূলগুলি জটিল।

৭৯. $2x^2 - 7x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 - 4x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় β, γ হলে, $(\gamma + \alpha) : (\gamma - \alpha) =$ কত? (কঠিন)

(ক) 6 : 5 (খ) 5 : 6

(গ) 11 : 1 (ঘ) 1 : 6 — **গ**

ব্যাখ্যা: সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল β.

$\therefore 2\beta^2 - 7\beta + 5 = 0$ এবং $\beta^2 - 4\beta + 3 = 0$

সমাধান করে, $\beta = 1$

$2x^2 - 7x + 5 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{7}{2}$ বা, $\alpha = \frac{5}{2}$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ এর মূলদ্বয় β, γ

$\therefore \beta + \gamma = 4$ বা, $\gamma = 3$

$\therefore (\gamma + \alpha) : (\gamma - \alpha) = \left(3 + \frac{5}{2}\right) : \left(3 - \frac{5}{2}\right)$

$= \frac{11}{2} : \frac{1}{2} = 11 : 1$

৮০. বহুপদী সমীকরণের সকল মূলের গুণফল — (মধ্যম)

(ক) $\frac{p_1}{p_0}$ (খ) $(-1)^n \frac{p_n}{p_0}$

(গ) $(-1)^n \frac{p_1}{p_0}$ (ঘ) $\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^n$ — **খ**

৮১. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত? (মধ্যম)

(ক) $-\frac{2}{3}$ (খ) $\frac{2}{9}$

(গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{-2}{9}$ — **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = \frac{2}{3}$, $\alpha\beta = \frac{1}{3}$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2.\frac{1}{3} = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}$

৮২. $12x^2 + mx + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 2 : 3 হলে m এর মান কোনটি? (কঠিন)

(ক) $\pm 6\sqrt{10}$ (খ) $\pm 5\sqrt{10}$

(গ) $\pm 3\sqrt{10}$ (ঘ) $\pm 2\sqrt{10}$ — **খ**

৮৩. $5x^2 - 7x - k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল 1 হলে k-এর মান কত? (সহজ)

ⓚ -5 ⓚh $-\frac{1}{5}$

ⓖ $\frac{1}{5}$ ⓖh 5 — **ক**

৮৪. $x^2 + ax + 3 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 3 এবং $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির তিনগুণ হলে a এবং b এর মান কোন দুইটি? (কঠিন)

ⓚ $a = -4, b = -3$ ⓚh $a = -4, b = 3$

ⓖ $a = 4, b = -3$ ⓖh $a = 4, b = 3$ — **খ**

ব্যাখ্যা: $x^2 + ax + 3 = 0$ এর একটি মূল 3

$\therefore (3)^2 + a.3 + 3 = 0$

বা, $9 + 3a + 3 = 0$

বা, $3a = -12$

$\therefore a = -4$

এবং $x^2 + ax + b = 0$ বা, $x^2 - 4x + b = 0$

ধরি, $x^2 - 4x + b = 0$ এর মূলদ্বয় α ও 3α

$\alpha + 3\alpha = 4$ এবং $\alpha \times 3\alpha = b$

বা, $4\alpha = 4$ বা, $3\alpha^2 = b$

$\therefore \alpha = 1$ বা, $3.1^2 = b$

$\therefore b = 3$

৮৫. $2x^2 - 7x + b = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির গুণফল -3 হলে, b এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ -6 ⓚh $-\frac{7}{2}$

ⓖ $\frac{7}{2}$ ⓖh 6 — **ক**

৮৬. $x^2 + bx + 3 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অন্যটির তিনগুণ হলে, b এর মান নিম্নের কোনটি? (কঠিন)

ⓚ ±4 ⓚh ±3

ⓖ ±1 ⓖh ±2 — **ক**

ব্যাখ্যা: ধরি মূলদ্বয় p ও 3p

$p + 3p = -b$ এবং $p \times 3p = 3$

$4p = -b$ বা, $p^2 = 1$

$4(\pm1) = -b$ $\therefore p = \pm1$

$b = \pm 4$

৮৭. $x^2 - 4x + k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে k এর মান কোনটি? (সহজ)

ⓚ -4 ⓚh -1

ⓖ 1 ⓖh 4 — **ঘ**

ব্যাখ্যা: $(-4)^2 - 4.1.k = 0$ বা, $16 - 4k = 0$ বা, $k = 4$

৮৮. $x^2 + (2k + 4)x + (8k + 1) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি সমান হলে k এর মান কত? (সহজ)

ⓚ $-3, -1$ ⓚh $3, 1$

ⓖ $0, 3$ ⓖh $3, -1$ — **খ**

৮৯. $4x^2 + 3x + 7 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান কত? (সহজ)

ⓚ $-\frac{7}{3}$ ⓚh $-\frac{3}{7}$

ⓖ $\frac{3}{7}$ ⓖh $\frac{7}{3}$ — **খ**

৯০. $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির ত্রিঘাতের যোগফল নিচের কোনটি? (সহজ)

ⓚ $p^3 + 3pq$ ⓚh $p^3 - 3pq$

ⓖ $3pq$ ⓖh $3pq - p^3$ — **খ**

৯১. $x^2 + px + 12 = 0$ এর একটি মূল 4, $x^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হলে q এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 3 ⓚh 4

ⓖ 12 ⓖh $\frac{49}{4}$ — **ঘ**

৯২. $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান এবং $x^2 + ax + 8 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল 4 হলে b এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 4 ⓚh 8

ⓖ 9 ⓖh 12 — **গ**

ব্যাখ্যা: $x^2 + ax + b = 0$ এর মূলদ্বয় সমান

$\therefore a^2 - 4b = 0$

$x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল 4

$\therefore \alpha + 4 = -a$

এবং $\alpha.4 = 8$

$\Rightarrow \alpha = 2 \quad \therefore a = -6$

$\therefore (-6)^2 - 4b = 0$ বা, $b = 9$

৯৩. $x^2 + 17x + q = 0$ এর মূল দুইটি -2 ও -15 হলে $x^2 + 13x + q = 0$ এর মূল দুইটি কী কী? (মধ্যম)

ⓚ $-3, -12$ ⓚh $-2, -10$

ⓖ $3, 10$ ⓖh $-3, -10$ — **ঘ**

৯৪. k-এর কোন মানের জন্য $(k + 1)x^2 + 4(k - 2)x + 2k = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হবে? (মধ্যম)

ⓚ 2 ⓚh 3

ⓖ 4 ⓖh 8 — **খ**

৯৫. k-এর মান কত হলে $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + (2k + 3)$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? (মধ্যম)

ⓚ $3, -2$ ⓚh $2, 4$

ⓖ $-3, -2$ ⓖh $3, 2$ — **ক**

৯৬. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হলে, c এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ 0 ⓚh 1

ⓖ 2 ⓖh 6 — **ঘ**

৯৭. $(k + 1)x^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অমূলদ হলে k এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $k > 2$ খ $k > -2$

গ $k < -2$ ঘ $k < 2$ **খ**

৯৮. কোন শর্তে $\left(k - \frac{3}{4}\right)x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে? (মধ্যম)

ক $1 < k < 3$

খ $-3 < k < -1$

গ $k > 1$ অথবা $k < -3$

ঘ $k > -3$ অথবা $x < 1$ **ক**

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় জটিল হলে $k^2 - 4\left(k - \frac{3}{4}\right).1 < 0$

$\Rightarrow k^2 - 4k + 3 < 0 \Rightarrow (k - 1)(k - 3) < 0$

$\therefore 1 < k < 3$

৯৯. $3x^2 + 7x - 2 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির যোগফল ও গুণফলের সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ক $\frac{-5}{3}$ খ -3

গ $\frac{4}{3}$ ঘ 5 **খ**

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয়ের যোগফল ও গুণফলের সমষ্টি

$= -\frac{7}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-9}{3} = -3$

১০০. $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $-1 + \sqrt{-1}$ হলে অপর মূল — (সহজ)

ক $-i$ খ $-1 + i$

গ $-1 + \sqrt{-1}$ ঘ $-1 - i$ **ঘ**

১০১. $x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় — (সহজ)

ক বাস্তব, অসমান খ জটিল, সমান

গ বাস্তবই, সমান ঘ জটিল, অসমান **ঘ**

ব্যাখ্যা: পৃথায়ক $= 9 - 20 = -11 < 0$, ∴ মূলদ্বয় জটিল ও অসমান।

১০২. $(a + b)x^2 - (b + c)x + (c + a)$ সমীকরণের দুইটি মূল $\alpha + \beta - \gamma$ ও $\beta + \gamma - \alpha$ হলে β এর মান কত? (মধ্যম)

ক $-\frac{a + b}{b + c}$ খ $-\frac{b + c}{2(a + b)}$

গ $\frac{a + b}{b + c}$ ঘ $\frac{1}{2}\frac{b + c}{(a + b)}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয়ের যোগফল,

$\alpha + \beta - \gamma + \beta + \gamma - \alpha = \frac{b + c}{a + b}$

$\Rightarrow 2\beta = \frac{b + c}{a + b}$

$\therefore \beta = \frac{b + c}{2(a + b)}$

১০৩. $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান হলে কোন সম্পর্কটি সঠিক? (কঠিন)

ক $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = 0$ খ $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$

গ $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{2}{b} = 0$ ঘ $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ **ঘ**

১০৪. $(x + \alpha)(x - \beta) + (x - \beta)(x + \gamma) + (x + \gamma)(x + \alpha) = 0$ সমীকরণের মূলগুলির যোগফল শূন্য হবে যদি— (কঠিন)

ক $\alpha + \beta + \gamma = 0$ খ $\alpha = \beta + \gamma$

গ $\beta = \alpha + \gamma$ ঘ $\gamma = \alpha + \beta$ **গ**

১০৫. $(x - 7)(k + x) = x^2 - 49$ হলে k এর মান কত? (কঠিন)

ক 7 খ -7

গ 14 ঘ 0 **ক**

ব্যাখ্যা: $(x - 7)(x + k) = (x + 7)(x - 7)$

$x + k = x + 7$

$\therefore k = 7$

১০৬. দুইটি সংখ্যার যোগফল 6 ও গুণফল 34; সংখ্যা দুইটি কত? (কঠিন)

ক $3 + 5i, 3 - 5i$ খ $4 + 7i, 2 - 5i$

গ $17 - 2i, 2 - 3i$ ঘ $17 + 3i, 2 - 3i$ **ক**

ব্যাখ্যা: মনে করি, সংখ্যাটি x এবং y

$\therefore x + y = 6$ .... (1)

এবং $xy = 34$ .... (2)

$\therefore x - y = \sqrt{(x + y)^2 - 4xy}$

$= \sqrt{36 - 4 \times 34} = \sqrt{36 - 136} = \sqrt{-100}$

$x - y = 10i$ .... (3)

$(2) + (3) \Rightarrow 2x = 6 + 10i$

$\therefore x = 3 + 5i$

এবং $y = 6 - 3 - 5i = 3 - 5i$

∴ সংখ্যা দুটি $3 + 5i$ এবং $3 - 5i$

১০৭. $x^2 - 8x - 9 = 0$ সমীকরণের মূল $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ $(\alpha, \beta > 0)$ হলে α ও β এর মান কত? (কঠিন)

ক $4, 6$ খ $4, 5$

গ $3, 4$ ঘ $3, 5$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \alpha - \beta = 8$

বা, $2\alpha = 8 \therefore \alpha = 4$

এবং $\alpha^2 - \beta^2 = -9$

বা, $16 - \beta^2 = -9 \Rightarrow \beta^2 = 25 \therefore \beta = 5$

১০৮. $2x^2 + x + 5 = 0$ সমীকরণের মূল α, β এবং $2x^2 - 3x + 2b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 1, \beta + 1$ হলে b এর মান কত? (কঠিন)

ক -3 খ -2

গ 2 ঘ 3 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}, \alpha\beta = \frac{5}{2}$

২য় সমীকরণে, $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \frac{2b}{2}$

$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{2b}{2} = b$

$\Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 1 = b$

$\Rightarrow b = 3$

১০৯. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে কোন সম্পর্কটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $p^2 - 4q = 1$ খ $p^2 - 4q + 1 = 0$

গ $p^2 + 4q = 1$ ঘ $p^2 + 4q + 1 = 0$ **ক**

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$

শর্তমতে, $\alpha - \beta = \pm 1$ বা, $(\alpha - \beta)^2 = 1$

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$ বা, $p^2 - 4q = 1$

১১০. $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় ক্রমিক সংখ্যা হলে $p^2 - 4q$ এর মান কত? (কঠিন)

ক -1 খ 0

গ 1 ঘ 2 **গ**

১১১. k এর মান কত হলে $3x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির তিনগুণ হবে। (কঠিন)

ক 0 খ 4

গ 8 ঘ ± 8 **ঘ**

ব্যাখ্যা: মূলদ্বয় $\alpha, 3\alpha$

$\alpha + 3\alpha = \frac{k}{3}$ $\therefore \alpha = \frac{k}{12}$

এবং $3\alpha^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\cdot\frac{k^2}{144} = \frac{4}{3}$

বা, $k^2 = 64$ $\therefore k = \pm 8$

১১২. $x^2 - px + \frac{1}{4}(p^2 - q^2) = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha - \beta$ এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক q খ $-q$

গ $\pm q$ ঘ কোনোটিই নয় **গ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = p, \alpha\beta = \frac{1}{4}(p^2 - q^2)$

$\alpha - \beta = \pm\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$= \pm\sqrt{p^2 - 4.\frac{1}{4}(p^2 - q^2)}$

$= \pm\sqrt{p^2 - p^2 + q^2} = \pm q.$

১১৩. $px^2 - qx - r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, মূলদ্বয়ের সমষ্টি— (সহজ)

ক $p + q$ খ $p - q$

গ q/p ঘ $-q/p$ **গ**

১১৪. $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{15}{2}$ খ $\frac{5}{3}$

গ $\frac{3}{5}$ ঘ $\frac{2}{15}$ **ক**

১১৫. $x^2 + 4x - 12 = 0$ সমীকরণের α এবং β হলে, $\Sigma\alpha$ এর মান কোনটি? (সহজ)

ক 4 খ -4

গ 12 ঘ -12 **খ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = -4$

$\therefore \Sigma\alpha = \alpha + \beta = -4$

১১৬. $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha^{-3} + \beta^{-3}$ এর মান— (কঠিন)

ক $p^3 - 3pq$ খ $\frac{p^3 - 3pq}{q^3}$

গ $\frac{q^3 - 3pq}{q^3}$ ঘ $\frac{p^3 + 3pq}{q^3}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $x^2 - px + q = 0$

$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q$

$\alpha^{-3} + \beta^{-3} = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$

$= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3}$

$= \frac{p^3 - 3pq}{q^3}$

১১৭. $x^2 + 4x + 4 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha^3 + \beta^3$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক 24 খ 32

গ -16 ঘ 4 **গ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = -4$ এবং $\alpha\beta = 4$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-4)^3 - 3.4(-4)$

$= -64 + 48 = -16$

১১৮. $4x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha\beta =$ কত? (মধ্যম)

ক $-4/5$ খ $4/5$

গ $1/4$ ঘ $-1/4$ **গ**

১১৯. $27y^2 + 6y - (p + 2) = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে, (কঠিন)

ক $p = 6$ খ $p = -1$

গ $p = 2$ ঘ ক ও খ উভয়ই **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \alpha^2 = \frac{-6}{27} = -\frac{2}{9}$

$\Rightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow (3\alpha + 1)(3\alpha + 2) = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{1}{3}$, বা, $\alpha = -\frac{2}{3}$

এবং $\alpha.\alpha^2 = \frac{-(p+2)}{27}$ বা, $\alpha^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

$\alpha = -\frac{1}{3}$ হলে, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

$\Rightarrow \frac{-1}{27} = \frac{-(p+2)}{27}$

$\Rightarrow p + 2 = 1$

$\therefore p = -1$

$\alpha = -\frac{2}{3}$ হলে, $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

$\Rightarrow \frac{-8}{27} = \frac{-(p+2)}{27}$

$\Rightarrow p + 2 = 8$

$\therefore p = 6$

১২০. $x^2 + 4x + r = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি মূলই –2 হলে r এর মান কত? (মধ্যম)

ক – 2 খ 0

গ 2 ঘ 4 **ঘ**

১২১. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটি দ্বিঘাত হওয়ার প্রয়োজনীয় শর্ত —

i. $a \neq 0$

ii. $b > 0$

iii. $c \neq 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i খ ii

গ iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১২২. $f(x) = x^2 - 2x + 5$ হলে —

i. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল 2

ii. $f(x) = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক –16

iii. $f(x)$ এর ন্যূনতম মান 4

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১২৩. $x^2 - 2x - 1 = 0$ এর মূলদ্বয়—

i. বাস্তব

ii. মূলদ

iii. অসমান

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

ব্যাখ্যা: $x^2 - 2x - 1 = 0$

পৃথায়ক $= (-2)^2 - 4.1(-1)$

$= 4 + 4$

$= 8 > 0$

$\therefore$ মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।

১২৪. $x^2 - 2x - 2 = 0$ সমীকরণের —

i. মূলদ্বয়ের যোগফল –2

ii. মূলদ্বয়ের গুণফল –2

iii. মূলদ্বয় মূলদ

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক ii খ i ও ii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১২৫. দ্বিঘাত সমীকরণের পৃথায়ক D হলে —

i. $D < 0$ হলে মূলদ্বয় জটিল ও সমান

ii. $D = 0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান

iii. $D \geq 0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

১২৬. $x^2 - 3x + 2 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 1 হলে —

i. অপর মূলটি 2

ii. মূলদ্বয়ের গুণফল 5

iii. পৃথায়ক = 1

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

১২৭. $y = 4x^2 - 4x + 1$ বক্ররেখা —

i. X-অক্ষকে স্পর্শ করে

ii. Y-অক্ষকে ছেদ করে

iii. Y-অক্ষকে (0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১২৮. $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করলে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের —

i. মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান

ii. মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা

iii. পৃথায়ক ধনাত্মক

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

১২৯. $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে কোনো বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ না করলে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের ——

i. মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান

ii. মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা

iii. পৃথায়ক ঋণাত্মক

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

১৩০. $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের ——

i. মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান

ii. মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা

iii. পৃথায়ক শূন্য

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

১৩১. $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে k এর মান ——

i. 2

ii. 10

iii. –2

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১৩২. a, b মূলদ হলে $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় ——

i. অমূলদ

ii. মূলদ

iii. বাস্তব

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

ব্যাখ্যা:

পৃথায়ক $= \{2(a^2 + b^2)\}^2 - 4(a^2 - b^2)^2$

$= 4\{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2\} = 4 \times 4a^2b^2$

$= (4ab)^2$ পূর্ণবর্গ

∴ মূলদ্বয় মূলদ ও বাস্তব।

১৩৩. a, b, c মূলদ এবং $a + b + c = 0$ হলে, $(b + c - a)x^2 + (c + a - b)x + (a + b - c) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হবে ——

i. বাস্তব

ii. অমূলদ

iii. মূলদ

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

ব্যাখ্যা:

পৃথায়ক $= (c + a - b)^2 - 4(b + c - a)(a + b - c)$

$= (-2b)^2 - 4(-2a)(-2c) = 4b^2 - 16ac$

$= 4(b^2 - 4ac) = 4\{(-a - c)^2 - 4ac\}$

$= 4(a^2 - 2ac + c^2)$

$= \{2(a - c)\}^2$, পূর্ণসংখ্যা, অর্থাৎ মূলদ ও বাস্তব।

১৩৪. $x^2 - 4x + a = 0$ এর মূলদ্বয়—

i. সমান হবে যদি $a = 4$ হয়

ii. জটিল হবে যদি $a > 4$ হয়

iii. বাস্তব হবে যদি $a \leq 4$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১৩৫. $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ যার $b^2 - 4ac > 0$ সমীকরণটির বক্ররেখাটি ছেদ করে ——

i. x-অক্ষকে দুই বিন্দুতে

ii. x-অক্ষকে এক বিন্দুতে

iii. y-অক্ষকে এক বিন্দুতে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

১৩৬. $(k^2 - 3)x^2 + 3kx + (3k + 1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় একটি অপরটির বিপরীত হলে k এর মান ——

i. –1

ii. 1

iii. 4

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

১৩৭. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ও $x^2 + x - 12 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের ——

i. প্রতিটির মূলদ্বয় মূলদ

ii. সাধারণ মূল 3

iii. প্রথমটির মূলদ্বয়ের সমষ্টি –5

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১৩৮. $x^2 + i^3 = 0$ সমীকরণের জন্য——

i. পৃথায়ক 4i ii. সমাধান $\pm\sqrt{i}$

iii. মূলগুলি বাস্তব

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i খ ii

গ i ও iii ঘ i ও ii **ঘ**

১৩৯. $x^2 - px + q = 0$ এবং $x^2 - qx + p = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল আছে, যখন $p \neq q$। সুতরাং —

i. $p + q + 1 = 0$
ii. সাধারণ মূলটি -1
iii. অপর মূল দুইটি যথাক্রমে $-q$ ও $-p$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১৪০. $px^2 - x + 1 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল α, β হলে—

i. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-2p}{p}$
ii. $\alpha\beta = \frac{1}{p}$
iii. $\alpha + \beta = \frac{1}{p}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১৪১. $x^2 - \sqrt{p}x + \frac{1}{2}(p - q) = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল α, β হলে —

i. $\alpha\beta = \frac{1}{2}(p - q)$
ii. $\alpha^2 + \beta^2 = q$
iii. $\alpha + \beta = -\sqrt{p}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১৪২. $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের দুটি মূল a, b হলে —

i. $a + b = -p$
ii. $ab = pq$
iii. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{q}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$ বা, $\frac{p-x+x}{x(p-x)} = \frac{1}{q}$
বা, $pq = -x^2 + xp$ বা, $x^2 - px + pq = 0$
$\therefore a + b = p, ab = pq$
$\therefore \frac{a+b}{ab} = \frac{p}{pq}$ বা, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{q}$

১৪৩. $x\left(x + \frac{3}{x}\right) = 0$ সমীকরণটি —

i. দ্বিঘাত
ii. ত্রিঘাত
iii. জটিল মূল বিশিষ্ট

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

ব্যাখ্যা: $x\left(x + \frac{3}{x}\right) = 0$ বা, $x^2 + 3 = 0$
বা, $x^2 = -3 \therefore x = \pm\sqrt{3}i$

$px^2 + qx + r = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে (১৪৪-১৪৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

১৪৪. সমীকরণটির একটি মূল শূন্য হলে নিচের কোনটি সত্য? (মধ্যম)

ক $x = 0$ খ $p = 0$
গ $q = 0$ ঘ $r = 0$ **ঘ**

১৪৫. $p \neq 0$ হলে সমীকরণটির মূল দুইটি সমান হওয়ার শর্ত কী? (মধ্যম)

ক $q^2 - 4pr < 0$ খ $q^2 - 4pr = 0$
গ $q^2 - 4pr \leq 0$ ঘ $q^2 - 4pr > 0$ **খ**

১৪৬. সমীকরণটির মূল দুইটির গুণফল 1 হবে নিচের কোনটি হলে? (মধ্যম)

ক $p = r$ খ $p = 0$
গ $p = q$ ঘ $q = r$ **ক**

নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং (১৪৭-১৪৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণটির ক্ষেত্রে

১৪৭. $a = 0$ এবং $b \neq 0$ হলে উক্ত সমীকরণের পৃথায়ক হবে — (মধ্যম)

ক $b^2 - 4cd$ খ $c^2 - 4bd$
গ $b^2 - 4ac$ ঘ $d^2 - 4bc$ **খ**

ব্যাখ্যা: $a = 0$ হলে প্রাপ্ত দ্বিঘাত সমীকরণটি হলো $bx^2 + cx + d = 0$ যার পৃথায়ক $= c^2 - 4bd$.

১৪৮. $a \neq 0$ এবং $b = 0$ হলে $\Sigma\alpha^2 =$ কত? (কঠিন)

ক $-\frac{2c}{a}$ খ $\frac{2c}{a}$
গ $-\frac{b}{a}$ ঘ $\frac{d}{a}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $b = 0$ হলে $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ থেকে পাই, $ax^3 + 0.x^2 + cx + d = 0$
$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0$ এবং $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a}$
এখন $\Sigma\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$
$= -\frac{2c}{a}$

১৪৯. $c = d = 0$ হলে উক্ত সমীকরণের সমাধান— (মধ্যম)

ক $0, 0, \frac{b}{a}$ খ $0, 1, \frac{b}{a}$
গ $0, 0, -\frac{b}{a}$ ঘ $1, 1, 0$ **গ**

ব্যাখ্যা: $c = d = 0$ হলে
$ax^3 + bx^2 = 0$
$x^2(ax + b) = 0$
$\therefore x = 0, 0$ অথবা, $ax = -b$
$\therefore x = -\frac{b}{a}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (১৫০ ও ১৫১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$3x^2 - 4x - c = 0$

১৫০. সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল 10 হলে c এর মান কোনটি? (সহজ)

ক) – 30 খ) –10
গ) 10 ঘ) 30 **ক**

১৫১. সমীকরণটির একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে সমীকরণটির মূল কোনগুলি? (কঠিন)

ক) $\frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ খ) $-\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}$
গ) –4, –8 ঘ) 4, 8 **ক**

ব্যাখ্যা: ধরি, মূলদ্বয় α ও 2α

$$\alpha + 2\alpha = \frac{-(-4)}{3}$$
$$3\alpha = \frac{4}{3}$$
$$\alpha = \frac{4}{9}$$
$$\therefore 2\alpha = \frac{8}{9}$$

নিচের প্রশ্নের আলোকে (১৫২ ও ১৫৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$(3k + 1)x^2 + (11 + k)x + 9 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

১৫২. একটি মূল 1 হলে k এর মান কত? (মধ্যম)

ক) $\frac{-21}{4}$ খ) –21
গ) $\frac{21}{4}$ ঘ) 21 **ক**

১৫৩. মূলদ্বয় সমান হলে k এর একটি মান কত? (মধ্যম)

ক) –86 খ) –85
গ) 85 ঘ) 86 **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১৫৪ ও ১৫৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$x^2 - x + 1 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল α, β.

১৫৪. $\alpha^3 + \beta^3$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক) –2 খ) –1
গ) 1 ঘ) 2 **ক**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$
$$= 1 - 3.1$$
$$= -2$$

১৫৫. $\frac{\alpha}{\beta^2} + \alpha + \frac{\alpha}{\alpha^2} + \beta$ এর মান কত? (কঠিন)

ক) $-\alpha - 1$ খ) $-\alpha + 1$
গ) $\alpha - 1$ ঘ) $\alpha + 1$ **খ**

α, β, হলো $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল।

উপরের তথ্যের আলোকে (১৫৬-১৫৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৫৬. প্রদত্ত তথ্যে $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক) $\frac{b^2 - 2ac}{ac}$ খ) $\frac{c^2 - 2ab}{ab}$
গ) $\frac{a^2 - 2ac}{bc}$ ঘ) $\frac{a^2 - bc}{ab}$ **ক**

ব্যাখ্যা:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a}{c} = \frac{b^2 - 2ac}{ac}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2.\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

১৫৭. প্রদত্ত তথ্যে $\frac{1}{\alpha + \beta}$ ও $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক) $bcx^2 + (b^2 + ca)x + ab = 0$
খ) $abx^2 + (a^2 + bc)x + bc = 0$
গ) $bcx^2 + (c^2 + ab)x + ca = 0$
ঘ) $cax^2 + (a^2 + bc)x + ab = 0$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{\alpha + \beta} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$

$$= \frac{1}{\frac{-b}{a}} + \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{-(ca + b^2)}{bc}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha(\alpha + \beta)} + \frac{1}{\beta(\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{(\beta + \alpha)}{\alpha\beta(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$$

$$\therefore x^2 + \frac{ca + b^2}{bc}x + \frac{a}{c} = 0$$

বা, $bcx^2 + (b^2 + ca)x + ab = 0$

১৫৮. প্রদত্ত তথ্যে $\alpha = 0$ হলে নিচের কোনটি সত্য? (মধ্যম)

ক) a = 0 খ) c = 0
গ) b = 0 ঘ) ab = 0 **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১৫৯ ও ১৬০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$3x^2 - 10x + k = 0$ সমীকরণের দুটি মূল $a, \frac{1}{a}$.

১৫৯. k এর মান কত? (সহজ)

ক) –1 খ) 1
গ) 3 ঘ) 10 **গ**

১৬০. a এর একটি মান কত? (মধ্যম)
ⓚ -10 ⓛ -3
ⓖ $\frac{1}{3}$ ⓘ 1 **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১৬১ ও ১৬২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$x^2 - 6x + 7 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার দুটি মূল α, β.

১৬১. $\alpha + 1$ ও $\beta + 1$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণের মূলদ্বয় কেমন হবে? (মধ্যম)
ⓚ সমান ⓛ অবাস্তব
ⓖ অমূলদ ⓘ মূলদ **গ**

১৬২. সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত? (সহজ)
ⓚ 8 ⓛ 7
ⓖ 6 ⓘ 1 **ক**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (১৬৩ ও ১৬৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0$

১৬৩. সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে, k এর মান কত? (মধ্যম)
ⓚ 5, 2 ⓛ $-5, -2$
ⓖ $5, -2$ ⓘ $-5, 2$ **ক**

১৬৪. $k = 0$ হলে, সমীকরণটির মূলদ্বয় কেমন হবে? (সহজ)
ⓚ বাস্তব ও সমান ⓛ বাস্তব ও মূলদ
ⓖ বাস্তব ও অসমান ⓘ অসমান ও জটিল **গ**

★ দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন, দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান, ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের সাথে সহগের সম্পর্ক

১৬৫. 2 এবং 3 মূলদ্বয় বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? (সহজ)
ⓚ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ⓛ $x^2 - 5x + 5 = 0$
ⓖ $x^2 - 6x + 5 = 0$ ⓘ $x^2 + 5x + 6 = 0$ **ক**

১৬৬. $2x^2 - 3x - 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $2\alpha, 2\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে: (সহজ)
ⓚ $x^2 + 3x - 2 = 0$ ⓛ $x^2 + 3x - 8 = 0$
ⓖ $x^2 - 3x - 8 = 0$ ⓘ $x^2 - 6x + 4 = 0$ **গ**

১৬৭. $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)
ⓚ $x^2 + x + 7 = 0$ ⓛ $x^2 - x + 7 = 0$
ⓖ $x^2 + x - 7 = 0$ ⓘ $x^2 - x - 7 = 0$ **ঘ**

১৬৮. যে শর্তে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে — (মধ্যম)
ⓚ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
ⓛ $a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2$
ⓖ $a_1a_2 - b_1b_2 = c_1c_2$
ⓘ $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$ **ঘ**

১৬৯. $2 + i\sqrt{3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে : (মধ্যম)
ⓚ $x^2 + 4x - 7 = 0$ ⓛ $x^2 - 4x + 7 = 0$
ⓖ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ⓘ $x^2 + 3x - 2 = 0$ **খ**

১৭০. $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? (কঠিন)
ⓚ $-1, 0$ ⓛ $\frac{1}{3}, 1$
ⓖ $0, 1$ ⓘ $-1, 1$ **ক**

ব্যাখ্যা: $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$
বা, $3(3^{2x} - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$
বা, $3(a^2 - 4.a.\frac{1}{3}) + 1 = 0$ [$3^x = a$ ধরে]
বা, $3a^2 - 4a + 1 = 0$
বা, $3a^2 - 3a - a + 1 = 0$
বা, $(3a - 1)(a - 1) = 0$
$\therefore a = \frac{1}{3}, a = 1$
$\therefore 3^x = 3^{-1}$ | $3^x = 3^0$
বা, $x = -1$ | বা, $x = 0$

১৭১. 1, −1, −2 মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ নিম্নের কোনটি? (কঠিন)
ⓚ $x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$
ⓛ $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$
ⓖ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
ⓘ $x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ **গ**

ব্যাখ্যা: 1, −1 ও −2 মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ,
$(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 0$
বা, $(x^2 - 1)(x + 2) = 0$
বা, $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

১৭২. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? (মধ্যম)
ⓚ 0, 1, 2 ⓛ 0, 1, 3
ⓖ 0, 2, 3 ⓘ 0, 0, 1 **ক**

১৭৩. $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ সমীকরণের দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে সমীকরণটির মূলগুলি কী হবে? (সহজ)
ⓚ $5, -3, 4$ ⓛ $6, -4, 4$
ⓖ $5, -4, 4$ ⓘ $7, -4, 4$ **গ**

১৭৪. $27x^3 - 63x^2 + 42x - 8 = 0$ সমীকরণের মূল কোনগুলি? (কঠিন)

ক $\frac{1}{27}, \frac{-2}{3}, -12$ খ $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, 2$

গ $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 2$ ঘ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ **ঘ**

১৭৫. মূলদ্বয়ের যোগফল 9 ও গুণফল –36 বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক $x^2 + 9x + 36 = 0$ খ $x^2 - 9x + 36 = 0$

গ $x^2 - 9x - 36 = 0$ ঘ $x^2 + 9x - 36 = 0$ **গ**

১৭৬. $-\alpha$ এবং $-\beta$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে– (মধ্যম)

ক $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

খ $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

গ $x^2 + (\alpha + \beta)x - \alpha\beta = 0$

ঘ $x^2 - (\alpha + \beta)x - \alpha\beta = 0$ **খ**

১৭৭. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α, β হলে, α^2 ও β^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $2x^2 - x + 1 = 0$ খ $x^2 - x + 1 = 0$

গ $x^2 + x + 1 = 0$ ঘ $x^2 - 2x - 1 = 0$ **গ**

১৭৮. $\alpha - \beta = 8$, $\alpha^3 - \beta^3 = 152$ হলে, α ও β মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক $x^2 - 8x - 2 = 0$

খ $x^2 - 2x - 15 = 0$

গ $x^2 + 15x + 12 = 0$

ঘ $x^2 + 12x + 8 = 0$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\alpha^3 - \beta^3 = 152$

বা, $(\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = 152$

বা, $8^3 + 3.\alpha\beta.8 = 152$

বা, $24\alpha\beta = 152 - 512 = -360$

বা, $\alpha\beta = -15$

এখন, $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta$

$= 8^2 - 60$

$= 4$

$\therefore \alpha + \beta = 2$

এখন, $\alpha + \beta = 2$

$\alpha - \beta = 8$

$\therefore \alpha = 5, \beta = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (5 - 3)x + 5(-3) = 0$

বা, $x^2 - 2x - 15 = 0$

১৭৯. $x^2 - 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে α^2 এবং β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ —— (কঠিন)

ক $x^2 - x + 25 = 0$

খ $x^2 + x - 25 = 0$

গ $x^2 + x + 25 = 0$

ঘ $x^2 + 11x + 25 = 0$ **গ**

১৮০. $x^2 - 7x + 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha + \beta$ ও $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $x^2 - 19x + 84 = 0$

খ $x^2 + 14x - 144 = 0$

গ $x^2 - 14x + 144 = 0$

ঘ $x^2 + 19x - 84 = 0$ **ক**

১৮১. $x^2 - 2x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে, $\alpha + 1$ এবং $\beta + 1$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $x^2 + 4x - 6 = 0$ খ $x^2 - 4x - 6 = 0$

গ $x^2 - 4x + 6 = 0$ ঘ $x^2 + 4x + 6 = 0$ **গ**

১৮২. দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূল 1 এবং অপর মূলদ্বয় 2 এবং 3 হলে, দ্বিঘাত সমীকরণ নিম্নের কোন দুইটি? (কঠিন)

ক $x^2 + 3x - 2 = 0$ এবং $x^2 + 2x - 3 = 0$

খ $x^2 - 3x + 2 = 0$ এবং $x^2 - 4x - 3 = 0$

গ $x^2 - 3x - 2 = 0$ এবং $x^2 + 2x - 3 = 0$

ঘ $x^2 - 3x + 2 = 0$ এবং $x^2 - 4x + 3 = 0$ **ঘ**

১৮৩. $1 - i$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $x^2 - 2x + 2 = 0$ খ $x^2 - 2x - 2 = 0$

গ $x^2 + 2x + 2 = 0$ ঘ $x^2 + 2x - 2 = 0$ **ক**

ব্যাখ্যা: $x = 1 - i$ বা, $x - 1 = -i$

বা, $(x - 1)^2 = -1$ বা, $x^2 - 2x + 1 - i^2 = 0$

বা, $x^2 - 2x + 1 + 1 = 0$ বা, $x^2 - 2x + 2 = 0$

১৮৪. $4x^3 - 7x^2 + 2x - 8 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয়ের সমষ্টি কোনটি? (সহজ)

ক $-\frac{4}{7}$ খ $-\frac{7}{4}$

গ $\frac{7}{4}$ ঘ $\frac{4}{7}$ **গ**

১৮৫. $2x^2 + 8x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের ঘনের সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ক -58 খ 58

গ 60 ঘ 80 **ক**

ব্যাখ্যা: $2x^2 + 8x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha + \beta = -\frac{8}{2} = -4$ .... (i)

এবং $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ .... (ii)

$\therefore (\alpha^3 + \beta^3) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-4)^3 - 3.\frac{1}{2}(-4) = -64 + 6 = -58$

১৮৬. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $x^2 - 5x + 6 = 0$ খ $x^2 + 5x + 6 = 0$

গ $x^2 - 6x + 5 = 0$ ঘ $x^2 + 6x + 5 = 0$ **ক**

১৮৭. $x^2 + x - 1 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল α, β হলে $a\alpha + a$ এবং $a\beta + a$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক $x^2 - ax - a^2 = 0$ খ $x^2 - ax + a^2 = 0$

গ $x^2 + ax - a^2 = 0$ ঘ $x^2 + ax + a^2 = 0$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -1$

সমীকরণ $x^2 - (a\alpha + a + a\beta + a)x + (a\alpha + a)(a\beta + a) = 0$

বা, $x^2 - \{a(\alpha + \beta) + 2a\}x + a^2\alpha\beta + a^2(\alpha + \beta) + a^2 = 0$

বা, $x^2 - \{a.(-1) + 2a\}x + a^2(-1) + a^2.(-1) + a^2 = 0$

$\therefore x^2 - ax - a^2 = 0$

১৮৮. $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$ এর মান কত? (কঠিন)

ক p খ q

গ $-p$ ঘ $-q$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ এবং $\alpha\beta\gamma = -q$

$\therefore (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

$= (-\gamma)(-\alpha)(-\beta)$

$= -\alpha\beta\gamma$

$= -(-q) = q$

১৮৯. $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)$ এর মান কত? (কঠিন)

ক $-8p$ খ $-8q$

গ $8p$ ঘ $8q$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ এবং $\alpha\beta\gamma = -q$

$\therefore (\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)$

$= (-2\gamma)(-2\alpha)(-2\beta)$

$= -8\alpha\beta\gamma = (-8)(-q) = 8q$

১৯০. $2x^3 - 2x^2 - 3x - 6 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ এর মান কত? (কঠিন)

ক $-\frac{3}{2}$ খ $-\frac{1}{2}$

গ $\frac{1}{2}$ ঘ 3 **খ**

ব্যাখ্যা: $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-3}{2}, \alpha\beta\gamma = -\left(\frac{-6}{2}\right) = 3$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{-3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}$$

১৯১. $x^4 + 5x^3 + 3x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে, $\Sigma\alpha\beta\gamma$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক 5 খ -3

গ 0 ঘ 9 **খ**

১৯২. $x^4 + 5x^3 + 3x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে, $\alpha\beta\gamma\delta$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক 5 খ 3

গ 0 ঘ 9 **ঘ**

১৯৩. $dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে মূল-সহগ সম্পর্কের ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক $\Sigma\alpha = \frac{c}{d}, \Sigma\alpha\beta = -\frac{b}{d}, \alpha\beta\gamma = \frac{a}{d}$

খ $\Sigma\alpha = -\frac{c}{d}, \Sigma\alpha\beta = \frac{b}{d}, \alpha\beta\gamma = \frac{a}{d}$

গ $\Sigma\alpha = -\frac{c}{d}, \Sigma\alpha\beta = \frac{b}{d}, \alpha\beta\gamma = -\frac{a}{d}$

ঘ $\Sigma\alpha = \frac{c}{d}, \Sigma\alpha\beta = \frac{b}{d}, \alpha\beta\gamma = \frac{a}{d}$ **গ**

১৯৪. $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল a, b, c হলে $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক 0 খ $-2p$

গ $-p$ ঘ $-q$ **খ**

ব্যাখ্যা: $a + b + c = 0, ab + bc + ca = p$

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 0 - 2p = -2p$

১৯৫. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $p^2 + 2q$ খ $p^2 - 2q$

গ $-p^2 + 2q$ ঘ $-p^2 - 2q$ **খ**

১৯৬. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

খ $x^3 + qx^2 + rx + p = 0$

গ $rx^3 + qx^2 + px - 1 = 0$

ঘ $rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{x^3} - \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} - r = 0$ বা, $1 - px + qx^2 - rx^3 = 0$

$\therefore rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

১৯৭. $x^3 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ এর মান কত? (কঠিন)

(ক) $-q$ (খ) r
(গ) 0 (ঘ) $q + r$ **গ**

ব্যাখ্যা: $x^3 + 0.x^2 + qx - r = 0$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0$

$\alpha + \beta = -\gamma, \beta + \gamma = -\alpha, \alpha + \gamma = -\beta$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$

$= \frac{\alpha^2}{-\alpha} + \frac{\beta^2}{-\beta} + \frac{\gamma^2}{-\gamma}$

$= -(\alpha + \beta + \gamma) = 0$

১৯৮. $x^3 - 1 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণের জটিল মূলদ্বয়ের গুণফল কত? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) 1
(গ) ω (ঘ) ω^2 **খ**

ব্যাখ্যা: এককের দুটি জটিল মূল ω ও ω^2

গুণফল $= \omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$

১৯৯. $3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 3 = 0$ সমীকরণের মূল চারটি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে —

i. $\Sigma\alpha = \frac{5}{3}$

ii. $\Sigma\alpha\beta = \frac{4}{3}$

iii. $\Sigma\alpha\beta\gamma\delta = -\frac{2}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

২০০. $xy - 2yz + 1 = 0$ এর জন্য—

i. $xy - 2yz + 1$ একটি বহুপদী

ii. সমীকরণের ঘাত 2

iii. $y = x$ এবং $z = 1$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় সমান

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) সবগুলি (খ) ii
(গ) i (ঘ) i এবং ii **ক**

২০১. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমনে থাকলে মূলগুলো হবে —

i. 1

ii. 2

iii. 3

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

২০২. $f(x) = x^3 + 4x^2 + x + k = 0$ সমীকরণের একটি উৎপাদক $(x - 1)$ হলে —

i. $k = -6$

ii. $f(0) = -6$

iii. অপর মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (২০৩-২০৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$x^2 + px + (p + 1) = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার মূলদ্বয় $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$।

২০৩. $a + b$ এর মান কত? (কঠিন)

(ক) $-\frac{1}{p+1}$ (খ) $-\frac{p}{p+1}$
(গ) $\frac{1}{p+1}$ (ঘ) $\frac{p}{p+1}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -p$ এবং $\frac{1}{ab} = p + 1$

$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = -p \quad \therefore ab = \frac{1}{p+1}$

$\therefore a + b = -p.\frac{1}{p+1} = \frac{-p}{p+1}$

২০৪. a, b মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

(ক) $(p + 1)x^2 - p - 1 = 0$

(খ) $(p + 1)x^2 - px + 1 = 0$

(গ) $(p + 1)x^2 + px - 1 = 0$

(ঘ) $(p + 1)x^2 + px + 1 = 0$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: সমীকরণ : $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{-p}{p+1}\right)x + \frac{1}{p+1} = 0$

বা, $(p + 1)x^2 + px + 1 = 0$

২০৫. $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}$ এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{-(2p + p^2)}{p+1}$ (খ) $\frac{2p + p^2}{p+1}$
(গ) $-\frac{2p + p^2}{(p+1)^2}$ (ঘ) $\frac{2p + p^2}{(p+1)^2}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{-p}{p+1} - p$

$= \frac{-p - p^2 - p}{p+1} = -\left(\frac{p^2 + 2p}{p+1}\right)$

নিচের তথ্যের আলোকে (২০৬ ও ২০৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$x^2 + px + q = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় $-\alpha, -\beta$।

২০৬. $\Sigma\alpha^3$ এর মান কত? (কঠিন)

ক $-p^3 + 3pq$ খ $-p^3 - 3pq$
গ $p^3 + 3pq$ ঘ $p^3 - 3pq$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta) = -p \therefore \alpha + \beta = p$

$(-\alpha)(-\beta) = q$ বা, $\alpha\beta = q$

$\Sigma\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
$= p^3 - 3qp$

২০৭. $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক $qx^2 + (pq + q)x + q^2 + 2q + 1 = 0$
খ $qx^2 - (pq + p)x + q^2 + 2q + 1 = 0$
গ $qx^2 + (pq - p)x + q^2 + 2q + 1 = 0$
ঘ $qx^2 - (pq - p)x + q^2 + 2q + 1 = 0$ **খ**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (২০৮ ও ২০৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$x^2 - 4x + 13 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β।

২০৮. α এবং β মান কোন দুইটি? (সহজ)

ক $2 - 3i, -2 + 3i$ খ $2 + 3i, -2 + 3i$
গ $2 - 3i, 2 + 3i$ ঘ $-2 - 3i, -2 + 3i$ **গ**

২০৯. $\alpha + 1$ এবং $\beta + 1$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $x^2 - 6x + 18 = 0$
খ $x^2 + 6x + 18 = 0$
গ $x^2 + 2x - 3 = 0$
ঘ $x^2 + 2x + 3 = 0$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (২১০ ও ২১১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও

$2x^3 + 2x^2 - 3 - \frac{6}{n} = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি মূল α, β, γ।

২১০. $(\alpha + \beta + \gamma)^2$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক -2 খ -1
গ 0 ঘ 1 **ঘ**

২১১. $n = 2$ হলে $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক -3 খ $-\frac{1}{3}$
গ $\frac{1}{3}$ ঘ 3 **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (২১২ ও ২১৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$x^3 - ax^2 + bx - p = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ যার তিনটি মূল α, β, γ.

২১২. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $a^2 - 2b$ খ $a^2 + 2b$
গ $b^2 - 2a$ ঘ $b^2 + 2a$ **ক**

২১৩. $\Sigma\alpha^3$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $a^3 - 3ab$ খ $a^2 - 2ab$
গ $a^2 + 2ab$ ঘ $a^3 + 3ab$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (২১৪ ও ২১৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

মূলদ ও বাস্তব সহগ বিশিষ্ট একটি ত্রিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল -3 এবং $2 + 3i$.

২১৪. ত্রিঘাত সমীকরণটির অপর মূলটি হলো — (সহজ)

ক 3 খ $-1 + 3i$
গ $-2 - 3i$ ঘ $2 - 3i$ **ঘ**

২১৫. ত্রিঘাত সমীকরণটি —

i. $x^3 - x^2 + x + 39 = 0$
ii. x-অক্ষকে একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করে
iii. x-অক্ষকে তিনটি বিন্দুতে ছেদ করে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক ii খ i ও ii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

$x^3 + 2x + r = 0$ এর মূল তিনটি α, β, γ.

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে (২১৬ ও ২১৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

২১৬. $\alpha + \beta + \gamma$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $-q$ খ q
গ 0 ঘ $-r$ **গ**

২১৭. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $4\alpha\beta\gamma$ খ $4q\gamma$
গ $4\alpha^2\beta^2\gamma^2$ ঘ 0 **ঘ**

উচ্চমাধ্যমিক উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অধ্যায়-৫: দ্বিপদী বিস্তৃতি

প্রশ্ন ▶ ১ $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$ *[চা. বো. ১৭]*

ক. n = 4 এর জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ আঁক। ২

খ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদ x-বর্জিত এবং পদটির মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুইটির পার্থক্য নির্ণয় কর যখন $x = 1$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক n = 4 এর জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ—

n=0	1
n=1	1 1
n=2	1 2 1
n=3	1 3 3 1
n=4	1 4 6 4 1

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$

মনে করি, বিস্তৃতিটির $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $= {}^{15}C_r (2)^{15-r} . \left(\frac{-3}{x}\right)^r$

$= {}^{15}C_r\, 2^{15-r} (-3)^r . x^{-r}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত

$\therefore$ $-r = 0$

$\therefore$ $r = 0$

$\because$ $(r+1) = (0+1) = 1$ বা ১ম পদ x বর্জিত এবং

এর মান $= {}^{15}C_0\, 2^{15-0} (-3)^0 = 32768$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$

যেহেতু $f(x)$ এর বিস্তৃতির ঘাত 15, যা বিজোড়।

সুতরাং বিস্তৃতিটির মধ্যপদ হবে 2টি।

$\therefore$ মধ্যপদ দুইটি $\left(\frac{15+1}{2}\right) = 8$ তম পদ এবং

$\left(\frac{15+3}{2}\right) = 9$ তম পদ

এখন, $(7+1)$ বা 8 তম পদ $= {}^{15}C_7\, 2^{15-7} . (-3)^7 . x^{-7}$

$= {}^{15}C_7 . 2^8 . (-3)^7 . x^{-7}$

$= {}^{15}C_7 . 2^8 . (-3)^7$ [যখন, $x = 1$]

আবার, $(8+1)$ বা 9 তম পদ $= {}^{15}C_8 . 2^{15-8} . (-3)^8 . x^{-8}$

$= {}^{15}C_8 . 2^7 . (-3)^8 . x^{-8}$

$= {}^{15}C_8 . 2^7 (-3)^8$ [যখন, $x = 1$]

$\therefore$ মধ্যপদ দুইটির মধ্যে পার্থক্য

$= \{{}^{15}C_8\, 2^7 (-3)^8\} - \{{}^{15}C_7 . 2^8 . (-3)^7\}$

$= 9006940800$

প্রশ্ন ▶ ২ দৃশ্যকল্প-১: $A = \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)^n$ *[ব্রা. বো. ১৭]*

দৃশ্যকল্প-২: $B = (1 - 9x + 20x^2)^{-1}$

ক. $6x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. n এর জন্য কোন শর্ত আরোপ করলে দৃশ্যকল্প A এর একটি মধ্যপদ থাকবে? n = 21 হলে মধ্যপদ বা (পদসমূহের) মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প B এর জন্য প্রমাণ কর যে, x^9 এর সহগ $5^{10} - 4^{10}$। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $6x^2 - 5x - 1 = 0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= (-5)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 25 + 24$

$= 49 = 7^2$ যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

$\therefore$ মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে।

খ দেওয়া আছে, $A = \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)^n$

n জোড় সংখ্যা হলে একটি মধ্যপদ থাকবে। **(Ans.)**

n = 21 হলে মধ্যপদ থাকবে দুইটি।

এগুলি হল $\left(\frac{21-1}{2} + 1\right)$ তম ও ([illegible] + 1) তম পদদ্বয়

বা, 11 তম এবং 12 তম পদদ্বয়

11 তম পদ বা $(10+1)$ তম পদ $= {}^{21}C_{10} . \left(\frac{2}{x}\right)^{21-10} . \left(\frac{x}{2}\right)^{10}$

$= {}^{21}C_{10} . \frac{2^{11}}{x^{11}} . \frac{x^{10}}{2^{10}}$

$= {}^{21}C_{10} . \frac{2}{x} = \frac{705432}{x}$ **(Ans.)**

12 তম পদ বা $(11+1)$ তম পদ $= {}^{21}C_{11} . \left(\frac{2}{x}\right)^{21-11} . \left(\frac{x}{2}\right)^{11}$

$= {}^{21}C_{11} \frac{2^{10}}{x^{10}} . \frac{x^{11}}{2^{11}}$

$= {}^{21}C_{11} \frac{x}{2} = 176358x$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = (1 - 9x + 20x^2)^{-1}$

$= \frac{1}{20x^2 - 9x + 1} = \frac{1}{20x^2 - 4x - 5x + 1}$

$= \frac{1}{4x(5x-1) - 1(5x-1)}$

$= \frac{1}{(4x-1)(5x-1)}$

ধরি, $\frac{1}{(4x-1)(5x-1)} \equiv \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{5x-1}$

$(4x-1)(5x-1)$ দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে পাই,

$1 \equiv A(5x-1) + B(4x-1)$

$x = \frac{1}{5}$ হলে, $1 = A\left(5 \times \frac{1}{5} - 1\right) + B\left(\frac{4}{5} - 1\right)$

বা, $1 = A \times 0 + B\left(-\frac{1}{5}\right)$

$\therefore$ $B = -5$

$x = \frac{1}{4}$ হলে, $1 = A\left(\frac{5}{4} - 1\right) + B\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right)$

বা, $1 = A \times \frac{1}{4} + B \times 0$

$\therefore$ $A = 4$

$\therefore$ $\frac{1}{(4x-1)(5x-1)} = \frac{4}{4x-1} - \frac{5}{5x-1}$

$= \frac{4}{-(1-4x)} - \frac{5}{-(1-5x)} = \frac{5}{1-5x} - \frac{4}{1-4x}$

$= 5(1-5x)^{-1} - 4(1-4x)^{-1}$

$= 5\{1 + 5x + 25x^2 + \ldots\ldots + 5^r.x^r + \ldots\ldots\} - 4\{1 + 4x + 16x^2 + \ldots\ldots + 4^r.x^r + \ldots\ldots\}$

r = 9 হলে, আমরা পাই, $5\{1 + 5x + 25x^2 + \ldots\ldots + 5^9x^9\} - 4\{1 + 4x + \ldots\ldots + 4^9x^9\}$

$\therefore$ x^9 এর সহগ $= 5^{10} - 4^{10}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $P = 4x + 3$ একটি দ্বিপদী রাশি। *[দি. বো. ১৭]*

ক. $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. P^{34} এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগ সমান হলে, এ পদ দুইটির x এর ঘাত নির্ণয় কর। ৪

গ. $P^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় করে বিস্তৃতিটির পঞ্চম পদটিও বের কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা 12 + 1 = 13টি যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ $\left(\frac{12}{2} + 1\right)$ তম পদ

= 7 তম পদ

$\therefore$ 7 তম পদ $= {}^{12}C_6 (2x^2)^{12-6} \left(\frac{-3}{x}\right)^6$

$= {}^{12}C_6\, 2^6\, x^{12} (-1)^6\, 3^6 \frac{1}{x^6} = {}^{12}C_6\, 2^6\, 3^6\, x^6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = 4x + 3$

এখন, $(4x+3)^{34}$ এর বিস্তৃতির দুইটি ক্রমিক পদের সহগ সমান

মনে করি, ক্রমিক পদদ্বয় $(r+1)$ তম পদ ও $(r+2)$ তম পদ

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{34}C_r(3)^{34-r}(4x)^r = {}^{34}C_r 3^{34-r} 4^r x^r$

$(r+2)$ তম পদ $= {}^{34}C_{r+1}(3)^{34-r-1}(4x)^{r+1}$
$= {}^{34}C_{r+1} 3^{33-r} 4^{r+1} x^{r+1}$

শর্তমতে, ${}^{34}C_r 3^{34-r} 4^r = {}^{34}C_{r+1} 3^{33-r} 4^{r+1}$

বা, $\dfrac{\lfloor 34}{\lfloor r \lfloor 34-r} 3 = \dfrac{\lfloor 34}{\lfloor r+1 \lfloor 33-r} 4$

বা, $\dfrac{3}{\lfloor r (34-r)\lfloor 33-r} = \dfrac{4}{(r+1)\lfloor r \lfloor 33-r}$

বা, $\dfrac{3}{34-r} = \dfrac{4}{r+1}$

বা, $3r + 3 = 136 - 4r$

বা, $7r = 133$

$\therefore$ $r = 19$

$\therefore$ এ পদ দুইটির x এর ঘাত 19 এবং 20 **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P = 4x + 3$

এখন, $P^{-\frac{1}{2}} = (4x+3)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{4}{3}x\right)^{-\frac{1}{2}}$

প্রদত্ত বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$= 3^{-\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)\left(\frac{-1}{2}-3\right)\text{.......}\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}\left(\frac{4}{3}x\right)^r$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^r \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)\text{......}\left(r+\frac{1}{2}-1\right)}{r!}\left(\frac{4}{3}\right)^r x^r$$

$$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{1.3.5.7\text{......}(2r-1)}{2^r r!} 2^{2r} \frac{1}{3^r} x^r$$

$$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{\{1.3.5\text{.........}(2r-1)\}\{2.4.6\text{......}2r\}}{r!(2.4.6\text{......}2r)} 2^r \frac{1}{3^r} x^r$$

$$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{1.2.3.4\text{.........}2r}{r!2^r(1.2.3\text{.......}r)} 2^r \frac{1}{3^r} x^r$$

$$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{(2r)!}{r!r!} \frac{1}{3^r} x^r$$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= \dfrac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \dfrac{(2r)!}{(r!)^2} \dfrac{1}{3^r}$ **(Ans.)**

পঞ্চম পদ $= \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1)^4 \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)}{4!}\left(\frac{4}{3}\right)^4 x^4$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{24} \dfrac{256}{81} x^4$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{105}{16\times 24} \dfrac{256}{81} x^4$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{70}{81} x^4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ $z = \alpha + \beta i$, যেখানে α ও β বাস্তব সংখ্যা। *[কু. বো. ১৭]*

ক. $\dfrac{x^3-8}{x-2}$ বহুপদীর ঘাত নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকে $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$ হলে, z মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে $\beta = 0$ এবং α^5 ও α^{15} এর সহগ পরস্পর সমান হলে $\left(2z^2 + \frac{R}{z^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতি থেকে R এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\dfrac{x^3-8}{x-2} = \dfrac{x^3-2^3}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$= x^2 + 2x + 4$ এখানে x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = \alpha + \beta i$

যখন, $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$ হয়

তখন, $z = 2 + i\sqrt{3}$

আমরা জানি, কোনো বাস্তব সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূলগুলি যুগলে থাকে। একটি মূল $2 + i\sqrt{3}$ হলে অপর মূলটি হবে $2 - i\sqrt{3}$ এবং সমীকরণটি হবে,

$x^2 - (2 + i\sqrt{3} + 2 - i\sqrt{3})x + (2 + i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + (4 - i^2 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + (4 + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ **(Ans.)**

গ $\beta = 0$ হলে, $z = \alpha$

তাহলে, $\left(2z^2 + \frac{R}{z^3}\right)^{10} = \left(2\alpha^2 + \frac{R}{\alpha^3}\right)^{10}$

এখন, $\left(2\alpha^2 + \frac{R}{\alpha^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে, $(r+1)$তম পদ

$= {}^{10}C_r(2\alpha^2)^{10-r}\left(\frac{R}{\alpha^3}\right)^r$

$= {}^{10}C_r . 2^{10-r} \alpha^{20-2r} . R^r . \frac{1}{\alpha^{3r}}$

$= {}^{10}C_r . 2^{10-r} \alpha^{20-2r-3r} . R^r$

$= {}^{10}C_r . 2^{10-r} \alpha^{20-5r} . R^r$

α^5 এর সহগের জন্য $20 - 5r = 5$

$\Rightarrow 5r = 20 - 5 \Rightarrow 5r = 15$

$\therefore$ $r = 3$

$\therefore \alpha^5$ এর সহগ $= {}^{10}C_3 2^{10-3} . R^3 = {}^{10}C_3 2^7 . R^3$

আবার, α^{15} এর সহগের জন্য, $20 - 5r = 15$

$\Rightarrow 5r = 5$

$\therefore r = 1$

$\therefore$ α^{15} এর সহগ $= {}^{10}C_1 2^{10-1} . R = {}^{10}C_1 . 2^9 R$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_3 2^7 . R^3 = {}^{10}C_1 . 2^9 . R$

$\Rightarrow \dfrac{R^3}{R} = \dfrac{{}^{10}C_1}{{}^{10}C_3} . \dfrac{2^9}{2^7} \Rightarrow R^2 = \dfrac{10}{120} . 2^2$

$\Rightarrow R^2 = \dfrac{4}{12} \Rightarrow R^2 = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ $R = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $f(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{11}$ .... (i) *[চ. বো. ১৭]*

$g(x) = (1 + px)^m$ .... (ii)

ক. $(1 - 3x)^{-1}$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম ও $(r+2)$ তম পদের সহগ সমান হলে r এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ এ $p = -8$ এবং $m = -\frac{1}{2}$ হলে দেখাও যে x^r এর সহগ $\dfrac{(2r)!2^r}{(r!)^2}$. ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1-3x)^{-1} = 1 + (-1)(-3x) + \dfrac{(-1)(-1-1)}{2!}(-3x)^2 + \dfrac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}(-3x)^3 + \text{......}$

$= 1 + 3x + \frac{2}{2}(9x^2) + \frac{(-1)(-2)(-3)}{6}(-27x^3) + \text{......}$

$= 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \text{... ... ...}$

খ $f(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{11}$

$f(x)$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{11}C_r(x^2)^{11-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r$

$= {}^{11}C_r x^{22-2r} \frac{3^r}{x^r} = {}^{11}C_r . 3^r . x^{22-3r}$

এবং $(r+2)$ তম পদ $= {}^{11}C_{r+1}(x^2)^{11-r-1}\left(\frac{3}{x}\right)^{r+1}$

$= {}^{11}C_{r+1} x^{22-2r-2} \frac{3^{r+1}}{x^{r+1}}$

$= {}^{11}C_{r+1} . 3^{r+1} . x^{22-3r-3}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদ ও $(r+2)$ তম পদের সহগ সমান।

$\therefore$ ${}^{11}C_r . 3^r = {}^{11}C_{r+1} . 3^{r+1}$

বা, $\dfrac{11!}{r!(11-r)!} . 3^r = \dfrac{11!}{(r+1)!(11-r-1)!} . 3^{r+1}$

বা, $\dfrac{1}{r!(11-r)(11-r-1)!} = \dfrac{3}{(r+1)r!(11-r-1)!}$

বা, $\frac{1}{11-r} = \frac{3}{r+1}$

বা, $r + 1 = 33 - 3r$

বা, $r + 3r = 33 - 1$

বা, $4r = 32$

$\therefore$ $r = 8$ **(Ans.)**

গ $g(x) = (1 + Px)^m$

$p = -8$ এবং $m = \frac{-1}{2}$ হলে $g(x) = (1 - 8x)^{-\frac{1}{2}}$

এখন, g(x) এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\dots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-8x)^r$$

$$= \frac{(-1)^r\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\dots\left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{r!}(-1)^r 8^r x^r$$

$$= \frac{(-1)^{2r}\,1.3.5\dots(2r-1)}{2^r . r!}2^{3r}.x^r$$

$$= \frac{\{1.3.5\dots\dots(2r-1)\}\{2.4.6\dots\dots 2r\}}{r!\{2.4.6\dots\dots 2r\}}2^{2r}.x^r$$

$$= \frac{1.2.3.4\dots\dots 2r}{r!\,2^r(1.2.3\dots\dots r)}.2^{2r}.x^r$$

$$= \frac{(2r)!}{r!\,r!}.2^r.x^r = \frac{(2r)!\,2^r}{(r!)^2}x^r$$

$\therefore$ g(x) এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!\,.\,2^r}{(r!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৬ $(1 + 2y)^m$ একটি বীজগাণিতিক রাশি। *[সি. বো. ১৭]*

ক. $(42x^2 - 13x + 1)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $m = 2n, (n \in \mathbb{Z})$ হলে দেখাও যে উদ্দীপকের রাশিটির বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান $\frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{n!}.2^{2n}.y^n$. ৪

গ. m = 20 হলে উদ্দীপকের রাশিটির বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 11:20 হয়। পদ দুইটি নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(42x^2 - 13x + 1)^{-1} = \frac{1}{42x^2 - 13x + 1}$

$= \frac{1}{1 - 7x - 6x + 42x^2}$

$= \frac{1}{(1-7x)(1-6x)}$

ধরি, $\frac{1}{(1-7x)(1-6x)} = \frac{A}{1-7x} + \frac{B}{1-6x}$

বা, $1 = A(1 - 6x) + B(1 - 7x)$

যখন $x = \frac{1}{7}$, তখন $A = 7$

যখন $x = \frac{1}{6}$, তখন $B = -6$

$\therefore \frac{1}{(1-7x)(1-6x)} = \frac{7}{1-7x} - \frac{6}{1-6x}$

$= 7(1 - 7x)^{-1} - 6(1 - 6x)^{-1}$

$= 7\{1 + 7x + (7x)^2 + \dots\dots\dots + (7x)^n + \dots\dots\dots\}$

$- 6\{1 + 6x + (6x)^2 + \dots\dots\dots + (6x)^n + \dots\dots\dots\}$

$\therefore x^n$ এর সহগ $= 7.7^n - 6.6^n$

$= 7^{n+1} - 6^{n+1}$ **(Ans.)**

খ $m = 2n\ (n \in \mathbb{Z})$ হলে,

প্রদত্ত উদ্দীপক $= (1 + 2y)^{2n}$; এখানে, n এর যে কোন মানের জন্য 2n জোড় সংখ্যা।

কাজেই, বিস্তৃতিটিতে একটি মাত্র মধ্যপদ আছে।

মধ্যপদটি $= \left(\frac{2n}{2} + 1\right)$ তম পদ $= (n + 1)$ তম পদ

$\therefore$ মধ্যপদটির মান $T_{n+1} = {}^{2n}C_n.(1)^{2n-n}.(2y)^n$

$= {}^{2n}C_n.(1)^n.(2y)^n$

$= {}^{2n}C_n.(2y)^n$

$\therefore {}^{2n}C_n(2y)^n$

$$= \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor 2n-n}(2y)^n$$

$$= \frac{2n.(2n-1).(2n-2).(2n-3)\dots\dots 4.3.2.1}{\lfloor n.\lfloor n}(2y)^n$$

$$= \frac{\{2n(2n-2)(2n-4)\dots.4.2\}\{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3.1\}}{\lfloor n.\lfloor n}(2y)^n$$

$$= \frac{2^n\{n(n-1)(n-2)\dots.2.1\}\{1.3.5\dots\dots(2n-3)(2n-1)\}}{\lfloor n.\lfloor n}2^n.y^n$$

$$= \frac{\{1.2.3\dots\dots(n-2)(n-1)n\}\{1.3.5\dots\dots(2n-3)(2n-1)\}}{\lfloor n.\lfloor n}2^n.2^n y^n$$

$$= \frac{\lfloor n\ \{1.3.5.\dots\dots\dots(2n-1)\}}{\lfloor n.\lfloor n}2^{2n}.y^n$$

$= \frac{1.3.5\dots\dots\dots(2n-1)}{\lfloor n}2^{2n}.y^n$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, m = 20 হলে,

$\therefore (1 + 2y)^m = (1 + 2y)^{20}$

ধরি, ক্রমিক পদ দুইটি T_{r+1} ও T_{r+2}

$\therefore \frac{T_{r+1}\text{ এর সহগ}}{T_{r+2}\text{ এর সহগ}} = \frac{11}{20}$

বা, $\frac{{}^{20}C_r.2^r}{{}^{20}C_{r+1}.2^{r+1}} = \frac{11}{20}$

বা, $\frac{\dfrac{\lfloor 20}{\lfloor r\ \lfloor 20-r}}{\dfrac{\lfloor 20}{\lfloor r+1\ \lfloor 19-r}\times 2} = \frac{11}{20}$

বা, $\frac{r+1}{20-r} = \frac{22}{20}$

বা, $20r + 20 = 440 - 22r$

বা, $42r = 420$

$\therefore r = 10$

$\therefore$ 11 তম পদ ও 12 তম পদ

$\therefore {}^{20}C_{10}(2y)^{10}$ এবং ${}^{20}C_{11}(2y)^{11}$

আবার, ধরি, $\frac{T_{r+2}\text{ এর সহগ}}{T_{r+1}\text{ এর সহগ}} = \frac{11}{20}$

বা, $\frac{{}^{20}C_{r+1}.2^{r+1}}{{}^{20}C_r.2^r} = \frac{11}{20}$

বা, $\frac{20-r}{r+1} = \frac{11}{40}$

বা, $800 - 40r = 11r + 11$

বা, $789 = 51r$

বা, $r = \frac{789}{51}$ যা গ্রহণযোগ্য নয়।

প্রশ্ন ▶৭ দৃশ্যকল্প-১ : $x^2 - 5x + 3 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β

দৃশ্যকল্প-২ : $\frac{1+x}{\sqrt{1-2x}}$ *[য. বো. ১৭]*

ক. $(3 - 2x)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতি x এর কোন মানের জন্য বৈধ? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\frac{3}{5-\alpha}$ ও $\frac{3}{5-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদত্ত রাশিটির বিস্তৃতি হতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $(3 - 2x)^{\frac{1}{2}} = \left\{3\left(1 - \frac{2}{3}x\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশির বিস্তৃতি বৈধ হবে যদি

$\left|\frac{2}{3}x\right| < 1$ বা, $|x| < \frac{3}{2}$ হয়। **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $x^2 - 5x + 3$ এর মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = 5$ এবং $\alpha\beta = 3$

এখন $\frac{3}{5-\alpha}$ ও $\frac{3}{5-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$$x^2 - \left(\frac{3}{5-\alpha} + \frac{3}{5-\beta}\right)x + \frac{3}{5-\alpha}\cdot\frac{3}{5-\beta} = 0$$

বা, $x^2 - \frac{15 - 3\beta + 15 - 3\alpha}{25 - 5\alpha - 5\beta + \alpha\beta}x + \frac{9}{25 - 5\alpha - 5\beta + \alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{30 - 3(\alpha+\beta)}{25 - 5(\alpha+\beta) + \alpha\beta}x + \frac{9}{25 - 5(\alpha+\beta) + \alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{30 - 3\times 5}{25 - 5\times 5 + 3}x + \frac{9}{25 - 5\times 5 + 3} = 0$

বা, $x^2 - \frac{15}{3}x + \frac{9}{3} = 0$ বা, $x^2 - 5x + 3 = 0$

যা নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প ২ হতে পাই,

$$\frac{1+x}{\sqrt{1-2x}} = (1+x)(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+x)\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3 + \ldots\ldots\right\}$$

$$= (1+x)\left\{1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \left\{1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \ldots\ldots + x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \left\{1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots\right\}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির বিস্তৃতি হতে পাই, x^3 এর সহগ 4 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $f(x) = x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58$, $g(x) = \frac{x}{1 - 4x + 3x^2}$ *[ব. বো. ১৭]*

ক. উদাহরণসহ পৃথায়কের সংজ্ঞা দাও। ২

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $5 + 2i$ হলে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পৃথায়ক:** $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। এর মূলদ্বয়, $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

যেখানে, a, b, c বাস্তব সংখ্যা।

এখানে, '$\sqrt{\ }$' এর ভিতরের রাশি $b^2 - 4ac$ এর মানের উপর ভিত্তি করে মূলদ্বয়ের প্রকৃতি পরিবর্তিত হয়। এর মান পর্যালোচনা করে মূলের প্রকৃতি নিশ্চিত ভাবে নিরূপণ করা যায়। এ কারণে একে পৃথায়ক বলা হয়।

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ এর পৃথায়ক, $b^2 - 4ac$

উদাহরণ: $x^2 - x - 6$ রাশিটির পৃথায়ক $(-1)^2 - 4.1(-6)$
$= 1 + 24 = 25$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58$

এবং $f(x) = 0$

$\therefore x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58 = 0$ ... ... (i)

সমীকরণটির একটি মূল $5 + 2i$ হলে অপর একটি মূল হবে $5 - 2i$.

মনে করি, সমীকরণটির অবশিষ্ট মূল দুইটি α, β

$\therefore$ মূলগুলির যোগফল, $5 + 2i + 5 - 2i + \alpha + \beta = 13$

বা, $\alpha + \beta + 10 = 13$

$\therefore \alpha + \beta = 3$ ... ... (ii)

আবার, মূলগুলির গুণফল, $(5 + 2i)(5 - 2i)\alpha\beta = 58$

বা, $(25 - 4i^2)\alpha\beta = 58$

বা, $\{25 - 4(-1)\}\alpha\beta = 58$

বা, $29\alpha\beta = 58$

$\therefore \alpha\beta = 2$ ... ... (iii)

এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 3^2 - 4.2 = 1$

$\therefore \alpha - \beta = \pm 1$.

(+) চিহ্ন ব্যবহার করে পাই, $\alpha - \beta = 1$ ... ... (iv)

(ii) ও (iv) যোগ করে পাই,

$2\alpha = 4 \therefore \alpha = 2$

α এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$2 + \beta = 3 \therefore \beta = 1$

(−) চিহ্ন ব্যবহার করেও একই মূল পাওয়া যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় অপর মূলগুলি $5 - 2i, 2, 1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x}{1 - 4x + 3x^2} = \frac{x}{1 - 3x - x + 3x^2}$

$$= \frac{x}{(1-3x)(1-x)} = \frac{\frac{1}{3-1}}{1-3x} + \frac{\frac{1}{1-3}}{1-x} \text{ [cover-up rule এর সাহায্যে]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-3x} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-x} = \frac{1}{2}\{(1-3x)^{-1} - (1-x)^{-1}\}$$

$$= \frac{1}{2}[\{1 + 3x + (3x)^2 + \ldots + (3x)^r + \ldots\} - \{1 + x + x^2 + \ldots + x^r + \ldots\}]$$

$$= \frac{1}{2}[1 + 3x + 9x^2 + \ldots + 3^r.x^r + \ldots - 1 - x - x^2 - \ldots - x^r - \ldots]$$

$\therefore x^r$ এর সহগ $= \frac{1}{2}(3^r - 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ $z = 3x + 4y$, সীমাবদ্ধতাসমূহ : $x + y \le 7$, $2x + 5y \le 20$ এবং $x \ge 0, y \ge 0$

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

ক. উপসেট $S = \{x : 3x^2 - 16x + 5 < 0\}$ এর সুপ্রিমাম এবং ইনফিমাম বের কর। ২

খ. $y = \frac{1}{5x}$ হলে, z^{10} এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদটি বের কর এবং এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত সীমাবদ্ধতার সাপেক্ষে অভীষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান বের কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $S = \{x : 3x^2 - 16x + 5 < 0\}$

$= \{x : 3x^2 - 15x - x + 5 < 0\}$

$= \{x : 3x(x - 5) - 1(x - 5) < 0\}$

$= \{x : (x - 5)(3x - 1) < 0\}$

$= \left\{x : \frac{1}{3} < x < 5\right\}$

S এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x : x \ge 5\}$

$\therefore$ S এর সুপ্রিমাম $= 5$ **(Ans.)**

এবং S এর নিম্নসীমার সেট $= \left\{x : x \le \frac{1}{3}\right\}$

$\therefore$ S এর ইনফিমাম $= \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = 3x + 4y$

$\therefore z^{10} = \left(3x + \frac{4}{5x}\right)^{10}$ $\left[\because y = \frac{1}{5x}\right]$ ... ... (i)

(i) নং এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ

$= {}^{10}C_r (3x)^{10-r} \cdot \left(\frac{4}{5x}\right)^r$

$= {}^{10}C_r . 3^{10-r} . x^{10-r} . 4^r . 5^{-r} . x^{-r}$

$= {}^{10}C_r . 3^{10-r} . 4^r . 5^{-r} . x^{10-2r}$

যেহেতু (r + 1) তম পদটি x মুক্ত

সুতরাং, $10 - 2r = 0$

বা, $2r = 10$

$\therefore r = 5$

$\therefore (5 + 1)$ তম = 6 তম পদটি x মুক্ত এবং এর মান

$= {}^{10}C_5 . 3^{10-5} . 4^5 . 5^{-5}$

$= \frac{252 \times 3^5 \times 4^5}{5^5} = 252 \times \left(\frac{12}{5}\right)^5$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \le 7$, $2x + 5y \le 20$,

$x, y \ge 0$

প্রথমে, অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + y \le 7$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$x + y = 7$ বা, $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ... ... (1)

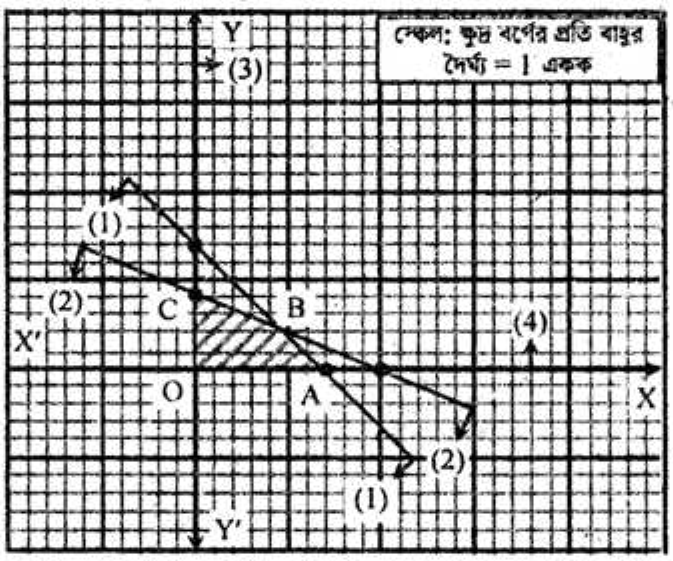
$2x + 5y \le 20$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$2x + 5y = 20$ বা $\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (2)

$x \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0$ ……… (3)

$y \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0$ ……… (4)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।



লেখচিত্রে দেখা যায়, সমীকরণ (1) ও (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাদ্বয় সত্য।

চিত্রে A, B ও C যথাক্রমে (1) ও (4); (1) ও (2) এবং (2) ও (3) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCO, যা চিত্রে, ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। তাহলে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে-

O(0, 0), A(7, 0), B(5, 2) এবং C(0, 4)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

A(7, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 7 + 4 \times 0 = 21$

B(5, 2) বিন্দুতে $z = 3 \times 5 + 4 \times 2 = 23$

এবং C(0, 4) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 4 = 16$

স্পষ্টত: B(5, 2) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়। অতএব সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি B(5, 2) এবং

সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 23$

প্রশ্ন ▶ ১০ $A = (a + bx)(c + dx)^{10}$ এবং $B = \frac{a - b}{(a - x)(b - x)}$ ।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. A এর বিস্তৃতিতে ভিন্ন ভিন্ন পদের মোট সংখ্যা কত? ২

খ. 'A' এর বিস্তৃতিতে, x^5 এর সহগ শূন্য হলে, a, b, c ও d এর মধ্যে সম্পর্ক বের কর। ৪

গ. 'B' এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(a + bx)(c + dx)^{10}$

$= a(c + dx)^{10} + bx(c + dx)^{10}$

∴ ভিন্ন ভিন্ন পদের মোট সংখ্যা = 11 + 11 − 10 = 12 **(Ans.)**

খ 'ক' হতে পাই,

$A = a(c + dx)^{10} + bx(c + dx)^{10}$

এখন, $(c + dx)^{10}$ এর বিস্তৃতি করে পাই,

$(c + dx)^{10} = c^{10} + 10c^9dx + 45c^8d^2x^2 + 120c^7d^3x^3 + 210c^6d^4x^4 + 252c^5d^5x^5 + 210c^4d^6x^6 + 120c^3d^7x^7 + 45c^2d^8x^8 + 10cd^9x^9 + d^{10}x^{10}$

$\therefore A = ac^{10} + 10ac^9dx + 45ac^8d^2x^2 + 120\,ac^7d^3x^3 + 210\,ac^6d^4x^4 + 252\,ac^5d^5x^5 + 210ac^4d^6x^6 + 120ac^3d^7x^7 + 45ac^2d^8x^8 + 10acd^9x^9 + ad^{10}x^{10} + bc^{10}x + 10bc^9dx^2 + 45bc^8d^2x^3 + 120\,bc^7d^3x^4 + 210bc^6d^4x^5 + 252bc^5d^5x^6 + 210bc^4d^6x^7 + 120bc^3d^7x^8 + 45bc^2d^8x^9 + 10bcd^9x^{10} + bd^{10}x^{11}$

∴ A এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ শূন্য হলে,

$252\,ac^5d^5 + 210\,bc^6d^4 = 0$

বা, $42c^5d^4(6ad + 5bc) = 0$

$\therefore 6ad + 5bc = 0$

ইহাই a, b, c ও d এর মধ্যে নির্ণেয় সম্পর্ক।

গ দেওয়া আছে, $B = \frac{a - b}{(a - x)(b - x)}$

$= \frac{a - x - b + x}{(a - x)(b - x)}$

$= \frac{(a - x)}{(a - x)(b - x)} - \frac{(b - x)}{(a - x)(b - x)}$

$= \frac{1}{b - x} - \frac{1}{a - x}$

$= \frac{1}{b\left(1 - \frac{x}{b}\right)} - \frac{1}{a\left(1 - \frac{x}{a}\right)}$

$= \frac{1}{b}\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1} - \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1}$

$= \frac{1}{b}\left\{\left(1 + \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{b^n} + \ldots\ldots\right)\right\}$

$- \frac{1}{a}\left\{\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{a^n} + \ldots\ldots\right)\right\}$

∴ x^n এর সহগ $= \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b^n} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ দৃশ্যকল্প-১: $P = \left\{x^2 - 2(\omega + \omega^2) + \frac{1}{x^2}\right\}^6$

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + (5 - 2i)x + 2(7 - i) = 0$ *[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]*

ক. $(1 - 2x)^{\frac{3}{5}}$ এর ৪র্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. P এর বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদের মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লেখিত সমীকরণের মূল নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1 - 2x)^{\frac{3}{5}} = 1 + \frac{3}{5}(-2x) + \frac{\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5} - 1\right)}{2!}(-2x)^2 + \frac{\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5} - 1\right)\left(\frac{3}{5} - 2\right)}{3!}(-2x)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 1 - \frac{6}{5}x + \frac{\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)}{2} 4.x^2 - \frac{\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{7}{5}\right)}{6} 8.x^3 + \ldots\ldots$

$= 1 - \frac{6}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{125}x^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \left\{x^2 - 2(\omega + \omega^2) + \frac{1}{x^2}\right\}^6$

$= \left\{x^2 - 2(-1) + \frac{1}{x^2}\right\}^6$

$= \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$

$= \left(x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

মনে করি, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ x-বর্জিত অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

এখন, (r + 1) তম পদ $= {}^{12}C_r x^{12-r} . \left(\frac{1}{x}\right)^r$

$= {}^{12}C_r\, x^{12-r}(1)^r . x^{-r}.(1)^r.\ {}^{12}C_r\, x^{12-2r}$

যেহেতু পদটিতে x^0 আছে,

সুতরাং $12 - 2r = 0$ বা, $2r = 12$ $\therefore r = 6$

∴ x বর্জিত পদ অর্থাৎ (6 + 1) তম পদের মান $= (1)^6\ {}^{12}C_6$

$= {}^{12}C_6 = 924$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $x^2 + (5 - 2i)x + 2(7 - i) = 0$ ………… (i)

এখানে, $a = 1$

$b = 5 - 2i$

$c = 2(7 - i) = 14 - 2i$

ধরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2i - 5$ ………… (ii)

$\therefore \alpha\beta = \frac{c}{a} = 14 - 2i$ ………… (iii)

এখন, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(2i-5)^2-4(14-2i)$
$=4i^2-20i+25-56+8i$
$=-4-20i+25-56+8i$
$=-12i-35=-12i-36+1$
$=(6i)^2-2.6i.1+1^2=(6i-1)^2$
$\therefore\ \alpha-\beta=6i-1$ ……… (iv)
$\therefore$ (ii) + (iv) হতে, $2\alpha=8i-6$
$\therefore\ \alpha=4i-3$
(ii) নং হতে পাই, $(4i-3)+\beta=2i-5$
$\Rightarrow\ \beta=2i-5-4i+3$
$=-2i-2$
$\therefore\ \alpha=4i-3$
$\therefore\ \beta=-2i-2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১২ $Q=ax^2+bx+c$ *[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]*

ক. $Q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha+\frac{1}{\beta}$ এবং $\beta+\frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. $Q=0$ এর একটি মূল $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে প্রমাণ কর যে, $2a=c$ অথবা $(2a+c)^2=2b^2$ ৪

গ. $a=2, b=0, c=\frac{k}{x^3}$ এবং Q^{10} এর বিস্তৃতির x^5 এবং x^{15} এর সহগ সমান হলে k এর অশূণ্য মান নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q=ax^2+bx+c$
$Q=0$ হলে, $ax^2+bx+c=0$
$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $=\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$
$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$
$=\left(\frac{-b}{a}\right)+\left(\frac{-b/a}{c/a}\right)$
$=\frac{-b}{a}-\frac{b}{c}=\frac{-bc-ab}{ac}=-\frac{(ab+bc)}{ac}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$
$=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}$
$=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=\frac{c}{a}+\frac{1}{c/a}+2$
$=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+2=\frac{c^2+a^2+2ac}{ac}$

$\therefore\ \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)$ এবং $\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$ মূলবিশিষ্ট নির্ণেয় সমীকরণ,
x^2 – (মূলদ্বয়ের যোগফল)x + মূলদ্বয়ের গুণফল = 0
বা, $x^2-\left\{\frac{-(ab+bc)}{ac}\right\}x+\frac{c^2+a^2+2ac}{ac}=0$
বা, $x^2+\frac{(a+c)bx}{ac}+\frac{c^2+a^2+2ac}{ac}=0$
$\therefore\ acx^2+b(a+c)x+(c+a)^2=0$ **(Ans.)**

খ মনে করি, $cx^2+bx+a=0$ এর একটি মূল α
তাহলে শর্তানুযায়ী, $ax^2+bx+c=0$ এর একটি মূল 2α।
সুতরাং α দ্বারা $cx^2+bx+a=0$ এবং 2α দ্বারা $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণ সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ,
$c\alpha^2+b\alpha+a=0$ ……… (i)
$4a\alpha^2+2b\alpha+c=0$ ……… (ii)
(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই,
$\frac{\alpha^2}{bc-2ab}=\frac{\alpha}{4a^2-c^2}=\frac{1}{2bc-4ab}$
$\therefore\ \alpha=\frac{bc-2ab}{4a^2-c^2}$ [১ম ও ২য় অনুপাত হতে]
এবং $\alpha=\frac{4a^2-c^2}{2bc-4ab}$ [২য় ও ৩য় অনুপাত হতে]
সুতরাং আমরা পাই, $\frac{bc-2ab}{4a^2-c^2}=\frac{4a^2-c^2}{2bc-4ab}$
বা, $(bc-2ab)(2bc-4ab)=(4a^2-c^2)^2$ [আড়গুণন করে]
বা, $2b^2(c-2a)^2=(c-2a)^2(c+2a)^2$
বা, $2b^2(c-2a)^2-(c-2a)^2(c+2a)^2=0$
বা, $(c-2a)^2\{2b^2-(2a+c)^2\}=0$
হয়, $(c-2a)^2=0$ অথবা, $2b^2-(2a+c)^2=0$
বা, $c-2a=0$ $\therefore\ (2a+c)^2=2b^2$
$\therefore\ 2a=c$
$\therefore\ 2a=c$ অথবা, $(2a+c)^2=2b^2$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q=ax^2+bx+c$
$a=2, b=0$ এবং $c=\frac{k}{x^3}$ হলে
$Q=2x^2+0.x+\frac{k}{x^3}=2x^2+\frac{k}{x^3}$
$\therefore\ (Q)^{10}=\left(2x^2+\frac{k}{x^3}\right)^{10}={}^{10}C_0(2x^2)^{10-0}\left(\frac{k}{x^3}\right)^0+{}^{10}C_1(2x^2)^{10-1}\left(\frac{k}{x^3}\right)^1$
$+{}^{10}C_2(2x^2)^{10-2}\left(\frac{k}{x^3}\right)^2+{}^{10}C_3(2x^2)^{10-3}\left(\frac{k}{x^3}\right)^3+\ldots\ldots$
$=2^{10}x^{20}+10\times2^9x^{18}\frac{k}{x^3}+45\times2^8x^{16}\frac{k^2}{x^6}+120\times2^7.x^{14}\frac{k^3}{x^9}+\ldots\ldots$
$=2^{10}x^{20}+10\times2^9x^{15}k+45\times2^8x^{10}k^2+120\times2^7.x^5k^3+\ldots\ldots$
শর্তমতে, x^5 এর সহগ = x^{15} এর সহগ
বা, $120\times2^7k^3=10\times2^9k$
বা, $k^3=\frac{10\times2^9}{120\times2^7}k$
বা, $k^2=\frac{1}{3}$ [k দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে]
$\therefore\ k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ দৃশ্যকল্প-১: $\left(3+\frac{x}{2}\right)^n$
দৃশ্যকল্প-২: $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ *[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]*

ক. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$ রাশিটির বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লেখিত রাশির বিস্তৃতিতে x^7 ও x^8 এর সহগ সমান হলে, n এর মান কত? ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, x^n এর সহগ $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতিতে ঘাত জোড় কাজেই এর একটি মধ্যপদ আছে।
অর্থাৎ $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ বা, (8 + 1)তম পদ মধ্যপদ
$\therefore$ (8 + 1) তম পদ $={}^{16}C_8x^{16-8}\left(-\frac{1}{x}\right)^8$
$={}^{16}C_8x^8.\frac{1}{x^8}={}^{16}C_8=12870$
$\therefore$ মধ্যপদটি 12870 **(Ans.)**

খ $\left(3+\frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ
অর্থাৎ, (r + 1) তম পদ $={}^nC_r3^{n-r}.\left(\frac{x}{2}\right)^r={}^nC_r(3)^{n-r}.2^{-r}.x^r$
যদি (r + 1) তম পদে x^7 থাকে, তবে r = 7
আবার, যদি (r + 1) তম পদে x^8 থাকে তবে r = 8
সুতরাং x^7 এবং x^8-এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে,
${}^nC_7\,3^{n-7}2^{-7}={}^nC_8.3^{n-8}.2^{-8}$
বা, ${}^nC_7.3^n.3^{-7}.2^{-7}={}^nC_8.3^n.3^{-8}.2^{-8}$
বা, ${}^nC_7={}^nC_8.3^{-1}.2^{-1}$
বা, $\frac{n!}{7!(n-7)!}=\frac{n!}{8!(n-8)!}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}$
বা, $\frac{1}{7!(n-7)(n-8)!}=\frac{1}{8\times7!(n-8)!}.\frac{1}{6}$
বা, $\frac{1}{n-7}=\frac{1}{48}$ বা, $n-7=48$ বা, $n=48+7$
$\therefore\ n=55$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)\ldots\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n$$

$$=\frac{(-1)^n.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)\ldots\ldots\left(n+\frac{1}{2}-1\right)}{n!}(-1)^n.4^n.x^n$$

$$=\frac{(-1)^{2n}\{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}\frac{1}{2^n}}{n!}.2^{2n}.x^n$$

$\therefore$ x^n এর সহগ $=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2^n n!}2^{2n}$

$$=\frac{\{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}\{2.4.6\ldots\ldots2n\}}{n!\{2.4.6\ldots\ldots2n\}}2^n$$

$$=\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(2n-1).2n}{n!(1.2.3.4\ldots\ldots n)2^n}.2^n=\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ $Q(x)=2x+\frac{1}{6x}$ এবং $R(x)=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]

ক. $\{Q(x)\}^4$ এর প্যাসকেলের ত্রিভুজ অঙ্কন কর। ২

খ. $\{Q(x)\}^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি বের কর এবং এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, R(x) এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\{Q(x)\}^4=\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^4$

n = 4 এর জন্য,

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
```

$\{Q(x)\}^4=(2x)^4+4(2x)^3\times\frac{1}{6x}+6(2x)^2.\left(\frac{1}{6x}\right)^2+4.(2x).\left(\frac{1}{6x}\right)^3+\left(\frac{1}{6x}\right)^4$

$=16x^4+\frac{16x^2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{27x^2}+\frac{1}{1296x^4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q(x)=2x+\frac{1}{6x}$

অর্থাৎ, $\{Q(x)\}^{10}=\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$

মনে করি, $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ x বর্জিত অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

$\therefore$ (r + 1) তম পদ $={}^{10}C_r(2x)^{10-r}.\left(\frac{1}{6x}\right)^r={}^{10}C_r2^{10-r}.x^{10-r}.6^{-r}.x^{-r}$

$={}^{10}C_r.2^{10-r}.(3.2)^{-r}.x^{10-2r}={}^{10}C_r2^{10-2r}.3^{-r}.x^{10-2r}$

যেহেতু, পদটিতে x^0 আছে। সুতরাং $10-2r=0$ বা, $2r=10$ $\therefore r=5$

$\therefore$ x বর্জিত (5 + 1) তম পদের মান $={}^{10}C_5 2^{10-10}.3^{-5}={}^{10}C_5\times2^0\times\frac{1}{3^5}$

$={}^{10}C_5\times\frac{1}{3^5}$ **(Ans.)**

$=\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}.\frac{1}{3^5}$

$=\frac{28.9}{3^5}=\frac{28.9}{9.27}=\frac{28}{27}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

প্রশ্ন ▶ ১৫ দৃশ্যকল্প-১: যোগাশ্রয়ী অসমতাগুলি হলো : $x+y\le7$, $2x+5y\le20$, $x\ge0$, $y\ge0$

দৃশ্যকল্প-২: $P=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$.

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. $a, b\in\mathbb{R}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|a-b|\ge||a|-|b||$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে লৈখিক পদ্ধতিতে $z=3x+4y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, P এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $\frac{1.3.5\ldots\ldots\ldots(2n-1)}{n!}(-2)^n$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $|a|=|(a-b)+b|\le|a-b|+|b|$ বা, $|a|-|b|\le|a-b|$

বা, $|a-b|\ge|a|-|b|$

আবার, $|b|=|(b-a)+a|\le|b-a|+|a|=|a-b|+|a|$.

$[\because|b-a|=|-(a-b)|=|a-b|]$

বা, $|a-b|\ge|b|-|a|$ বা, $|a-b|\ge-(|a|-|b|)$

বা, $-|a-b|\le|a|-|b|$ …… (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $-|a-b|\le|a|-|b|\le|a-b|$

বা, $||a|-|b||\le|a-b|$

$\therefore|a-b|\ge||a|-|b||$ **(প্রমাণিত)**

খ সৃজনশীল ৯(গ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭৯

গ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা (2n + 1) টি যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং, এর মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ বা (n + 1) তম পদ।

$\therefore$ (n + 1) তম পদ $={}^{2n}C_n x^{2n-n}\left(-\frac{1}{x}\right)^n={}^{2n}C_n.x^n.(-1)^n.x^{-n}$

$=(-1)^n.{}^{2n}C_n=(-1)^n.\frac{(2n)!}{(2n-n)!n!}$

$=(-1)^n\frac{2n.(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots4.3.2.1}{n!\,n!}$

$=(-1)^n.\frac{1.2.3.4\ldots(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}{n!\,n!}$

$=(-1)^n.\frac{\{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6\ldots(2n-2)2n\}}{n!\,n!}$

$=(-1)^n\frac{\{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)\}2^n\{1.2.3.4\ldots(n-1).n\}}{n!n!}$

$=\frac{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}\{1.2.3\ldots n\}}{n!\,n!}(-1)^n2^n$

$=\frac{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}n!}{n!\,n!}(-2)^n$

$=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}(-2)^n$

P এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}(-2)^n$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ দৃশ্যকল্প-১: $x^2-bx+c=0$ এবং $x^2-cx+b=0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি।

দৃশ্যকল্প-২: $g(x)=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$।

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b ও c হলে, $\sum c^3$ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $b+c+4=0$. ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, g(x) এর বিস্তৃতিতে x^m এর সহগ $\frac{(2m)!}{(m!)^2}$। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই,

$a+b+c=-p$ …… (i)

$ab+ca+bc=q$ …… (ii)

$abc=-r$ …… (iii)

এখন, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

বা, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)\}$

বা, $a^3+b^3+c^3-3(-r)=(-p)\{(-p)^2-3.q\}$; [(i), (ii), (iii) নং থেকে]

বা, $a^3+b^3+c^3+3r=-p^3+3pq$

$\therefore$ $\sum c^3=3pq-p^3-3r$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $3pq-p^3-3r$

খ ধরি, $x^2-bx+c=0$ এর মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore$ $\alpha+\beta=b$ এবং $\alpha\beta=c$

আবার, ধরি, $x^2-cx+b=0$ এর মূলদ্বয় γ এবং δ

$\therefore\gamma+\delta=c$ এবং $\gamma\delta=b$

প্রশ্নমতে, $\alpha-\beta=\gamma-\delta=k$ (ধরি)

$\therefore\alpha-\beta=\gamma-\delta$

বা, $(\alpha-\beta)^2=(\gamma-\delta)^2$

বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$

বা, $b^2-4c=c^2-4b$

বা, $b^2-c^2+4b-4c=0$

বা, $(b+c)(b-c)+4(b-c)=0$

বা, $(b-c)(b+c+4)=0$

∴ হয়, $b - c = 0$ অথবা, $b + c + 4 = 0$

কিন্তু $b - c \neq 0$

কারণ $b - c = 0$ বা, $b = c$ হলে সমীকরণদ্বয় একই আকার ধারণ করে।

∴ $b + c + 4 = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

প্রশ্ন ▶১৭ $g(x) = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান এবং $q = (1 - 7x + 12x^2)^{-1}$। *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. $\frac{1}{1-i}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. $g(x) = px^2 + qx + r$ হলে দেখাও যে, $r(p - q)^3 = p(r - q)^3$। ৪

গ. q এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু মূলদ সহগ বিশিষ্ট জটিল মূলগুলি যুগলে থাকে।

সুতরাং একটি মূল $\frac{1}{1-i}$ হলে অপর মূলটি হবে $\frac{1}{1+i}$

∴ মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$

$= \frac{1 - i + 1 + i}{(1+i)(1-i)} = \frac{2}{1^2 - i^2}$

$= \frac{2}{1-(-1)}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1}{1-i}\right) = \frac{1}{1^2 - i^2} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ : x^2 – (মূলদ্বয়ের সমষ্টি)x + মূলদ্বয়ের গুণফল = 0

বা, $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$

∴ $2x^2 - 2x + 1 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = 0$

বা, $px^2 + qx + r = 0$ $[\because g(x) = px^2 + qx + r]$

মনে করি, $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে, অপরটি α^2

∴ $\alpha + \alpha^2 = -\frac{q}{p}$ ...... (i) এবং $\alpha.\alpha^2 = \frac{r}{p}$

∴ $\alpha^3 = \frac{r}{p}$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = -\frac{q}{p} + \frac{r}{p}$

বা, $\alpha(1 + \alpha + \alpha^2) = \frac{r-q}{p}$

বা, $\alpha\left(1 - \frac{q}{p}\right) = \frac{r-q}{p}$ $[\because \alpha + \alpha^2 = -\frac{q}{p}]$

বা, $\alpha\left(\frac{p-q}{p}\right) = \frac{r-q}{p}$

বা, $\alpha(p - q) = r - q$

বা, $\alpha^3(p - q)^3 = (r - q)^3$

বা, $\frac{r}{p}(p - q)^3 = (r - q)^3$ $[\because \alpha^3 = \frac{r}{p}]$

∴ $r(p - q)^3 = p(r - q)^3$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $q = (1 - 7x + 12x^2)^{-1}$

$= \frac{1}{1 - 7x + 12x^2} = \frac{1}{12x^2 - 7x + 1}$

$= \frac{1}{12x^2 - 3x - 4x + 1} = \frac{1}{3x(4x-1) - 1(4x-1)}$

$= \frac{1}{(4x-1)(3x-1)} = \frac{1}{\{-(1-4x)\}\{-(1-3x)\}}$

$= \frac{1}{(1-4x)(1-3x)}$

মনে করি, $\frac{1}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-3x}$

বা, $1 = A(1 - 3x) + B(1 - 4x)$ ....(i)

(i) নং x $= \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$1 = A\left(1 - \frac{1}{3}.3\right) + B\left(1 - 4.\frac{1}{3}\right)$

বা, $1 = A(1 - 1) + B\left(\frac{3-4}{3}\right)$

বা, $1 = 0 - \frac{B}{3}$ বা, $1 = \frac{-B}{3}$

∴ $B = -3$

আবার, (i) নং এ $x = \frac{1}{4}$ বসিয়ে পাই,

$1 = A\left(1 - 3.\frac{1}{4}\right) + B\left(1 - 4.\frac{1}{4}\right)$

বা, $1 = A\left(\frac{4-3}{4}\right) + B(1 - 1)$

বা, $1 = A\frac{1}{4} + 0$ ∴ $A = 4$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$\frac{1}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{4}{1-4x} + \frac{-3}{1-3x}$

$= \frac{4}{1-4x} - \frac{3}{1-3x} = 4(1 - 4x)^{-1} - 3(1 - 3x)^{-1}$

$= 4\{1 + 4x + (4x)^2 + ... + (4x)^r\} - 3\{1 + 3x + (3x)^2 + ... + (3x)^r\}$

∴ x^r এর সহগ $= 4.4^r - 3.3^r = 4^{r+1} - 3^{r+1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৮ $Z_2 = 1 - 3x$ *[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. Z_2^{10} এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. Z_2^{13} এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগদ্বয় সমান হলে r এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $Z_2^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদের সহগ $\frac{(2r)!3^r}{(r!)^2 4^r}$ ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Z_2 = 1 - 3x$

Z_2^{10} বা $(1 - 3x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 11টি এবং মধ্যপদ হবে $\frac{11+1}{2}$ বা 6 তম পদ

∴ মধ্যপদ $= {}^{10}C_5\, 1^{10-5}(-3x)^5$

$= 252 \times 1 \times (-3)^5 x^5$

$= 252 \times (-243)x^5$

$= -61236x^5$ **(Ans.)**

খ Z_2^{13} এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদের সহগ হবে x^r-এর সহগ

(r + 1) তম পদ $T_{r+1} = {}^{13}C_r\,.\,1^{(13-r)}(-3x)^r$

$= {}^{13}C_r(-3)^r x^r$

এবং (r + 2) তম পদের সহগ হবে x^{r+1} এর সহগ

∴ (r + 2) তম পদ, $T_{r+2} = {}^{13}C_{r+1}\, 1^{13-(r+1)}(-3x)^{r+1}$

$= {}^{13}C_{r+1}(-3)^{r+1}x^{r+1}$

শর্তমতে, ${}^{13}C_r(-3)^r = {}^{13}C_{r+1}(-3)^{r+1}$

বা, $\frac{13!}{r!(13-r)!}(-3)^r = \frac{13!}{(r+1)!(13-r-1)!}(-3)^{r+1}$

বা, $\frac{13!(-3)^r}{r!(13-r)(13-r-1)!} = \frac{13!(-3)^r(-3)}{(r+1)r!(13-r-1)!}$

বা, $\frac{1}{13-r} = \frac{-3}{(r+1)}$

বা, $-3(13 - r) = r + 1$

বা, $-39 + 3r = r + 1$

বা, $3r - r = 1 + 39$

বা, $2r = 40$

বা, $r = 20$

∴ 21 তম পদ ও 22 তম পদ কিন্তু তা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ বিস্তৃতির পদসংখ্যা 14।

গ $Z_2^{-\frac{1}{2}}$ বা, $(1 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ

$= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right) .... \left(-\frac{1}{2} - r + 1\right)}{r!}(-3x)^r$

$= \frac{-\frac{1}{2}\,.\,-\frac{3}{2}\,.\,-\frac{5}{2}\, ... \frac{-2r+1}{2}}{r!}(-3x)^r$

$= \frac{(-1)^r.\,1.3.5 .... (2r-1)}{2^r.\,r!}(-1)^r.\,3^r.\,x^r$

$= \frac{(-1)^{2r}\{1.3.5 .... (2r-1)\}\{2.4.6 .... 2r\}}{2^r.\,r!\,(2.4.6 .... 2r)}3^r.\,x^r$

$$= \frac{1.2.3 \ldots\ldots\ldots 2r}{r!\, 2^r .\, 2^r .\, (1.2.3 \ldots\ldots r)} . 3^r . x^r$$
$$= \frac{(2r)!}{r!\, 4^r .\, r!} 3^r . x^r$$
$$= \frac{(2r)!}{(r!)^2 4^r} . 3^r . x^r$$

$\therefore$ (r + 1) তম পদের সহগ $\frac{(2r)!\, 3^r}{(r!)^2 4^r}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১ঃ $f(x) = 1 + 2x,\ g(x) = 2 + \frac{1}{x}$

দৃশ্যকল্প-২ঃ $y = 3x - 6x^2 + 10x^3 - \ldots\ldots\ldots$

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি নির্ণয় কর। ২

খ. $p \in N, q \in N$ হলে $\{f(x)\}^p \{g(x)\}^2$ এর বিস্তৃতি থেকে ধ্রুবক পদের মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $x = \frac{1}{3}y + \frac{2y^2}{9} + \frac{14y^3}{81} + \ldots\ldots\ldots \infty$. ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$
$$= \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right\}^6$$
$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$$

দ্বিপদীটির ঘাত, n = 12 (জোড় সংখ্যা)। তাই এর মধ্যপদ একটি এবং তা $\left(\frac{12}{2} + 1\right) = (6 + 1)$ তম পদ

এখন, $T_{6+1} = {}^{12}C_6\, x^{12-6} . \left(-\frac{1}{x}\right)^6$
$= {}^{12}C_6 . x^6 . (-1)^6 . x^{-6}$
$= (-1)^6 . {}^{12}C_6$
$= 924$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 1 + 2x,\ g(x) = 2 + \frac{1}{x}$

$$\{f(x)\}^p \{g(x)\}^2 = (1 + 2x)^p . \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2$$
$$= (1 + 2x)^p \left(\frac{2x + 1}{x}\right)^2$$
$$= \frac{(1 + 2x)^{p+2}}{x^2}$$

মনে করি, r + 1 তম পদ x বর্জিত বা ধ্রুব পদ।

$\therefore\ T_{r+1} = \frac{1}{x^2} . {}^{p+2}C_r . (2x)^r$
$= {}^{p+2}C_r . 2^r . x^{r-2}$

যেহেতু (r + 1) তম পদটি x বর্জিত, সুতরাং ঐ পদে x এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore$ r − 2 = 0 বা, r = 2

অতএব, x বর্জিত পদের মান $= {}^{p+2}C_2 . 2^2 = 4\, {}^{p+2}C_2$

গ দেওয়া আছে, $y = 3x - 6x^2 + 10x^3 - \ldots\ldots\ldots$

বা, $-y = -3x + 6x^2 - 10x^3 + \ldots\ldots\ldots$

বা, $1 - y = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \ldots\ldots\ldots$

বা, $1 - y = (1 + x)^{-3}$

বা, $(1 + x)^3 = (1 - y)^{-1}$

বা, $1 + x = (1 - y)^{-\frac{1}{3}}$

বা, $1 + x = 1 + \left(\frac{-1}{3}\right)(-y) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}(-y)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - 1\right)\left(-\frac{1}{3} - 2\right)}{3!}.(-y)^3 + \ldots\ldots \infty$

বা, $x = \frac{1}{3}y + \frac{4}{3 \times 3 \times 2}y^2 + \frac{4.7}{3^3 \times 3 \times 2}y^3 + \ldots\ldots \infty$

$\therefore\ x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{9}y^2 + \frac{14}{81}y^3 + \ldots\ldots \infty$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২০ $f(x) = mx^2 + px + q$ একটি ফাংশন। *[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]*

ক. $(1 - 2x)^{-\frac{1}{3}}$ রাশিটিকে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. f(x) = 0 সমীকরণের মূল দুটির অনুপাত r হলে, প্রমাণ কর $mq(r + 1)^2 = p^2 r$. ৪

গ. দেখাও যে, m = q = 1 এবং p = 2 ধরে $\{f(x)\}^n$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি হবে $\frac{1.3.5\ldots\ldots\ldots(2n - 1)}{n!}(2x)^n$. ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $(1 - 2x)^{-\frac{1}{3}}$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-2x) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}(-2x)^2 + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} - 1\right)\left(-\frac{1}{3} - 2\right)}{3!}(-2x)^3 + \ldots\ldots$$
$$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{112}{81}x^3 + \ldots\ldots\ \textbf{(Ans.)}$$

খ প্রদত্ত সমীকরণ, f(x) = 0

বা, $mx^2 + px + q = 0$

দেওয়া আছে, $mx^2 + px + q = 0$ সমীকরণটির মূল দুইটির অনুপাত r.

ধরি, সমীকরণটির একটি মূল α এবং অপরটি αr

$\therefore$ মূল দুইটির যোগফল, $\alpha + \alpha r = -\frac{p}{m}$ $\therefore \alpha = -\frac{p}{m(1 + r)}$

এবং মূল দুইটির গুণফল, $\alpha . \alpha r = \frac{q}{m}$

বা, $\alpha^2 r = \frac{q}{m}$

বা, $\left\{-\frac{p}{m(1 + r)}\right\}^2 r = \frac{q}{m}$

বা, $\frac{p^2 r}{m^2(1 + r)^2} = \frac{q}{m}$

বা, $\frac{r}{(1 + r)^2} = \frac{qm^2}{mp^2}$

বা, $\frac{(1 + r)^2}{r} = \frac{mp^2}{m^2 q}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{(1 + r)^2}{r} = \frac{p^2}{mq}$

$\therefore\ mq(r + 1)^2 = p^2 r$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, m = q = 1, p = 2

$\therefore\ \{f(x)\}^n = (x^2 + 2x + 1)^n$
$= \{(x + 1)^2\}^n$
$= (1 + x)^{2n}$

$(1 + x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা = 2n + 1; যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{2n}{2} + 1\right)$ বা (n + 1) তম পদ।

$\therefore$ (n + 1) তম পদ $= {}^{2n}C_n\, x^n = \frac{(2n)!}{(2n - n)!\, n!}x^n$

$$= \frac{2n(2n - 1)(2n - 2)(2n - 3)\cdots\cdots 4.3.2.1}{n!\, n!} x^n$$
$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n - 3)(2n - 1)\}\{2.4.6.\cdots\cdots(2n - 2)2n\}}{n!\, n!} x^n$$
$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n - 1)\}.2^n\{1.2.3.\cdots\cdots(n - 1)n\}}{n!\, n!} x^n$$
$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n - 1)\}\, n!}{n!\, n!} 2^n x^n$$
$$= \frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n - 1)}{n!} 2^n x^n$$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২১ $f(x) = x^n$ যেখানে $n \in \mathbb{Z}$ *[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. $y = x + x^2 + x^3 + \ldots$ হলে দেখাও যে, $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots$ ২

খ. $f\left(3 + \frac{x}{2}\right)$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে, n এর মান বের কর। ৪

গ. f(a + 3x) এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে b, $\frac{21}{2}$bx, $\frac{189}{4}bx^2$ হলে a, b এবং n এর মান বের কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y = x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\cdots$

বা, $1 + y = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\cdots$

বা, $1 + y = (1 - x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$ বা, $1 + y = \frac{1}{1-x}$

বা, $1 - x = \frac{1}{1+y}$ বা, $1 - x = (1 + y)^{-1}$

বা, $1 - x = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots$

বা, $-x = -y + y^2 - y^3 + \cdots\cdots\cdots$

$\therefore$ $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \cdots\cdots$ **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল ১৩(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮১

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x^n$

$\therefore f(a + 3x) = (a + 3x)^n$ এর বিস্তৃতি

$(a + 3x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}(3x) + {}^nC_2a^{n-2}(3x)^2 + \cdots + (3x)^n$

সুতরাং, প্রশ্নানুসারে, $a^n = b$ ……… (i)

${}^nC_1a^{n-1}(3x) = \frac{21}{2}bx$ ……… (ii)

এবং ${}^nC_2 a^{n-2}(3x)^2 = \frac{189}{4}bx^2$ ……… (iii)

এখন, (ii) নং হতে পাই, $n.\frac{a^n}{a}.3x = \frac{21}{2}bx$

বা, $n.\frac{b}{a} = \frac{7}{2}b$ [(i) হতে]

$\therefore$ $n = \frac{7a}{2}$ ……… (iv)

আবার (iii) নং হতে পাই, ${}^nC_2 a^{n-2}(3x)^2 = \frac{189}{4}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{a^n}{a^2}.9x^2 = \frac{189}{4}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2}\frac{b}{a^2} = \frac{21}{4}b$ [(i) নং হতে $a^n = b$]

বা, $n(n-1).\frac{1}{a^2} = \frac{21}{2}$

বা, $2n(n-1) = 21a^2$

বা, $2.\frac{7a}{2}\left(\frac{7a}{2} - 1\right) = 21a^2$ [(iv) নং হতে]

বা, $\frac{7a-2}{2} = 3a$ [উভয়পক্ষকে 7a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $7a - 2 = 6a$ $\therefore a = 2$

(iv) নং এ $a = 2$ বসিয়ে, $n = \frac{7}{2} \times 2 = 7$

(i) নং এ $a = 2, b = 7$ বসিয়ে, $b = 2^7$

$\therefore$ a, b ও n এর মান যথাক্রমে 2, 128 ও 7. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২২ $g(x) = 3 + \frac{x}{2}$, $\varphi(x) = px^2 + qx + r$

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]

ক. $-1 + \sqrt{-3}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় কর। ২

খ. $p = 30, q = -11, r = 1$ হলে $\frac{1}{\varphi(x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\{g(x)\}^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 এর সহগদ্বয় সমান হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, একটি মূল $= -1 + \sqrt{-3}$

$= -1 + \sqrt{3}i$

$\therefore$ অপর মূলটি হবে, $-1 - \sqrt{3}i$

$\therefore$ উপরোক্ত দুইটি মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - (-1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i)x + (-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i) = 0$

বা, $x^2 + 2x - (\sqrt{3}i + 1)(\sqrt{3}i - 1) = 0$

বা, $x^2 + 2x - \{3i^2 - 1\} = 0$

বা, $x^2 + 2x - \{-3 - 1\} = 0$

$\therefore$ $x^2 + 2x + 4 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\varphi(x) = px^2 + qx + r$

$p = 30, q = -11, r = 1$ বসিয়ে পাই,

$\varphi(x) = 30x^2 - 11x + 1$

$\therefore$ $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{30x^2 - 11x + 1}$

$= \frac{1}{30x^2 - 6x - 5x + 1} = \frac{1}{6x(5x-1) - 1(5x-1)}$

$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{(5x-1)(6x-1)}$

ধরি, $\frac{1}{(5x-1)(6x-1)} \equiv \frac{A}{5x-1} + \frac{B}{6x-1}$

বা, $1 \equiv A(6x - 1) + B(5x - 1)$

$x = \frac{1}{6}$ হলে, $1 = A\left(6 \times \frac{1}{6} - 1\right) + B\left(5 \times \frac{1}{6} - 1\right)$

বা, $1 = 0 + B\left(\frac{5-6}{6}\right)$

$\therefore$ $B = -6$

$x = \frac{1}{5}$ হলে, $1 = A\left(\frac{6}{5} - 1\right) + B\left(5 \times \frac{1}{5} - 1\right)$

বা, $1 = A \times \frac{1}{5}$

$\therefore$ $A = 5$

$\therefore$ $\frac{1}{(5x-1)(6x-1)} = \frac{5}{5x-1} - \frac{6}{6x-1}$

$= \frac{-5}{1-5x} + \frac{6}{1-6x} = \frac{6}{1-6x} - \frac{5}{1-5x}$

$= 6(1 - 6x)^{-1} - 5(1 - 5x)^{-1}$

$= 6\{1 + 6x + 36x^2 + \ldots\ldots\ldots + 6^nx^n\}$

$- 5\{1 + 5x + 25x^2 + \ldots\ldots + 5^nx^n\}$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $= 6^{n+1} - 5^{n+1}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৩(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮১

প্রশ্ন ▶২৩ $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots\ldots \infty$ *[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]*

ক. $z_1 = 4 + 9i$ এবং $z_2 = -12 - 6i$ হলে $\sqrt{3z_1 + z_2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\{P(x)\}^{-12}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের সহগ, $\{P(x)\}^{-11}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুইটির সহগ দুইটির যোগফলের সমান। ৪

গ. দেখাও যে, $\{P(x)\}^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $(-1)^r\frac{1}{4^r}.\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $z_1 = 4 + 9i$

$z_2 = -12 - 6i$

$\therefore \sqrt{3z_1 + z_2} = \sqrt{3(4 + 9i) - 12 - 6i}$

$= \sqrt{12 + 27i - 12 - 6i}$

$= \sqrt{21i}$

$= \sqrt{21} \times \sqrt{i} = \sqrt{21} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i}$

$= \sqrt{21} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + 2i + i^2} = \sqrt{\frac{21}{2}}\sqrt{(1+i)^2}$

$= \pm\sqrt{\frac{21}{2}}(1 + i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots + \infty$

$= (1 + x)^{-1}$

$\therefore \{P(x)\}^{-12} = \{(1 + x)^{-1}\}^{-12}$

$= (1 + x)^{12}$

এবং $\{P(x)\}^{-11} = \{(1 + x)^{-1}\}^{-11}$

$= (1 + x)^{11}$

এখানে, $(1 + x)^{12}$ এর পদসংখ্যা 13 ও $(1 + x)^{11}$ এর পদসংখ্যা 12

$\therefore$ $(1 + x)^{12}$ এর মধ্যপদ হল এর 7 তম পদ

$(1 + x)^{12}$ এর 7 তম পদ $= {}^{12}C_6(1)^{12-6}(x)^6$

$= {}^{12}C_6 x^6 = 924x^6$

আবার, $(1 + x)^{11}$ এর মধ্যপদ হল 6 ও 7 তম পদ

$(1 + x)^{11}$ এর 7 তম পদ $= {}^{11}C_6(1)^{11-6}(x)^6 = 462x^6$

এবং 6 তম পদ $= {}^{11}C_5(1)^{11-5}(x)^5 = 462x^5$

এখানে, $462 + 462 = 924$

$\therefore$ $\{P(x)\}^{-12}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের সহগ, $\{P(x)\}^{-11}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুইটির সহগ দুটির যোগফলের সমান। **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \dots + \infty$

$= (1 + x)^{-1}$

$\therefore \{P(x)\}^{\frac{1}{2}} = \{(1+x)^{-1}\}^{\frac{1}{2}}$

$= (1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}x^r$$

$\therefore$ $(r + 1)$ তম পদ তথা x^r এর সহগ

$= \frac{(-1)(-3)(-5)\dots(-2r+1)}{2^r\, r!}$

$= \frac{(-1)^r 1.3.5\dots(2r-1)}{2^r.\, r!}$

$= \frac{1.2.3.4.5.6\dots(2r-1)2r}{2^r\, r!\,(2.4.6\dots 2r)}(-1)^r$

$= \frac{(2r)!}{2^r.2^r.(r!)^2}(-1)^r$

$= \frac{(2r)!}{(2^2)^r(r!)^2}(-1)^r$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= (-1)^r \frac{1}{4^r}\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২৪ **দৃশ্যকল্প-i:** $(a + 3x)^n$ এর বিস্তৃতিতে ১ম তিনটি পদ যথাক্রমে b, $\frac{21}{2}bx$ ও $\frac{189}{4}bx^2$.

দৃশ্যকল্প-ii: $f(x) = (1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ *[শহীদ পুলিশ স্মৃতি কলেজ, ঢাকা]*

ক. দৃশ্যকল্প-i হতে তিনটি সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-i হতে a, b ও n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-ii এর বিস্তৃতিতে প্রমাণ কর যে, $(r + 1)$ তম পদের সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2.2^r}$, যেখানে $|x| < \frac{1}{2}$ ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২১(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৫

খ সৃজনশীল ২১(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৫

গ $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\dots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-2x)^r$$

$$= \frac{(-1)^r\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\dots\dots\left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{r!}(-1)^r.\,2^r.\,x^r$$

$= (-1)^{2r}\frac{1.3.5.7\dots\dots(2r-1)}{2^r.r!}.2^r.\,x^r$

$= \frac{\{1.3.5.7\dots\dots(2r-1)\}\{2.4.6.8\dots\dots 2r\}}{r!(2.4.6\dots\dots 2r)}x^r$

$= \frac{1.2.3.4\dots\dots 2r}{r!\,2^r(1.2.3\dots\dots r)}x^r = \frac{(2r)!}{2^r.r!.r!}x^r = \frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}x^r$

$\therefore$ $(r + 1)$ তম পদের সহগ $= \frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ২৫ দৃশ্যকল্প-১ : $\frac{1}{1-5x+6x^2}$

দৃশ্যকল্প-২ : $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

[ঢাকা ইমপিরিয়াল কলেজ, ঢাকা]

ক. কততম পদটি $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির x বর্জিত পদ? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে $p\alpha + q$ এবং $p\beta + q$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৪(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

খ প্রদত্ত রাশি $= (1 - 5x + 6x^2)^{-1} = \{1 - 3x - 2x + 6x^2\}^{-1} = \{(1-3x) - 2x(1-3x)\}^{-1}$

$= \{(1-3x)(1-2x)\}^{-1} = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$

$= \frac{1}{(1-3x)\left(1-\frac{2}{3}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}\right)(1-2x)}$ [cover-up rule এর সাহায্যে]

$= \frac{1}{\frac{1}{3}(1-3x)} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)(1-2x)}$

$\therefore \frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} = 3(1-3x)^{-1} - 2(1-2x)^{-1}$

$= 3(1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots + 3^nx^n + \dots\dots) - 2(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots \cdots + 2^nx^n \cdots\cdots)$

$\therefore$ x^n-এর সহগ $= 3.3^n - 2.2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

সুতরাং, x^r এর সহগ $3^{n+1} - 2^{n+1}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p-x+x}{x(p-x)} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p}{px-x^2} = \frac{1}{q}$

বা, $pq = px - x^2$

বা, $x^2 - px + pq = 0$ .... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হওয়ায়, $\alpha + \beta = p$

এবং $\alpha\beta = pq$

এখন $(p\alpha + q) + (p\beta + q) = p(\alpha + \beta) + (q + q) = p.p + 2q = p^2 + 2q$

এবং $(p\alpha + q)(p\beta + q) = p^2\alpha\beta + pq\alpha + pq\beta + q^2$

$= p^2\alpha\beta + pq(\alpha + \beta) + q^2$

$= p^2 \times pq + pq \times p + q^2$

$= p^3q + p^2q + q^2 = q(p^3 + p^2 + q)$

$\therefore$ $(p\alpha + q)$ এবং $(p\beta + q)$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2 - \{(p\alpha + q) + (p\beta + q)\}x + (p\alpha + q)(p\beta + q) = 0$

বা, $x^2 - (p^2 + 2q)x + q(p^3 + p^2 + q) = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৬ $A = \left(2y - \frac{1}{4y^2}\right)^{17}$; $B = \frac{1}{1-7x+12x^2}$ *[আনন্দ মোহন কলেজ, ময়মনসিংহ]*

ক. $\sqrt{-i}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ বের কর। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-i$ এর বর্গমূল $= \sqrt{-i}$

$= \sqrt{\frac{-2i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + i^2 - 2i}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-i)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \left(2y - \frac{1}{4y^2}\right)^{17}$

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $17 + 1 = 18$, যা জোড় সংখ্যা।

সুতরাং বিস্তৃতিতে দুইটি মধ্যপদ থাকবে অর্থাৎ, $\left(\frac{17-1}{2}+1\right)$ বা 9 তম পদ এবং $\left(\frac{17+1}{2}+1\right)$ বা 10 তম পদ।

$\therefore$ 9 তম পদ, $T_9 = {}^{17}C_8(2y)^{17-8}\left(-\frac{1}{4y^2}\right)^8$

$= {}^{17}C_8(2y)^9(-1)^8\frac{1}{2^{16}.y^{16}}$

$= {}^{17}C_8 2^{9-16}.y^{9-16} = {}^{17}C_8 2^{-7}.y^{-7} = \frac{12155}{64y^7}$

10 তম পদ $T_{10} = {}^{17}C_9(2y)^{17-9}\left(-\frac{1}{4y^2}\right)^9$

$= {}^{17}C_9\, 2^8.y^8(-1)^9\frac{1}{2^{18}y^{18}}$

$= -{}^{17}C_9\frac{1}{2^{10}.y^{10}} = -\frac{12155}{512y^{10}}$

সুতরাং মধ্যপদ দুইটি $\frac{12155}{64y^7}$ এবং $-\frac{12155}{512y^{10}}$ **(Ans.)**

গ এখন, $B = \frac{1}{1-7x+12x^2} = \frac{1}{12x^2-7x+1}$

$= \frac{1}{12x^2-3x-4x+1} = \frac{1}{3x(4x-1)-1(4x-1)}$

$= \frac{1}{(4x-1)(3x-1)} = \frac{1}{\{-(1-4x)\}\{-(1-3x)\}}$

$= \frac{1}{(1-4x)(1-3x)}$

মনে করি, $\frac{1}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-3x}$

বা, $1 = A(1-3x) + B(1-4x)$ ....(i)

(i) নং $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই, $1 = A\left(1-\frac{1}{3}.3\right) + B\left(1-4.\frac{1}{3}\right)$

বা, $1 = A(1-1) + B\left(\frac{3-4}{3}\right)$

বা, $1 = 0 - \frac{B}{3}$ বা, $1 = \frac{-B}{3}$

∴ $B = -3$

আবার, (i) নং এ $x = \frac{1}{4}$ বসিয়ে পাই, $1 = A\left(1-3.\frac{1}{4}\right) + B\left(1-4.\frac{1}{4}\right)$

বা, $1 = A\left(\frac{4-3}{4}\right) + B(1-1)$

বা, $1 = A\frac{1}{4} + 0$ ∴ $A = 4$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $\frac{1}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{4}{1-4x} + \frac{-3}{1-3x}$

$= \frac{4}{1-4x} - \frac{3}{1-3x} = 4(1-4x)^{-1} - 3(1-3x)^{-1}$

$= 4\{1+4x+(4x)^2+...+(4x)^n\} - 3\{1+3x+(3x)^2+...+(3x)^n\}$

∴ x^n এর সহগ $= 4.4^n - 3.3^n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$

∴ x^{10} এর সহগ $= 4^{10+1} - 3^{10+1} = 4^{11} - 3^{11} = 4017157$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৭ $P = \left(1-\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$, $Q = \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

[নারায়ণগঞ্জ সরকারি মহিলা কলেজ, নারায়ণগঞ্জ]

ক. $(1-x)^4(1+x)^3$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $x < 6$ হলে, p কে x এর ঊর্ধ্বক্রমিক ধারায় পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করে দেখাও যে, $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}$ .... $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ ৪

গ. Q এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1-x)^4(1+x)^3$

$= (1-x)^3(1+x)^3(1-x)$

$= (1-x^2)^3(1-x) = (1-x)(1-3x^2+3x^4-x^6)$

∴ x^4 এর সহগ = 3 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \left(1-\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$ এবং $x < 6$

∴ প্রদত্ত রাশি $= \left(1-\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{6}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x}{6}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(-\frac{x}{6}\right)^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\left(-\frac{x}{6}\right)^4 + ...$

$= 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{6} - \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{2!}.\frac{x^2}{6^2} - \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{3!}.\frac{x^3}{6^3} - \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{4!}.\frac{x^4}{6^4} - ......$

∴ $\left(1-\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{6}.\frac{x}{2} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}.\frac{x^3}{2^3} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}.\frac{5}{24}.\frac{x^4}{2^4} -$ .... **(Ans.)**

$x = 2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$\left(1-\frac{2}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18} - ......$

∴ $\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18} - ......$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $Q = \frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{5x-7}{x^2-2x-x+2} = \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$

এখন, $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{5-7}{(x-1)(1-2)} + \frac{10-7}{(x-2)(2-1)}$

[Cover-up Rule এর সাহায্যে]

$= \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$

$= \frac{2}{-(1-x)} + \frac{3}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)}$

$= -2(1-x)^{-1} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}$

এখন, $-2(1-x)^{-1} = -2(1+x+x^2+ ...... + x^n + ...)$

∴ x^n এর সহগ $= -2$

এবং $-\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+ ...... + \frac{x^n}{2^n} + ...\right)$

x^n এর সহগ $= -\frac{3}{2}.\frac{1}{2^n} = \frac{-3}{2^{n+1}}$

∴ $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ

$= -2 - \frac{3}{2^{n+1}} = -\left(2+\frac{3}{2^{n+1}}\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৮ $(p-3x)^k$ একটি দ্বিপদী রাশি।

[রাজেন্দ্রপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, গাজীপুর]

ক. $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে q, $\frac{-21}{2}qx$ ও $\frac{189}{4}qx^2$ হলে p, q ও k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $p = 1$ ও $k = -\frac{1}{2}$ হয় তবে দেখাও যে, উদ্দীপকের দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^6$

এখানে, $n = 6$, যা জোড় সংখ্যা হওয়ায় মধ্যপদ একটি।

মধ্যপদ হলো $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ বা, $\frac{6}{2}+1 = 4$ তম পদ

আমরা জানি, $(3+1)$ তম পদ $= {}^6C_3(x^2)^{6-3}\left(\frac{1}{x^3}\right)^3$

$= {}^6C_3\, x^6 . \frac{1}{x^9}$

$= {}^6C_3\, x^{-3} = \frac{20}{x^3}$ **(Ans.)**

খ $(p-3x)^k = p^k + k.p^{k-1}.(-3x) + \frac{k(k-1)}{2}.p^{k-2}(-3x)^2 + ...$

∴ $(k-3x)^k = p^k - 3kp^{k-1}.x + 9\frac{k(k-1)}{2}p^{k-2}x^2 - .....$

শর্তমতে, $p^k = q$ .... (i)

এবং $-3kp^{k-1}.x = -\frac{21}{2}qx$

বা, $k.p^k.p^{-1} = \frac{7}{2}q$

বা, $k.q.\frac{1}{p} = \frac{7}{2}q$

∴ $k = \frac{7}{2}p$ .... (ii)

এবং $\frac{9k(k-1)}{2}p^{k-2}.x^2 = \frac{189}{4}qx^2$

বা, $k(k-1)p^k.p^{-2} = \frac{21}{2}q$

বা, $k(k-1)q.\frac{1}{p^2} = \frac{21}{2}q$

বা, $k(k-1).\frac{1}{p^2} = \frac{21}{2}$

বা, $\frac{7p}{2}\left(\frac{7p}{2}-1\right).\frac{1}{p^2} = \frac{21}{2}$

বা, $\frac{7p-2}{2}\cdot\frac{1}{p}=3$

বা, $7p-2=6p \therefore p=2$

(ii) নং এ p এর মান বসিয়ে পাই, $k=\frac{7}{2}\times 2 \quad \therefore k=7$

(i) নং এ p ও k এর মান বসিয়ে পাই, $q=2^7=128$

Ans. $p=2, q=128, k=7$

গ উদ্দীপক থেকে পাই, $(p-3x)^k$

$p=1$ এবং $k=-\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই, $(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$

এখন, $(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে

$(n+1)$ তম পদ $=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-3x)^n$

$=\frac{(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots\left(n-1+\frac{1}{2}\right)}{n!}(-1)^n\cdot 3^n x^n$

$=\frac{(-1)^{2n}\,1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)}{2^n.n!}\cdot 3^n x^n$

$=\frac{\{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots\ldots(2n-1)\}\{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots\ldots2n\}}{2^n.n!\{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots\ldots2n\}}\cdot 3^n x^n$

$=\frac{\{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots\ldots2n\}}{n!\,2^n\cdot2^n(1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n)}\cdot 3^n x^n$

$=\frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}.n!}\cdot 3^n x^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n x^n$

$\therefore P=1$ ও $k=-\frac{1}{2}$ হলে x^n এর সহগ $=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২৯ $x^2+kx-6k=0$ ও $x^2-2x-k=0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং $(a+3x)^n$ একটি রাশি। *[আবদুল কাদির মোল্লা সিটি কলেজ, নরসিংদী]*

ক. $y=x+x^2+x^3+\ldots\infty$ হলে, দেখাও যে, $x=y-y^2+y^3-y^4+\ldots\infty$. ২

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. রাশিটির বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে b, $\frac{21}{2}bx$ ও $\frac{189}{4}bx^2$ হলে, a, b ও n এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২১(ক) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৫

খ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়,

$x^2+kx-6k=0$

$x^2-2x-k=0$

যদি সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকে তবে মনে করি তা α, তাহলে α দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হবে।

অর্থাৎ $\alpha^2+k\alpha-6k=0 \ldots\ldots$ (i)

$\alpha^2-2\alpha-k=0 \quad \ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই,

$\frac{\alpha^2}{-k^2-12k}=\frac{\alpha}{-6k+k}=\frac{1}{-2-k}$

বা, $\frac{\alpha^2}{-k(k+12)}=\frac{\alpha}{-5k}=\frac{1}{-(2+k)}$

$\therefore \quad \alpha=\frac{k(k+12)}{5k};\ \alpha=\frac{5k}{2+k}$

অর্থাৎ, $\frac{k(k+12)}{5k}=\frac{5k}{2+k}$

বা, $k(k+12)(k+2)=25k^2$

বা, $k(k+12)(k+2)-25k^2=0$

বা, $k\{(k+12)(k+2)-25k\}=0$

বা, $k(k^2-11k+24)=0$

বা, $k(k^2-8k-3k+24)=0$

বা, $k(k-8)(k-3)=0$

$\therefore \quad k=0, 8, 3$

$\therefore \quad$ k এর মানগুলো: 0, 3, 8. **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ২১(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৩০ $A=(1+x)^m$

$27x^2+6x-(p+2)=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। *[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]*

ক. $(2x+y)^5$ দ্বিপদী রাশিটি বিস্তৃত কর। ২

খ. m = 44 হলে এবং এর বিস্তৃতিতে 21 তম ও 22 তম পদ সমান হলে x এর মান কত? ৪

গ. দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে p এর মান বের কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(2x+y)^5={}^5C_0(2x)^{5-0}(y)^0+{}^5C_1(2x)^{5-1}(y)^1+{}^5C_2(2x)^{5-2}(y)^2+{}^5C_3(2x)^{5-3}(y)^3+{}^5C_4(2x)^{5-4}(y)^4+{}^5C_5(2x)^{5-5}(y)^5$

$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A=(1+x)^m$

m = 44 হলে, $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে

21 তম পদ = (20 + 1) তম পদ = ${}^{44}C_{20}x^{20}$

22 তম পদ = (21 + 1) তম পদ = ${}^{44}C_{21}x^{21}$

প্রশ্নানুসারে, ${}^{44}C_{21}x^{21}={}^{44}C_{20}x^{20}$

বা, $\frac{44!}{21!(44-21)!}\cdot x=\frac{44!}{20!(44-20)!}$

বা, $\frac{1}{21!\,23!}\cdot x=\frac{1}{20!\,24!}$ বা, $\frac{x}{21}=\frac{1}{24}$

বা, $x=\frac{21}{24}\therefore x=\frac{7}{8}$ **(Ans.)**

গ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও α^2

তাহলে, $\alpha+\alpha^2=-\frac{6}{27}$ এবং $\alpha.\alpha^2=\alpha^3=\frac{-(p+2)}{27}\ldots\ldots\ldots$ (i)

$\therefore \quad \alpha+\alpha^2=\frac{-2}{9}$ বা, $9\alpha+9\alpha^2=-2$ বা, $9\alpha^2+9\alpha+2=0$

বা, $9\alpha^2+6\alpha+3\alpha+2=0$ বা, $3\alpha(3\alpha+2)+1(3\alpha+2)=0$ বা, $(3\alpha+2)(3\alpha+1)=0$

$\therefore \quad \alpha=-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

(i) নং এ $\alpha=-\frac{2}{3}$ বসিয়ে, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{(p+2)}{27}$

বা, $\frac{-8}{27}=-\frac{(p+2)}{27}$

বা, $p+2=8$

বা, $p=6$

আবার, (i) নং এ $\alpha=-\frac{1}{3}$ বসিয়ে, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{(p+2)}{27}$

বা, $\frac{-1}{27}=-\frac{(p+2)}{27}$

বা, $p+2=1$

বা, $p=-1$

$\therefore \quad p=6, -1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩১ দৃশ্যকল্প-১: $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$

দৃশ্যকল্প-২: $5x^2-13x+7=0$ সমীকরণের মূল দুটি α, β. *[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]*

ক. মূলদ সহগ বিশিষ্ট একটি সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $\frac{1}{3+\sqrt{2}i}$। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর বিস্তৃতিতে দেখাও যে, x^r এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে $\frac{\alpha^2}{\beta}$ এবং $\frac{\beta^2}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{1}{3+\sqrt{2}i}$, কোনো সমীকরণের একটি মূল হলে অপর মূলটি হবে $\frac{1}{3-\sqrt{2}i}$

$\therefore$ সমীকরণটি, x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল) x + মূলদ্বয়ের গুণফল = 0

বা, $x^2-\left(\frac{1}{3+\sqrt{2}i}+\frac{1}{3-\sqrt{2}i}\right)x+\frac{1}{3+\sqrt{2}i}\times\frac{1}{3-\sqrt{2}i}=0$

বা, $x^2-\frac{3-\sqrt{2}i+3+\sqrt{2}i}{9-2i^2}x+\frac{1}{9-2i^2}=0$

বা, $x^2-\frac{6}{9-2(-1)}x+\frac{1}{9-2(-1)}=0$

বা, $x^2-\frac{6}{9+2}x+\frac{1}{9+2}=0$

বা, $x^2-\frac{6}{11}x+\frac{1}{11}=0$

$\therefore \ 11x^2-6x+1=0$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৩(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ প্রদত্ত সমীকরণটি, $5x^2 - 13x + 7 = 0$

শর্তমতে, $\alpha + \beta = \frac{13}{5}$

$\alpha\beta = \frac{7}{5}$

$\therefore$ $\frac{\alpha^2}{\beta}$ ও $\frac{\beta^2}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta}\right)x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 - \left\{\frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right\}x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 - \left\{\frac{\left\{\left(\frac{13}{5}\right)^3 - 3.\frac{7}{5}.\frac{13}{5}\right\}}{\frac{7}{5}}\right\}x + \frac{7}{5} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{\frac{2197}{125} - \frac{273}{25}}{\frac{7}{5}}\right)x + \frac{7}{5} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{\frac{2197 - 1365}{125}}{\frac{7}{5}}\right)x + \frac{7}{5} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{832}{125} \times \frac{5}{7}\right)x + \frac{7}{5} = 0$

বা, $x^2 - \frac{832}{175}x + \frac{7}{5} = 0$

বা, $175x^2 - 832x + 245 = 0$

ইহাই, $\frac{\alpha^2}{\beta}$ ও $\frac{\beta^2}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩২ নিচের উদ্দীপক লক্ষ্য কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

উদ্দীপক-১: $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি যেখানে x একটি চলক এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

উদ্দীপক-২: $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

[সরকারি সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ, ফরিদপুর]

ক. নিশ্চায়ক কাকে বলে? উদ্দীপক-২ এর সমীকরণের নিশ্চায়ক কত? ২

খ. উদ্দীপক-২ এর মূল দুটি α ও β হলে $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ এর মূল দুটি α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. উদ্দীপক-১ এর বিস্তৃতিতে দেখাও যে, বিস্তৃতির মধ্যপদের মান $\frac{1.3.5 .... (2n-1)}{n!}$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **নিশ্চায়ক :** যার মান পর্যালোচনা করে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নিশ্চিতভাবে নিরূপণ করা যায় বা বিভিন্ন প্রকার মূলকে পৃথক করা যায় তাকে নিশ্চায়ক বলে।

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac$.

খ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ এর দুইটি মূল α এবং β

$\therefore$ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$

বা, $acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

বা, $\frac{c}{a}x^2 - \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ [a^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\alpha\beta x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

বা, $(\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0$

$\therefore$ $x = \frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$

$\therefore$ মূল দুইটি $\frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$ **(Ans.)**

গ $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা = (2n + 1); যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{2n}{2} + 1\right)$ তম বা (n + 1) তম পদ

$\therefore (n+1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_n x^{2n-n}.\left(\frac{1}{2x}\right)^n = \frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}.x^n.\frac{1}{2^n x^n}$

$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\cdots 4.3.2.1}{n!\,n!}.\frac{1}{2^n}$

$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6.\cdots\cdots(2n-2)2n\}}{n!\,n!}.\frac{1}{2^n}$

$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}2^n\{1.2.3.\cdots\cdots(n-1)n\}}{n!\,n!}.\frac{1}{2^n}$

$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}\,n!}{n!n!}$

$= \frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)}{n!}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৩৩ $f(x) = x^2 + px + q$, $g(x) = (1 - 5x + 6x^2)^{-1}$, $h(x) = (1 - x)^{12}$

[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]

ক. h(x) এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $f(x) = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে দেখাও যে, $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$ ৪

গ. g(x) এর বিস্তৃতিতে x^5 ও x^n সহগ নির্ণয় কর। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $h(x) = (1 - x)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা

12 + 1 = 13টি যা বিজোড় সংখ্যা

$\therefore$ বিস্তৃতিতে মধ্যপদ একটি এবং সেটি $\left(\frac{12}{2} + 1\right)$ বা, 7 তম পদ

মধ্যপদটি $= {}^{12}C_6(1)^{12-6}.(-x)^6$

$= 924(1)^6.x^6 = 924x^6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 0$

$\therefore$ $x^2 + px + q = 0$

ধরি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β

$\therefore$ $\alpha + \beta = -p$ ...... (i)

$\alpha\beta = q$ ...... (ii)

এবং প্রদত্ত শর্তানুসারে

$\alpha - \beta = \pm 1$ ...... (iii)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$(\alpha + \beta)^2 = p^2$

বা, $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = p^2$

বা, $1 + 4q = p^2$ [(ii) ও (iii) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $p^2 + 4q^2 = 1 + 4q + 4q^2$

[উভয়পক্ষে $4q^2$ (একটি ধ্রুবক) যোগ করে]

$\therefore$ $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$ **(দেখানো হলো)**

গ x^n এর সহগের জন্য

প্রদত্ত রাশি $= (1 - 5x + 6x^2)^{-1} = \{1 - 3x - 2x + 6x^2\}^{-1}$

$= \{(1 - 3x) - 2x(1 - 3x)\}^{-1}$

$= \{(1 - 3x)(1 - 2x)\}^{-1} = \frac{1}{(1 - 3x)(1 - 2x)}$

$= \frac{1}{(1 - 3x)\left(1 - \frac{2}{3}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2}\right)(1 - 2x)}$

[cover-up rule এর সাহায্যে]

$= \frac{1}{\frac{1}{3}(1 - 3x)} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)(1 - 2x)}$

$\therefore$ $\frac{1}{(1 - 3x)(1 - 2x)} = \frac{3}{1 - 3x} - \frac{2}{1 - 2x}$

$= 3(1 - 3x)^{-1} - 2(1 - 2x)^{-1}$

$= 3(1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots + 3^nx^n + \cdots\cdots) - 2(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots\cdots + 2^nx^n + \cdots\cdots)$

$\therefore$ x^n-এর সহগ $= 3.3^n - 2.2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

সুতরাং, x^n এর সহগ $3^{n+1} - 2^{n+1}$ **(Ans.)**

x^5 এর সহগের জন্য n = 5 ব্যবহার করে।

x^5 এর সহগ $= 3^{5+1} - 2^{5+1} = 665$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৪ দৃশ্যকল্প-১: $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ একটি দ্বিপদী রাশি।

দৃশ্যকল্প-২: $P=(1-9x+20x^2)^{-1}$ *[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]*

ক. $\left(2x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, বিস্তৃতির x বর্জিত পদ $=\frac{1.3.5\ .....\ (2n-1)}{n!}(-2)^n, [n\in N]$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে P এর জন্য প্রমাণ কর যে, x^n এর সহগ : $5^{n+1}-4^{n+1}$ ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(2x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে

$(r+1)$ তম পদ $={}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r={}^{10}C_r.2^{10-r}.x^{20-2r}.(-1)^r$

$.2^{-r}.x^{-3r}=(-1)^r\,{}^{10}C_r.\,2^{10-2r}.\,x^{20-5r}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত সুতরাং $20-5r=0$ ∴ $r=4$

$(4+1)$ তম $=$ ৫তম পদ $=(-1)^4\,{}^{10}C_4\,2^2.x^0={}^{10}C_4\times2^2=4.\frac{10.9.8.7}{4.3.2}$

$=4.210=840$

∴ x বর্জিত পদটির মান $=840$

Ans. 5 তম পদ এবং 840

খ সৃজনশীল ১৫(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

গ দেওয়া আছে, $P=(1-9x+20x^2)^{-1}$

$=\frac{1}{20x^2-9x+1}=\frac{1}{20x^2-4x-5x+1}$

$=\frac{1}{4x(5x-1)-1(5x-1)}=\frac{1}{(4x-1)(5x-1)}$

ধরি, $\frac{1}{(4x-1)(5x-1)}\equiv\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{5x-1}$

$(4x-1)(5x-1)$ দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে পাই,

$1\equiv A(5x-1)+B(4x-1)$

$x=\frac{1}{5}$ হলে, $1=A\left(5\times\frac{1}{5}-1\right)+B\left(\frac{4}{5}-1\right)$

বা, $1=A\times0+B\left(-\frac{1}{5}\right)$ ∴ $B=-5$

$x=\frac{1}{4}$ হলে, $1=A\left(\frac{5}{4}-1\right)+B\left(4\times\frac{1}{4}-1\right)$

বা, $1=A\times\frac{1}{4}+B\times0$

∴ $A=4$

∴ $\frac{1}{(4x-1)(5x-1)}=\frac{4}{4x-1}-\frac{5}{5x-1}$

$=\frac{4}{-(1-4x)}-\frac{5}{-(1-5x)}$

$=\frac{5}{1-5x}-\frac{4}{1-4x}$

$=5(1-5x)^{-1}-4(1-4x)^{-1}$

$=5\{1+5x+25x^2+\ldots\ldots+5^r.x^r+\ldots\ldots\}-4\{1+4x+16x^2+\ldots\ldots+4^r.x^r+\ldots\ldots\}$

∴ x^n এর সহগ $=5.5^n-4.4^n=5^{n+1}-4^{n+1}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৩৫ $g(x)=(1+x)^p\left(1+\frac{1}{x}\right)^q$ এবং $f(x)=2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots\infty$ *[রাজশাহী কলেজ, রাজশাহী]*

ক. $\left(1-\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিটি x এর কোন মানের জন্য অভিসারী? ২

খ. $q=p$ হলে দেখাও যে, $g(x)$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি $\frac{(2p-1)\ldots\ldots5.3.1}{p!}2^p$ ৪

গ. উদ্দীপকের ২য় বিস্তৃতি হতে দেখাও যে,

$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3-\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$ ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(1-\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ দ্বিপদীটির বিস্তৃতি অভিসারী হবে যদি $\left|\frac{2x}{3}\right|<1$

বা, $-1<\frac{2x}{3}<1$ ∴ $-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$g(x)=(1+x)^p\left(1+\frac{1}{x}\right)^p$

$=(1+x)^p\left(\frac{x+1}{x}\right)^p$

$=\frac{(1+x)^{2p}}{x^p}$ [∵ $q=p$]

বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $(2p+1)$, যা বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি এবং মধ্য পদটি $\left(\frac{2p}{2}+1\right)$ বা, $(p+1)$ তম পদ।

$(p+1)$ তম পদ $=\frac{{}^{2p}C_p.x^p}{x^p}$

$={}^{2p}C_p=\frac{(2p)!}{p!(2p-p)!}$

$=\frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ \ldots\ldots\ 4.3.2.1}{p!p!}$

$=\frac{\{1.3.5\ldots..(2p-3)(2p-1)\}\{2.4.6\ldots.(2p-2)2p\}}{p!\,p!}$

$=\frac{\{1.3.5\ldots..(2p-1)\}\,2^p\{1.2.3.\ \ldots..\ (p-1)p\}}{p!\,p!}$

$=\frac{1.3.5\ldots..(2p-1)\,2^p.p!}{p!\,p!}$

$=\frac{1.3.5\ldots..(2p-1)}{p!}2^p$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$f(x)=2x+3x^2+4x^3+\ldots..+(n+1)x^n+\ldots..$

ধরি, $f(x)=y$

∴ $y=2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$

বা, $1+y=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$

বা, $1+y=(1-x)^{-2}$

বা, $1+y=\frac{1}{(1-x)^2}$

বা, $(1-x)^2=\frac{1}{1+y}$

বা, $(1-x)^2=(1+y)^{-1}$

বা, $1-x=(1+y)^{-\frac{1}{2}}$

বা, $1-x=1-\frac{1}{2}y+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3+\ldots\infty$

বা, $1-x=1-\frac{1}{2}y+\frac{1.3}{4.2}y^2-\frac{1.3.5}{8.6}y^3+\ \ldots\ \ldots\infty$

বা, $1-x=1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2-\frac{5}{16}y^3+\ldots\ \ldots\infty$

বা, $-x=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2-\frac{5}{16}y^3+\ldots\ldots\infty$

বা, $f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\ldots.\ \ldots\infty$

এখন y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

∴ $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3-\ldots\ \ldots\infty$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৩৬ $P=1-3x,\ Q=1-4x$ *[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]*

ক. P^{22} এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. $(PQ)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\sqrt{Q}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P=1-3x$

∴ $P^{22}=(1-3x)^{22}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $22+1=23$, যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং বিস্তৃতিতে একটি মধ্যপদ আছে, অর্থাৎ $\left(\frac{22}{2}+1\right)$ বা, 12 তম পদ

∴ মধ্যপদ $={}^{22}C_{11}(-3x)^{11}$

$={}^{22}C_{11}(-1)^{11}3^{11}.x^{11}$

$=-{}^{22}C_{11}3^{11}x^{11}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = 1 - 3x, Q = 1 - 4x$

এখন, $(PQ)^{-1} = \{(1-3x)(1-4x)\}^{-1}$

$= \frac{1}{(1-3x)(1-4x)}$

মনে করি, $\frac{1}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-3x}$

বা, $1 = A(1-3x) + B(1-4x)$ ....(i)

(i) নং $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$1 = A\left(1 - \frac{1}{3}.3\right) + B\left(1 - 4.\frac{1}{3}\right)$

বা, $1 = A(1-1) + B\left(\frac{3-4}{3}\right)$

বা, $1 = 0 - \frac{B}{3}$ বা, $1 = \frac{-B}{3}$

$\therefore B = -3$

আবার, (i) নং এ $x = \frac{1}{4}$ বসিয়ে পাই,

$1 = A\left(1 - 3.\frac{1}{4}\right) + B\left(1 - 4.\frac{1}{4}\right)$

বা, $1 = A\left(\frac{4-3}{4}\right) + B(1-1)$

বা, $1 = A\frac{1}{4} + 0 \quad \therefore A = 4$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$\frac{1}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{4}{1-4x} + \frac{-3}{1-3x}$

$= \frac{4}{1-4x} - \frac{3}{1-3x} = 4(1-4x)^{-1} - 3(1-3x)^{-1}$

$= 4\{1 + 4x + (4x)^2 + ... + (4x)^r\} - 3\{1 + 3x + (3x)^2 + ... + (3x)^r\}$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= 4.4^r - 3.3^r = 4^{r+1} - 3^{r+1}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

প্রশ্ন ▶ ৩৭ i. $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$ এবং ii. $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ *[রাণীভবানী সরকারী মহিলা কলেজ, নাটোর]*

ক. প্রমাণ কর যে, দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার গুণফল বাস্তব সংখ্যা। ২

খ. i নং এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ ৪

গ. ii নং এর বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদের মান বের কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ এবং $\bar{z} = x - iy$

$\therefore$ দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার গুণফল, $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$

$= x^2 - (iy)^2$

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 - (-1)y^2$ $[\because i^2 = -1]$

$= x^2 + y^2$ যা একটি বাস্তব সংখ্যা। **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

অর্থাৎ, $a + ib = (x + iy)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

এখন, বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, ডানপক্ষ $= \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

$= \frac{x^3 - 3xy^2}{x} + \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$= \frac{x(x^2 - 3y^2)}{x} + \frac{y(3x^2 - y^2)}{y}$

$= x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2$

$= 4(x^2 - y^2)$

= বামপক্ষ

$\therefore 4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদটি x বর্জিত অর্থাৎ ধ্রুবক পদ।

$\therefore (r + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r(2x)^{10-r}\left(\frac{1}{6x}\right)^r$

$= {}^{10}C_r.2^{10-r}.x^{10-r}.6^{-r}.x^{-r}$

$= {}^{10}C_r.2^{10-r}.6^{-r}.x^{10-2r}$

$\therefore 10 - 2r = 0$

বা, $2r = 10$

$\therefore r = 5$

$\therefore (5 + 1)$ বা 6 তম পদটি ধ্রুবক পদ এবং এর মান $= {}^{10}C_5.2^{10-5}.6^{-5}$

$= \frac{252 \times 32}{7776} = \frac{28}{27}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৮ উদ্দীপক: $f(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{15}$ *[কারমাইকেল কলেজ, রংপুর]*

ক. $\left(4x + \frac{1}{3}\right)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুটি সমান হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\left(4x + \frac{1}{3}\right)^4$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদে x^2 এর সহগ বিদ্যমান।

$(r + 1)$ তম পদ $= {}^4C_r\left(\frac{1}{3}\right)^{4-r}.(4x)^r$

$= {}^4C_r . \frac{1}{(3)^{4-r}} . 4^r . x^r$

$= {}^4C_r 3^{r-4} . 4^r . x^r$

যেহেতু পদটিতে x^2 আছে। সুতরাং $r = 2$

$\therefore$ x^2 এর সহগ $= {}^4C_2 3^{2-4} . 4^2$

$= \frac{6 \times 16}{9} = \frac{32}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{15}$

মনে করি, প্রদত্ত দ্বিপদী এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদটি x বর্জিত।

$(r + 1)$ তম পদ $= {}^{15}C_r(2x)^{15-r}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$

$= {}^{15}C_r 2^{15-r}.x^{15-r}.x^{-2r}$

$= {}^{15}C_r . 2^{15-r} . x^{15-3r}$

যেহেতু, পদটি x বর্জিত, পদটিতে x^0 আছে।

সুতরাং, $15 - 3r = 0 \quad \therefore r = 5$

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $= {}^{15}C_5 2^{15-5} = {}^{15}C_5 2^{10}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{15}$

এখানে, $n = 15$, যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং, মধ্যপদ দুইটি। একটি হল $\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)$ এবং অপরটি $\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)$

সুতরাং মধ্যপদ দুইটি হল $= \left(\frac{15-1}{2} + 1\right) = 8$ তম পদ এবং

$\left(\frac{15+1}{2} + 1\right) = 9$ তম পদ

8 তম পদ $= (7 + 1)$ তম পদ $= {}^{15}C_7(2x)^{15-7}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^7$

9 তম পদ $= (8 + 1)$ তম পদ $= {}^{15}C_8(2x)^{15-8}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^8$

শর্তানুযায়ী, ${}^{15}C_7(2x)^{15-7}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^7 = {}^{15}C_8(2x)^{15-8}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^8$

বা, ${}^{15}C_7 2^{15-7}.x^{-14+15-7} = {}^{15}C_8 2^7.x^{7-16}$

বা, ${}^{15}C_7 2^8 x^{-6} = {}^{15}C_8 . 2^7.x^{-9}$

বা, $\frac{15!}{8!\,7!} \times 2 \times x^{-6+9} = \frac{15!}{8! \times 7!}$

বা, $x^3 \times 2 = 1$

$\therefore x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৯ $(a + 3x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে $b, \frac{21}{2}bx$ এবং $\frac{189}{4}bx^2$। *[আহম্মদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]*

ক. প্রদত্ত তথ্যের ভিত্তিতে সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. a, b এবং n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. বিস্তৃতিটির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২১(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৫

খ সৃজনশীল ২১(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৫

গ 'খ' হতে পাই, $a = 2, b = 128$ এবং $n = 7$

এখন, $(2 + 3x)^7$ দ্বিপদীটির মধ্যপদ বের করতে হবে।

$n = 7$ হওয়ায় দ্বিপদীটির পদসংখ্যা হবে $(n + 1)$ বা ৪টি যা জোড় সংখ্যা

∴ মধ্যপদ হবে দুইটি এবং

মধ্যপদ দুটি হবে $\left(\frac{7-1}{2}+1\right) = 4$ তম পদ

এবং $\left(\frac{7+1}{2}+1\right) = 5$ তম পদ

∴ 4 তম পদ $= (3 + 1)$ তম পদ $= {}^7C_3 . 2^{7-3} (3x)^3$
$= 15120x^3$ **(Ans.)**

এবং 5 তম পদ $= (4 + 1)$ তম পদ $= {}^7C_4 (2)^{7-4} (3x)^4$
$= 22680x^4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪০ (i) $(1 + 4x)^p . \left(1+\frac{1}{4x}\right)^q$ (ii) $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$. *[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]*

ক. $\left(\frac{k}{2}+2\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান 1120 হলে, k এর বাস্তব মান নির্ণয় কর। ২

খ. (i) এর রাশিটির বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদটির মান বের কর; যেখানে p ও q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। ৪

গ. (ii) এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(\frac{k}{2}+2\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= 8 + 1 = 9$; যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম বা 5 তম পদ।

∴ 5 তম পদ $= {}^8C_4 . \left(\frac{k}{2}\right)^{8-4} . 2^4$

প্রশ্নানুসারে, ${}^8C_4 \left(\frac{k}{2}\right)^4 . 2^4 = 1120$

বা, $70. \frac{k^4}{2^4} . 2^4 = 1120$

বা, $k^4 = 16$

বা, $k^2 = 4 \therefore k = \pm 2$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত রাশি $= (1 + 4x)^p \left(1+\frac{1}{4x}\right)^q = (1 + 4x)^p \left(\frac{1+4x}{4x}\right)^q$

$= (4x)^{-q} (1 + 4x)^{p+q} = \frac{1}{x^q} . 4^{-q} (1 + 4x)^{p+q}$

∴ $(1 + 4x)^p \left(1+\frac{1}{4x}\right)^q$ এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদটি x^q এর সহগ।

মনে করি, পদটি $4^{-q}(1 + 4x)^{p+q}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদে x^q আছে।

∴ $(r + 1)$ তম পদ $= 4^{-q} . {}^{p+q}C_r (4x)^r = 4^{r-q} . {}^{p+q}C_r x^r$

যেহেতু $(r + 1)$ তম পদটিতে x^q আছে, ∴ $r = q$

∴ $(q + 1)$ তম পদ $= {}^{p+q}C_q 4^{q-q} = {}^{p+q}C_q 4^0 = {}^{p+q}C_q$ **(Ans.)**

গ $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \cdots \left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-2x)^r$$

$$= \frac{(-1)^r \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right) \cdots \cdots \left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{r!}(-1)^r . 2^r . x^r$$

$$= (-1)^{2r} . \frac{1.3.5.7 \cdots \cdots (2r-1)}{2^r . r!} . 2^r . x^r$$

$$= \frac{\{1.3.5.7 \cdots \cdots (2r-1)\}\{2.4.6.8 \cdots \cdots 2r\}}{r!(2.4.6 \cdots \cdots 2r)} x^r$$

$$= \frac{1.2.3.4 \cdots \cdots 2r}{r!\, 2^r(1.2.3 \cdots \cdots r)} x^r = \frac{(2r)!}{2^r . r! . r!} x^r = \frac{(2r)!}{2^r (r!)^2} x^r$$

∴ $(r + 1)$ তম পদের সহগ $= \frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}$

∴ x^{10} এর সহগ $= \frac{(2 \times 10)!}{2^{10}(10!)^2} = \frac{46189}{256}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪১ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = 27x^2 + 6x - (p + 2)$

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = (a + 3x)^n$ *[চাঁদপুর সরকারি মহিলা কলেজ, চাঁদপুর]*

ক. $3x^2 + 2x - 7 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গের সমান হলে p এর মান কত? ৪

গ. $g(x)$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে $b, \frac{21}{2}bx, \frac{189}{4}bx^2$ হলে a, b, n এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3x^2 + 2x - 7 = 0$

নিশ্চায়ক, $D = (2)^2 - 4.3.(-7)$
$= 4 + 84 = 88 > 0$

$D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ না হওয়ায় সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

খ সৃজনশীল ৩০(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৮

গ সৃজনশীল ২১(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৫

প্রশ্ন ▶ ৪২ $f(x) = \left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$; $g(x) = \left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ *[চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ল্যাবরেটরী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. $(x^2 - y^3)^7$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(x^2 - y^3)^7 = (x^2)^7 + {}^7C_1(x^2)^{7-1}(-y^3)^1 + {}^7C_2(x^2)^{7-2} . (-y^3)^2 + {}^7C_3(x^2)^{7-3} . (-y^3)^3 + {}^7C_4(x^2)^{7-4}(-y^3)^4 + {}^7C_5(x^2)^{7-5} . (-y^3)^5 + {}^7C_6(x^2)^{7-6} . (-y^3)^6 + (-y^3)^7$

$= x^{14} + 7x^{12} . (-y^3) + 21x^{10} . y^6 + 35x^8 . (-y^9) + 35x^6 . y^{12} + 21x^4(-y^{15}) + 7x^2 . y^{18} - y^{21}$

$= x^{14} - 7x^{12}y^3 + 21x^{10}y^6 - 35x^8y^9 + 35x^6 . y^{12} - 21x^4y^{15} + 7x^2y^{18} - y^{21}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$

মনে করি, $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ x বর্জিত অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

∴ $(r + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r(2x)^{10-r} . \left(\frac{1}{6x}\right)^r = {}^{10}C_r 2^{10-r} . x^{10-r} . 6^{-r} . x^{-r}$
$= {}^{10}C_r . 2^{10-r} . (3.2)^{-r} . x^{10-2r} = {}^{10}C_r 2^{10-2r} . 3^{-r} . x^{10-2r}$

যেহেতু, পদটিতে x^0 আছে। সুতরাং $10 - 2r = 0$ বা, $2r = 10$ ∴ $r = 5$

∴ x বর্জিত $(5 + 1)$ তম পদের মান

$= {}^{10}C_5 2^{10-10} . 3^{-5} = \frac{10.9.7.8.6}{1.2.3.4.5} . \frac{1}{3^5} = \frac{28.9}{9.27} = \frac{28}{27}$

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$

মনে করি, $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদে x^{18} বিদ্যমান।

তাহলে, $(r + 1)$ তম পদ $= {}^{15}C_r(x^2)^{15-r}\left(\frac{3a}{x}\right)^r$
$= {}^{15}C_r x^{30-2r} . (3a)^r . x^{-r}$
$= {}^{15}C_r(3a)^r . x^{30-3r}$

যেহেতু পদটিতে x^{18} আছে,

সুতরাং $30 - 3r = 18$ বা, $3r = 12$ ∴ $r = 4$

$(4 + 1)$ তম পদ $= {}^{15}C_4 (3a)^4 x^{30-3.4} = {}^{15}C_4 (3a)^4 x^{18}$

∴ x^{18} এর সহগ $= {}^{15}C_4(3a)^4 = 110565a^4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৩ দৃশ্যকল্প-১: $A = mx^2 + nx + c, B = cx^2 + nx + m$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = ax^2 + bx + c$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. $f(x) = 0$ সমীকরণটিকে সমাধান কর। ২

খ. $A = 0$ সমীকরণের একটি মূল, $B = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $2m = c$ অথবা $(2m + c)^2 = 2n^2$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২: $\{f(x)\}^7$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর।

$\left(\text{যখন } a = 4, b = -\frac{4}{5x}, c = \frac{1}{25x^2}\right)$ ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

এখন, $f(x) = 0$

বা, $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ [উভয় পক্ষকে 4a দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2ax)^2 + 2(2ax).b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$

বা, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ বা, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

বা, $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\therefore\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

খ দেওয়া আছে, $mx^2 + nx + c = 0$ .... (i)

m ও c এর অবস্থান বিনিময় করলে,

$cx^2 + nx + m = 0$ .... (ii)

ধরি, (ii) নং সমীকরণের একটি মূল α

সুতরাং, (i) নং সমীকরণের একটি মূল 2α

(i) ও (ii) হতে পাই,

$4m\alpha^2 + 2n\alpha + c = 0$

$c\alpha^2 + n\alpha + m = 0$

বজ্রগুণন সূত্রানুসারে, $\frac{\alpha^2}{2mn - cn} = \frac{\alpha}{c^2 - 4m^2} = \frac{1}{4mn - 2nc}$

বা, $\frac{\alpha^2}{n(2m - c)} = \frac{\alpha}{(c + 2m)(c - 2m)} = \frac{1}{2n(2m - c)}$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে, $\frac{\alpha^2}{n(2m - c)} = \frac{\alpha}{(c + 2m)(c - 2m)}$

বা, $\alpha = \frac{n(2m - c)}{(c + 2m)(c - 2m)}$

২য় ও ৩য় অনুপাত হতে, $\frac{\alpha}{(c + 2m)(c - 2m)} = \frac{1}{2n(2m - c)}$

$\alpha = \frac{(c + 2m)(c - 2m)}{2n(2m - c)}$

সুতরাং $\frac{n(2m - c)}{(c + 2m)(c - 2m)} = \frac{(c + 2m)(c - 2m)}{2n(2m - c)}$

বা, $2n^2(2m - c)^2 = (c + 2m)^2(c - 2m)^2$

বা, $2n^2(c - 2m)^2 - (c + 2m)^2(c - 2m)^2 = 0$

বা, $(c - 2m)^2\{2n^2 - (c + 2m)^2\} = 0$

হয়, $(c - 2m)^2 = 0$ অথবা, $2n^2 - (c + 2m)^2 = 0$

$\therefore\ c = 2m$ বা, $2n^2 = (c + 2m)^2$

$\therefore\ (2m + c)^2 = 2n^2$

$\therefore$ $2m = c$ অথবা $(2m + c)^2 = 2n^2$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

যখন, $a = 4, b = -\frac{4}{5x}$ এবং $c = \frac{1}{25x^2}$

তখন, $f(x) = 4x^2 - \frac{4}{5x}.x + \frac{1}{25x^2}$

$= 4x^2 - \frac{4}{5} + \frac{1}{25x^2}$

$= \left(2x - \frac{1}{5x}\right)^2$

$\therefore\ \{f(x)\}^7 = \left(2x - \frac{1}{5x}\right)^{14}$

মনে করি, $\left(2x - \frac{1}{5x}\right)^{14}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদটি x বর্জিত।

এখন, (r + 1) তম পদ $= {}^{14}C_r (2x)^{14-r}\left(-\frac{1}{5x}\right)^r$

$= {}^{14}C_r\, 2^{14-r}.\left(-\frac{1}{5}\right)^r.x^{14-2r}$

যেহেতু পদটি x-বর্জিত

$\therefore\ x^{14-2r} = x^0$

বা, $14 - 2r = 0$

বা, $2r = 14$

$\therefore\ r = 7$

$\therefore$ x বর্জিত পদ বা (7 + 1) তম পদ $= {}^{14}C_7\, 2^{14-7}.\left(-\frac{1}{5}\right)^7$

$= -\frac{2^7}{5^7}.{}^{14}C_7$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৪ (i) $\frac{1}{m - x} = \frac{1}{n} - \frac{1}{x}$ (ii) $f(x) = x^n$

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং এ উল্লেখিত সমীকরণে মূলদ্বয়ের অন্তর P হলে m কে n এবং P এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. n = 44 হলে f(1 + P) এর বিস্তৃতিতে 21 তম এবং 22 তম পদদ্বয় পরস্পর সমান হলে P এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা = 18 + 1 = 19

যা বিজোড় সংখ্যা সুতরাং এর মধ্যপদ একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{18}{2} + 1\right)$ তম বা (9 + 1) তম পদ

$\therefore$ (9 + 1) তম পদ $= {}^{18}C_9\, x^9.\left(-\frac{1}{x}\right)^9 = -48620$

খ দেওয়া আছে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{m - x} = \frac{1}{n}$

বা, $\frac{m - x + x}{x(m - x)} = \frac{1}{n}$

বা, $\frac{m}{x(m - x)} = \frac{1}{n}$

বা, $x(m - x) = mn$

বা, $mx - x^2 = mn$

$\therefore\ x^2 - mx + mn = 0$ ... ... (i)

মনেকরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

$\therefore\ \alpha + \beta = m$

এবং $\alpha\beta = mn$

প্রশ্নানুসারে, $\alpha - \beta = \pm p$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = p^2$

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = P^2$

বা, $m^2 - 4mn = p^2$

বা, $m^2 - 2.m.2n + (2n)^2 - 4n^2 = p^2$

বা, $(m - 2n)^2 = p^2 + 4n^2$

বা, $m - 2n = \pm\sqrt{p^2 + 4n^2}$

$\therefore\ m = 2n \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ৩০(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৮

প্রশ্ন ▶ ৪৫ $f(x) = (1 - 3x)^{\frac{1}{3}}, g(x) = (a + 3x)^n$ *[সরকারী সিটি কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. $(1 - 5x + 6x^2)^{-1}$ বিস্তৃতিটি নির্ণয় কর। ২

খ. f(x) বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. g(x) বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে b, $\frac{21}{2}$ bx ও $\frac{189}{4}$ bx^2 হলে b এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1-5x+6x^2)^{-1} = (1-3x-2x+6x^2)^{-1}$

$=\{(1-3x)-2x(1-3x)\}^{-1}$

$=\{(1-3x)(1-2x)\}^{-1}$

$=(1-3x)^{-1}(1-2x)^{-1}$

$=\{1+3x+(3x)^2+(3x)^3+......\}\{1+2x+(2x)^2+(2x)^3+......\}$

$=\{1+3x+9x^2+27x^3+......\}\{1+2x+4x^2+8x^3+......\}$

$=1+2x+4x^2+8x^3+3x+6x^2+12x^3+9x^2+18x^3+27x^3+....$

$=1+5x+19x^2+65x^3+......$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x)=(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$

$(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ

$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)......\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-3x)^r$

$=\frac{(-1)^r\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)......\left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{r!}(-1)^r.3^r.x^r$

$=(-1)^{2r}\frac{1.3.5.7.....(2r-1)}{2^r.r!}.3^r.x^r$

$=\frac{\{1.3.5.7......(2r-1)\}\{2.4.6......2r\}}{r!(2.4.6......2r)}\left(\frac{3}{2}\right)^r x^r$

$=\frac{1.2.3.4......2r}{r!.2^r(1.2.3......r)}\left(\frac{3}{2}\right)^r.x^r$

$=\frac{(2r)!}{r!.r!}.\left(\frac{3}{4}\right)^r.x^r$

$=\frac{(2r)!}{(r!)^2}.\left(\frac{3}{4}\right)^r.x^r$

∴ x^r এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}.\left(\frac{3}{4}\right)^r$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ২১(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৬ $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]

ক. $(x+a)^5$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতি করো। ২

খ. উদ্দীপকে n = 6 হলে বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদের মান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের বিস্তৃতি হতে প্রমাণ কর যে, বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.3.5......(2n-1)}{n!}(-2)^n$ [যেখানে n ∈ Z] ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক n = 5 এর জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজটি নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায়।

n=0   1
n=1   1   1
n=2   1   2   1
n=3   1   3   3   1
n=4   1   4   6   4   1
n=5   1   5   10   10   5   1

∴ $(a+x)^5=a^5+5a^4x+10a^3x^2+10a^2x^3+5ax^4+x^5$ **(Ans.)**

খ $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^n$

n = 6 হলে $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^n=\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6$

প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $=\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6=\left\{(x)^2-2.x.\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6$

$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$

মনে করি, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ x-বর্জিত অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

এখন, (r + 1) তম পদ $={}^{12}C_r\,x^{12-r}.\left(\frac{-1}{x}\right)^r={}^{12}C_r\,x^{12-r}.(-1)^r.x^{-r}=(-1)^r.{}^{12}C_r\,x^{12-2r}$

যেহেতু পদটিতে x^0 আছে,

সুতরাং 12 − 2r = 0 বা, 2r = 12 ∴ r = 6

∴ x বর্জিত পদ অর্থাৎ (6 + 1)তম পদের মান $=(-1)^6\,{}^{12}C_6$

$={}^{12}C_6=924$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত রাশিটি $=\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^n=\left\{x^2-2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right\}^n$

$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}^n=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$

∴ বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা = 2n + 1, যা বিজোড় সংখ্যা

∴ মধ্যপদটি হবে $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ বা (n + 1) তম পদ

এখন, (n + 1) তম পদ $=(-1)^n.{}^{2n}C_n=(-1)^n.\frac{(2n)!}{(2n-n)!n!}$

$=(-1)^n.\frac{2n.(2n-1)(2n-2)(2n-3)...4.3.2.1}{n!\,n!}$

$=(-1)^n.\frac{1.2.3.4...(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}{n!\,n!}$

$=(-1)^n.\frac{\{1.3.5...(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6...(2n-2)2n\}}{n!\,n!}$

$=(-1)^n\frac{\{1.3.5...(2n-3)(2n-1)\}2^n\{1.2.3.4...(n-1).n\}}{n!n!}$

$=\frac{\{1.3.5...(2n-1)\}\{1.2.3...n\}}{n!\,n!}(-1)^n2^n$

$=\frac{\{1.3.5...(2n-1)\}n!}{n!\,n!}(-2)^n$

$=\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}(-2)^n$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ $(a+Px)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. যদি $y=x-x^2+x^3-x^4+......$ হয়, তবে x কে y এর শক্তির উর্ধ্বক্রম ধারায় প্রকাশ কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত রাশিটির বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে b, $\frac{10}{3}bx$ এবং $\frac{40}{9}bx^2$ হলে, a, b এবং n এর মান নির্ণয় কর যখন P = 2। ৪

গ. a = 1, P = − 4 এবং $n=-\frac{1}{2}$ হলে, দেখাও যে, উদ্দীপকের রাশিটির বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২১(ক) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৫

খ দেওয়া আছে, বীজগাণিতিক রাশি $=(a+Px)^n$

$=(a+2x)^n$ [∵ P = 2]

$(a+2x)^n=a^n+{}^nC_1\,a^{n-1}\,2x+{}^nC_2\,a^{n-2}\,(2x)^2+......+(2x)^n$

সুতরাং প্রশ্নানুসারে,

$a^n=b$ ...... (i)

${}^nC_1\,a^{n-1}\,(2x)=\frac{10}{3}bx$ ...... (ii)

${}^nC_2\,a^{n-2}\,(2x)^2=\frac{40}{9}bx^2$ ...... (iii)

(ii) নং হতে, $n\frac{a^n}{a}.2x=\frac{10}{3}bx$

বা, $n.\frac{b}{a}=\frac{5}{3}b$ বা, $\frac{n}{a}=\frac{5}{3}$ বা, 5a = 3n

∴ $a=\frac{3n}{5}$ ...... (iv)

(iii) নং হতে, $\frac{n(n-1)}{2!}\frac{a^n}{a^2}4x^2=\frac{40}{9}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2}\frac{b}{a^2}=\frac{10}{9}b$ বা, $9n(n-1)=20a^2$

বা, $9n(n-1)=20\left(\frac{3n}{5}\right)^2$

বা, $9n(n-1)=20\times\frac{9n^2}{25}$

বা, $25\,n(n-1)=20n^2$

বা, 5(n − 1) = 4n

বা, 5n − 5 = 4n

বা, 5n − 4n = 5

∴ n = 5 **(Ans.)**

(iv) নং এ n = 5 বসিয়ে, $a=\frac{3}{5}\times5=3$ **(Ans.)**

(i) নং এ a ও n এর মান বসিয়ে পাই, $b=3^5$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

প্রশ্ন ▶ ৪৮ $Z = x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা যার $i = \sqrt{-1}$ এবং $f(x) = 1 - 7x + 12x^2$ *[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]*

ক. $3i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $|Z - 6| + |Z + 6| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\{f(x)\}^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{3i} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}.(2i)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{2i}$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2i-1} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2i+i^2}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+i)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+i) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $Z = x + iy$

প্রদত্ত সমীকরণ, $|Z - 6| + |Z + 6| = 20$

বা, $|x + iy - 6| + |x + iy + 6| = 20$

বা, $\sqrt{(x-6)^2+y^2} + \sqrt{(x+6)^2+y^2} = 20$

বা, $\sqrt{(x+6)^2+y^2} = 20 - \sqrt{(x-6)^2+y^2}$

বা, $\{\sqrt{(x+6)^2+y^2}\}^2 = \{20 - \sqrt{(x-6)^2+y^2}\}^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 12x + 36 + y^2 = 400 - 40\sqrt{(x-6)^2+y^2} + x^2 - 12x + 36 + y^2$

বা, $40\sqrt{(x-6)^2+y^2} = 400 + x^2 - 12x + 36 + y^2 - x^2 - 12x - 36 - y^2$

বা, $40\sqrt{(x-6)^2+y^2} = 400 - 24x$

বা, $40\sqrt{(x-6)^2+y^2} = 8(50 - 3x)$

বা, $5\sqrt{(x-6)^2+y^2} = 50 - 3x$

বা, $\{5\sqrt{(x-6)^2+y^2}\}^2 = (50 - 3x)^2$ [বর্গ করে]

বা, $25\{(x-6)^2 + y^2\} = 2500 - 300x + 9x^2$

বা, $25(x^2 - 12x + 36 + y^2) = 2500 - 300x + 9x^2$

বা, $25x^2 - 300x + 900 + 25y^2 - 2500 + 300x - 9x^2 = 0$

বা, $16x^2 + 25y^2 - 1600 = 0$

$\therefore$ $16x^2 + 25y^2 = 1600$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = 1 - 7x + 12x^2$

$\therefore$ $\{f(x)\}^{-1} = (1 - 7x + 12x^2)^{-1} = \frac{1}{1 - 7x + 12x^2}$

$$= \frac{1}{12x^2 - 3x - 4x + 1} = \frac{1}{3x(4x-1) - 1(4x-1)}$$

$$= \frac{1}{(4x-1)(3x-1)} = \frac{1}{\{-(1-4x)\}\{-(1-3x)\}}$$

$$= \frac{1}{(1-4x)(1-3x)}$$

সৃজনশীল ৩৬(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৯১

প্রশ্ন ▶ ৪৯ $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ *[সরকারি বি এল কলেজ, খুলনা]*

ক. $f(x)$ এর বিস্তৃতির 10-তম পদ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(0.5)$ এর প্রকৃত মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 - \ldots$ ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots$

$= (1 + 1)x + (2 + 1)x^2 + (3 + 1)x^3 + \ldots\ldots$

$\therefore$ সাধারণ পদ $= (n + 1)x^n$ যেখানে $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

যখন $n = 10$ তখন ১০ম পদ $= (10 + 1)x^{10} = 11x^{10}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots..$

$\therefore$ $1 + f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots. + (n + 1)x^n + \ldots$

[উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $1 + f(x) = (1 - x)^{-2}$

বা, $1 + f(0.5) = (1 - 0.5)^{-2}$

বা, $1 + f(0.5) = (0.5)^{-2}$

বা, $1 + f(0.5) = 4$

বা, $f(0.5) = 4 - 1$

$\therefore$ $f(0.5) = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 3 **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ৩৫(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৯০

প্রশ্ন ▶ ৫০ $f(x) = x^2 - ax + b$ যেখানে a, b ধ্রুবক। *[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]*

ক. $f(x) = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির পৃথায়ক নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর 1 হলে দেখাও যে, $a^2 + 4b^2 = (1 + 2b)^2$ ৪

গ. $a = \frac{5}{6}$ এবং $b = \frac{1}{6}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{6f(x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $3^{r+1} - 2^{r+1}$ ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - ax + b$

$\therefore$ $f(x) = 0$

বা, $x^2 - ax + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

(i) নং সমীকরণটির পৃথায়ক, $D = (-a)^2 - 4.1.b$

$= a^2 - 4b$ **(Ans.)**

খ মনে করি, $x^2 - ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β;

$\therefore$ $\alpha + \beta = -(-a) = a$ এবং $\alpha\beta = b$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\alpha - \beta = 1$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = 1$ [বর্গ করে]

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

বা, $a^2 - 4b = 1$ [$\alpha + \beta$ ও $\alpha\beta$ এর মান বসিয়ে]

বা, $a^2 = 1 + 4b$

বা, $a^2 + 4b^2 = 1 + 4b + 4b^2$ [উভয়পক্ষে $4b^2$ যোগ করে]

$\therefore$ $a^2 + 4b^2 = (1 + 2b)^2$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - ax + b$

$$= x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} \quad \left[\because a = \frac{5}{6} \text{ এবং } b = \frac{1}{6}\right]$$

$$\therefore \frac{1}{6f(x)} = \frac{1}{6\left(x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{6x^2 - 5x + 1} = (1 - 5x + 6x^2)^{-1}$$

প্রদত্ত রাশি $= (1 - 5x + 6x^2)^{-1} = \{1 - 3x - 2x + 6x^2\}^{-1} = \{(1 - 3x) - 2x(1 - 3x)\}^{-1}$

$$= \{(1-3x)(1-2x)\}^{-1} = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$$

$$= \frac{1}{(1-3x)\left(1-\frac{2}{3}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}\right)(1-2x)}$$

[cover-up rule এর সাহায্যে]

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}(1-3x)} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)(1-2x)}$$

$$\therefore \frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} = 3(1-3x)^{-1} - 2(1-2x)^{-1}$$

$= 3(1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots + 3^rx^r + \cdots\cdots) - 2(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots\cdots + 2^rx^r + \cdots\cdots)$

$\therefore$ x^r-এর সহগ $= 3.3^r - 2.2^r = 3^{r+1} - 2^{r+1}$

সুতরাং, x^r এর সহগ $3^{r+1} - 2^{r+1}$ (প্রমাণিত)

★ আরোহ বিধি ও আরোহ পদ্ধতি

১. $1 + 2 + 3 + \dots\dots + n$ সমান নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ খ $\frac{1}{2}n(n+1)$

গ $\frac{1}{4}n(n+1)$ ঘ $\frac{1}{4}n^2(n+1)$ **খ**

২. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ সমান নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $\frac{n(n+1)}{6}$ খ $\frac{n^2(n+1)^2}{6}$

গ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ ঘ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **ঘ**

★★দ্বিপদী উপপাদ্য

৩. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ কত? (মধ্যম)

ক -1 খ 0

গ 1 ঘ 2 **গ**

8. দ্বিপদী উপপাদ্য কে উদ্ভাবন করেন? (সহজ)

ক Sir Isaac Newton

খ Rene Descartes

গ Leibnitz

ঘ George Cantor **ক**

৫. $(a + x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক $5a^4$ খ $10a^3$

গ $5a$ ঘ 1 **গ**

৬. $(a + b)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে ৭ম পদের মান কত? (মধ্যম)

ক $5005a^9b^6$ খ $5050\ a^6b^9$

গ $5500\ a^6b^6$ ঘ $5550\ a^9b^9$ **ক**

ব্যাখ্যা: ৭ম পদের মান $= {}^{15}c_6\, a^{15-6}b^6 = 5005\, a^9b^6$

৭. $\left(x - \frac{1}{9x}\right)^7$-এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা কত? (মধ্যম)

ক 6 খ 7

গ 8 ঘ 9 **গ**

৮. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$-এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা কত? (মধ্যম)

ক 6 খ 8

গ 12 ঘ 13 **ঘ**

৯. $(a + x)^n$-এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যার মান যদি সসীম হয় তখন n কী হবে? (সহজ)

ক বাস্তব সংখ্যা খ ধনাত্মক ভগ্নাংশ

গ ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা

ঘ ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা **গ**

১০. $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে—

i. পদসংখ্যা $= (n + 1)$

ii. x^n এর সহগ $= 1$

iii. $(r + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^nc_ra^{n-r}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১১. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে—

i. প্রথম ও শেষ থেকে $(r + 1)$ তম পদের সহগ সমান

ii. $(r + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^nc_r$

iii. শেষ থেকে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^nc_{n-r}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১২ ও ১৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ একটি রাশি।

১২. রাশিটির বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা কত? (সহজ)

ক 6 খ 7

গ 12 ঘ 13 **ঘ**

ব্যাখ্যা:

$$\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \left\{(x)^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6$$

$$= \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right\}^6 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$$ এখানে $n = 12$

$\therefore$ পদ সংখ্যা $= 12 + 1$

১৩. রাশিটির বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদের মান কত? (মধ্যম)

ক ${}^6C_3$ খ ${}^6C_5$

গ ${}^{12}C_6$ ঘ ${}^{12}C_7$ **গ**

ব্যাখ্যা: $(r + 1)$ তম পদ $= {}^{12}c_r\, x^{12-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$

$= {}^{12}c_r\, x^{12-2r}$ x-বর্জিত পদে $r = 6$

★★ প্যাসকেলের ত্রিভুজ

১৪. প্যাসকেলের ত্রিভুজের প্রত্যেক সারির ১ম ও শেষ সংখ্যা কত? (সহজ)

ক 1, 1 খ 1, 0

গ 0, 1 ঘ 2, 2 **ক**

১৫. প্যাসকেলের ত্রিভুজে চতুর্থ সারির উপাদান কয়টি? (মধ্যম)

ক 2 খ 3

গ 4 ঘ 5 **গ**

১৬. প্যাসকেলের ত্রিভুজাকার সংখ্যা বিন্যাসে—

i. প্রত্যেক সারির প্রান্তিক পদদ্বয় 1 এবং 1
ii. কোনো সারির ১ম ও ২য় পদদ্বয়ের যোগফল পরবর্তী সারির দ্বিতীয় পদ
iii. ৭ম সারির পদগুলি যথাক্রমে $(1 + x)^6$ এর বিস্তৃতির ক্রমিক সহগ

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক) ii খ) i ও iii
গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

★★ দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ পদ, মধ্যপদ ও সমদূরবর্তী পদ

১৭. $\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে কত তম পদ মধ্যপদ? (মধ্যম)

ক) 4 খ) 5
গ) 6 ঘ) 7 **গ**

ব্যাখ্যা: $n = 10 \therefore$ পদসংখ্যা $= 10 + 1$ যা বিজোড়

$\therefore$ মধ্যপদ $= \left(\frac{10}{2}+1\right)$ তম

১৮. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটির মান কত? (মধ্যম)

ক) 17820 খ) 18702
গ) 13780 ঘ) 12870 **ঘ**

১৯. $(1 + 3x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে 5 তম ও 6 তম পদ সমান হলে x এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক) $\frac{2}{5}$ খ) $\frac{1}{3}$
গ) $\frac{8}{25}$ ঘ) $\frac{5}{18}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $(1 + 3x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদ $= {}^{10}C_r(3x)^r$

শর্তমতে, ${}^{10}C_4(3x)^4 = {}^{10}C_5(3x)^5 \therefore x = \frac{5}{18}$

২০. $n \in \mathbb{N}$ হলে $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কোনটি? (মধ্যম)

ক) ${}^{2n}C_n$ খ) $(-1)^n\,{}^{2n}C_n$
গ) ${}^{2n}C_{n-1}$ ঘ) $(-1)^n\,{}^{2n}C_{n-1}$ **খ**

২১. $(1 + x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুণ হলে, $r = ?$ (কঠিন)

ক) 7 খ) 8
গ) 9 ঘ) 10 **ক**

ব্যাখ্যা: শর্তমতে, ${}^{20}C_r = {}^{20}C_{r-1} \times 2 \therefore r = 7$

২২. $(a + 2b)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ হতে ৩য় পদ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক) ${}^{10}C_2\, a^8.2b^2$ খ) ${}^{10}C_2\, a^8.4b^2$
গ) ${}^{10}C_8\, a^2.2^8b^8$ ঘ) ${}^{10}C_2\, a^8.2b^2$ **গ**

২৩. $(1 + x)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(r - 1)$ ও $(2r + 3)$ তম পদের সহগ সমান হলে, $r =$ কত? (মধ্যম)

ক) −4 খ) −5
গ) 4 ঘ) 5 **ঘ**

ব্যাখ্যা: ${}^{15}C_{r-2} = {}^{15}C_{2r+2}$

বা, $r - 2 + 2r + 2 = 15 \therefore r = 5$

২৪. k এর কোন মানের জন্য $\left(\sqrt{x}-\frac{k}{x^2}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ 405 হবে। (কঠিন)

ক) 0, 2 খ) − 3, 2
গ) 3, 2 ঘ) 3, −3 **ঘ**

২৫. $(1 + x + x^3)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ কত? (কঠিন)

ক) 377 খ) 378
গ) 365 ঘ) −387 **খ**

ব্যাখ্যা: $\{(1 + x) + (x^3)\}^9$

$\therefore x^5$ এর সহগ ${}^9C_0 \times {}^9C_5 + {}^9C_1 \times {}^8C_2 = 378$

২৬. $\left(2x^2-\frac{1}{4x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ কত? (কঠিন)

ক) $-\frac{231}{8}$ খ) 231
গ) $\frac{231}{4}$ ঘ) $\frac{231}{8}$ **ক**

২৭. $(1 + x)^{m+n}$-এর বিস্তৃতিতে x^m-এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক) $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ খ) $(m + n)!$
গ) $\frac{m!n!}{(m+n)!}$ ঘ) $m!n!$ **ক**

২৮. $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^9$-এর বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদটির মান কত? (মধ্যম)

ক) 36 খ) −36
গ) 84 ঘ) −84 **ঘ**

২৯. $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$-এর বিস্তৃতিতে যদি r-তম পদ x বর্জিত হয়, তবে r-এর মান কত? (কঠিন)

ক) 7 খ) 8
গ) 9 ঘ) 10 **গ**

৩০. যদি $\left(x^2+\frac{\lambda}{x}\right)^5$-এর বিস্তৃতিতে x-এর সহগ 270 হয়, তবে λ এর মান কত? (কঠিন)

ক) 3 খ) 4
গ) 5 ঘ) 6 **ক**

৩১. $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতিতে $\frac{1}{x}$ এর সহগ কত? যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। (কঠিন)

ক $\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$ খ $\frac{(2n)!}{(2n-1)!\,(2n+1)!}$

গ $\frac{n!}{(n-1)!\,(n+1)!}$ ঘ $\frac{(2n)!}{(n+1)!}$ **ক**

৩২. $(17^{1/3}+35^{1/2}x)^{600}$ এর বিস্তৃতিতে পূর্ণসাংখ্যিক সহগ বিশিষ্ট পদ কতটি? (কঠিন)

ক 50 খ 100

গ 101 ঘ 150 **গ**

৩৩. $(p+2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে p এর মান কত হবে? (কঠিন)

ক ± 2 খ ± 3

গ ± 5 ঘ ± 10 **ক**

৩৪. $(1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ কত? (কঠিন)

ক 7 খ 15

গ 35 ঘ 56 **গ**

৩৫. $(2x+y)^{15}$-এর বিস্তৃতিতে অষ্টম পদে x ও y এর ঘাত যথাক্রমে কত হবে? (কঠিন)

ক 8 ও 7 খ 6 ও 9

গ 9 ও 6 ঘ 7 ও 8 **ক**

৩৬. $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে r-তম ও (r + 4) তম পদের সহগ সমান হলে r এর মান কত? (কঠিন)

ক 7 খ 8

গ 9 ঘ 10 **গ**

৩৭. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে ৫ম, ৬ষ্ঠ ও ৭ম পদের সহগগুলি সমান্তর প্রগমনে থাকলে n-এর মান কত? (কঠিন)

ক 7, 11 খ 7, 14

গ 8, 16 ঘ 7, 17 **খ**

৩৮. যদি $(x+a)^n$, $n \in \mathbb{N}$ এর বিস্তৃতিতে বিজোড় স্থানীয় পদগুলির সমষ্টি A এবং জোড় স্থানীয় পদগুলির সমষ্টি B হয় তবে $(x^2-a^2)^n$ এর মান কত? (কঠিন)

ক A^2-B^2 খ A^2+B^2

গ 4AB ঘ AB **ক**

৩৯. $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ/মধ্যপদদ্বয় কোনটি? (মধ্যম)

ক ৬ষ্ঠ ও ৭ম খ ৫ম ও ৬ষ্ঠ

গ ৬ষ্ঠ ঘ ৭ম **ক**

৪০. $\left(\frac{k}{2}+2\right)^8$এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ 1120 হলে k এর মান কত? (কঠিন)

ক ± 1 খ ± 2

গ ± 3 ঘ ± 4 **খ**

৪১. $(1+x)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r ও x^{r+1} এর সহগদ্বয় সমান হলে r এর মান কত? (মধ্যম)

ক n খ 2n

গ n + 1 ঘ 2n + 1 **ক**

৪২. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদ x বর্জিত? (মধ্যম)

ক n খ n + 1

গ n + 2 ঘ 2n **খ**

৪৩. $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে (2r + 1) ও (r + 3) তম পদের সহগ সমান হলে r এর মান নির্ণয় করো। (কঠিন)

ক 5 খ 4

গ 3 ঘ 6 **ঘ**

৪৪. $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান কত? (মধ্যম)

ক ${}^{10}C_4$ খ ${}^{10}C_5$

গ ${}^{10}C_6$ ঘ ${}^{10}C_7$ **খ**

৪৫. $(1+x)^p\left(1+\frac{1}{x}\right)^q$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি কত তম? (কঠিন)

ক p + 1 খ q + 1

গ p + q ঘ p + q + 1 **খ**

ব্যাখ্যা: $(1+x)^p\left(1+\frac{1}{x}\right)^q = \frac{(1+x)^{p+q}}{x^q}$

সাধারণ পদ = ${}^{p+q}c_r\, x^{r-q}$

$\therefore r = q$

$\therefore$ (q + 1) তম পদ x বর্জিত

৪৬. $(1+x)(a-bx)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ শূন্য হলে $\frac{a}{b}$ অনুপাতের মান কত? (কঠিন)

ক $\frac{3}{8}$ খ $\frac{3}{5}$

গ $\frac{5}{8}$ ঘ $\frac{1}{2}$ **গ**

ব্যাখ্যা: x^8 এর সহগ = ${}^{12}C_8a^{12-8}b^8 - {}^{12}C_7a^{12-7}b^7$

$\therefore {}^{12}C_8a^4b^8 = {}^{12}C_7a^5b^7 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{8}$

৪৭. $(1+x)^{50}$ এর বিস্তৃতিতে —

i. মোট পদ সংখ্যা 51
ii. মধ্যপদ হবে 26 তম পদ
iii. 21 তম পদের সহগ = $^{50}C_{20}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৪৮. $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে—

i. 21 তম পদ = $^{44}c_{20}\,x^{20}$
ii. 22 তম পদ = $^{44}c_{21}\,x^{21}$
iii. $x=\frac{7}{8}$ হলে 21 তম ও 22 তম পদদ্বয় সমান

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৪৯. $(a+2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে —

i. মধ্যপদ দুইটি
ii. $(r+1)$ তম পদ = $^5C_r a^{5-r}.2^r.x^r$
iii. x^3 এর সহগ 320 হলে a এর মান 3

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৫০. $(x^2-y^3)^n$ এর বিস্তৃতিতে —

i. $(r+1)$ তম পদ = $^nC_r\,x^{2n-2r}.\,y^{3r}.(-1)^r$
ii. $n=7$ হলে মধ্যপদ থাকবে দুইটি
iii. শেষ হতে তৃতীয় পদ হচ্ছে y^n

নিচের সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫১-৫৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6$ একটি দ্বিপদী রাশি।

৫১. রাশিটির বিস্তৃতিতে মোট পদের সংখ্যা কয়টি? (মধ্যম)

ক 10 খ 11
গ 12 ঘ 13 **ঘ**

৫২. রাশিটির বিস্তৃতিতে কত তম পদটি x- মুক্ত? (মধ্যম)

ক পঞ্চম খ ষষ্ঠ
গ সপ্তম ঘ অষ্টম **গ**

৫৩. রাশিটির বিস্তৃতিতে পঞ্চম পদটি কত? (কঠিন)

ক $495x^4$ খ $-495x^4$
গ $792x^2$ ঘ $-792x^2$ **ক**

$\left(2+\frac{x}{3}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 বিদ্যমান।

উপরের তথ্যের আলোকে (৫৪ ও ৫৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৫৪. উদ্দীপকের বিস্তৃতির সাধারণ পদ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $^nC_r\frac{2^{n-r-1}}{3^r}$ খ $^nC_r\frac{2^{n-r}}{3^r}.x^r$
গ $^nC_r\frac{2^{n-r+1}}{3^r}$ ঘ $^nC_r\frac{2^{n-r}}{3}$ **খ**

৫৫. উদ্দীপকের সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে n এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

ক 41 খ 55
গ 31 ঘ 17 **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৬ ও ৫৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$(1+x)^{28}$ এর বিস্তৃতিতে $(4r+5)$ ও $(2r+1)$ তম পদের সহগ সমান।

৫৬. x বর্জিত পদের মান কত? (মধ্যম)

ক 1 খ 2
গ 3 ঘ 4 **ক**

৫৭. r এর মান কত? (মধ্যম)

ক 4 খ 5
গ 6 ঘ 7 **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৮-৬০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$\left(\frac{a}{x}-bx\right)^{12}$ একটি দ্বিপদী রাশি এবং $a, b > 0$।

৫৮. রাশিটির বিস্তৃতিতে কত তম পদ মধ্যপদ? (মধ্যম)

ক 6 তম খ 7 তম
গ 8 তম ঘ 9 তম **খ**

৫৯. কত তম পদ x–বর্জিত? (মধ্যম)

ক 7 তম খ 13 তম
গ 24 তম ঘ 25 তম **ক**

৬০. $a=\frac{1}{b}$ হলে x বর্জিত পদের মান কত? (মধ্যম)

ক $^{12}C_6$ খ $^{12}C_7$
গ $^{24}C_6$ ঘ $^{24}C_7$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬১ ও ৬২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$(1-4x+4x^2)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 9।

৬১. n এর মান কত? (কঠিন)

ক 10 খ 9
গ 4 ঘ 5 **গ**

ব্যাখ্যা: $(1-4x+4x^2)^n=(1-2x)^{2n}$
$\therefore 2n+1=9\Rightarrow n=4$

৬২. দ্বিপদী রাশির ২য় পদ 48 হলে x = কত? (কঠিন)

ক −3 খ −4
গ −5 ঘ −6 **ক**

ব্যাখ্যা: $^8c_1(-2x)^1=48\Rightarrow -16x=48\;\therefore x=-3$

★★ অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতি

৬৩. $(1-x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক $(-1)^r$ খ 1

গ $(r+1)$ ঘ $(-1)^r(r+1)$ **খ**

৬৪. e^{3x} এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ কত? (কঠিন)

ক $\frac{4}{\sqrt{7}}$ খ 4^7

গ 3^7 ঘ $\frac{3^7}{7!}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $e^{3x}=1+\frac{3x}{1!}+\frac{3^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{3^7x^7}{7!}+\ldots$

৬৫. $\frac{1+x}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর সহগ কত? (যেখানে $|x|<1$) (মধ্যম)

ক -1 খ 2

গ 1 ঘ -2 **খ**

ব্যাখ্যা: $\frac{1+x}{1-x}=(1+x)(1-x)^{-1}$

∴ x^9 এর সহগ $=1+1=2$

৬৬. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$ বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ হলো— (মধ্যম)

ক $2n-1$ খ $2n+1$

গ $4n$ ঘ $4n-4$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}=(1+x)^2(1-x)^{-2}$

$=(1+2x+x^2)\{1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\ldots\}$

∴ x^n এর সহগ $=n+1+2n+n-1=4n$

৬৭. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ এর বিস্তারে সাধারণ পদ কোনটি? (কঠিন)

ক $\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}$ খ $\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

গ $\frac{x^{2n}}{2n+1}$ ঘ $\frac{x^{2n}}{2n-1}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots\right)$

৬৮. $(1+2x+3x^2+\ldots\infty)^{-\frac{3}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক -1 খ 1

গ 21 ঘ 28 **ক**

ব্যাখ্যা: $(1+2x+3x^2+\ldots)^{-\frac{3}{2}}$

$=\{(1-x)^{-2}\}^{-\frac{3}{2}}=(1-x)^3$

৬৯. $(1-2x)^{-2}$ এর ক্ষেত্রে সাধারণ পদটি কত? (কঠিন)

ক $(r+1)2^{r+1}x^{r+1}$ খ $r.2^r.x^r$

গ $(r-1).2^rx^r$ ঘ $(r+1).2^rx^r$ **ঘ**

৭০. x এর ক্রমবর্ধমান শক্তিতে $\log_e(1-3x+2x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ হবে— (কঠিন)

ক $\frac{1+2^n}{n}$ খ $\frac{3^n-11}{2}$

গ $\frac{4^n-5}{7}$ ঘ $\frac{n-5}{6}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\log_e(1-3x+2x^2)^{-1}=\log_e\{(1-2x)(1-x)\}^{-1}$

$=-1[\log_e(1-2x)(1-x)]$

$=-[\log_e(1-2x)+\log_e(1-x)]$

$=-\left[\left\{-2x-\frac{(2x)^2}{2}\ldots-\frac{(2x)^n}{n}-\ldots\right\}+\left\{-x-\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots\right\}\right]$

∴ x^n এর সহগ $=-\left[-\frac{2^n}{n}-\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{n}(2^n+1)$

৭১. $(1+x)^n=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots\ldots+(-1)^r(r+1)x^r+\ldots\ldots$ হলে, $n=?$ (মধ্যম)

ক -1 খ -2

গ -3 ঘ -4 **খ**

৭২. $1+1\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2!2^4}+\frac{1.3.5}{3!2^6}\ldots\ldots\infty=?$ (মধ্যম)

ক $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ $\sqrt{8}$

গ $\sqrt{2}$ ঘ $\sqrt{3}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$=1+1\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2!2^4}+\frac{1.3.5}{3!2^6}\ldots\ldots\infty$

৭৩. $(1+x+x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ হলো— (মধ্যম)

ক 1 খ -1

গ 0 ঘ 2 **গ**

৭৪. $(1+x)(1-x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে x^{100} এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক 203 খ 301

গ -203 ঘ 201 **ঘ**

৭৫. $(1-x)^{-1}-2(1-2x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ কত? (কঠিন)

ক $1-2^{r+1}(1+r)$ খ $1+2^{r+1}(1+r)$

গ $1-2^{r+1}(3+r)$ ঘ $1-2^r(r-1)$ **ক**

ব্যাখ্যা: $(1-x)^{-1}-2(1-2x)^{-2}$

$=(1+x+x^2+\ldots x^r+\ldots)-2(1+2.2x+3.(2x)^2+\ldots\ldots+(r+1)(2x)^r+\ldots)$

∴ x^r এর সহগ $=1-2^{r+1}(r+1)$

৭৬. $(1-x)^{1/2}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{8}$

গ $-\frac{1}{2}$ ঘ $-\frac{1}{8}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $(1-x)^{1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x)^2+\ldots\ldots$

৭৭. $(1-4x)^{-1/2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ খ $\frac{(r)!}{(r!)^2}$

গ $\frac{(2r)!}{r!}$ ঘ $\frac{(r+1)!}{r!}$ **ক**

★★ অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতির অভিসৃতি

৭৮. $\frac{(1+x)}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক 121 খ 221
গ 212 ঘ 211 **ক**

৭৯. $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + ...$ হলে $(1 + x) =$ কত? (কঠিন)

ক $(1 + y)^{-1}$ খ $(1 - y)^{-1}$
গ $(1 + y)^{-2}$ ঘ $(1 - y)^{-2}$ **খ**

৮০. $(1 + x)^n/(1 - x)$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক 3^n খ 2^n
গ $(-2)^n$ ঘ $(-1)^n 2^n$ **খ**

৮১. $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক $(1 + y) = (1 + x)^{-2}$
খ $(1 + y) = (1 + x)^{-1}$
গ $(1 + y) = (1 - x)^{-2}$
ঘ $1 + y = (1 + x)^{-3}$ **গ**

৮২. $(1 + x)^{1/2}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{16}$
গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{1}{28}$ **খ**

৮৩. $(1 - 2x + x^2)^{-1/2}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক $(-1)^n$ খ 1
গ 2 ঘ $(-2)^n$ **খ**

৮৪. $\frac{1}{\sqrt{(1 - x/4)}}$ এর বিস্তৃতি x-এর কোন মানের জন্য বৈধ? (কঠিন)

ক $|x| > 4$ খ $|x| \geq 4$
গ $|x| < 4$ ঘ $|x| \leq 4$ **গ**

৮৫. $(8 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$ বিস্তৃতিটি বৈধ হওয়ার জন্য x এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক $|x| < 8/3$ খ $|x| > \frac{8}{3}$
গ $|x| > \frac{3}{8}$ ঘ $|x| < \frac{3}{8}$ **ক**

৮৬. $(1 + x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কোনটি? (মধ্যম)

ক 1 খ −1
গ n ঘ $(-1)^n$ **ঘ**

৮৭. $(x - 1)^{-1}$ রাশিটির —

i. বিস্তৃতিতে অসংখ্য পদ আছে
ii. বিস্তৃতি অভিসৃত হবে যদি $|x| < 1$
iii. বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $= -1$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $(x-1)^{-1} = -1\,(1 + x + x^2 + ... + x^n + ...)$
$\therefore x^n$ এর সহগ -1

৮৮. $(2 - x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতি —

i. অভিসৃত হবে যদি $|x| < 2$ হয়
ii. এর পদ সংখ্যা অসীম
iii. এর দ্বিতীয় পদ $= \frac{x}{4\sqrt{2}}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $(2 - x)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} + ...\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4\sqrt{2}} .....$

★ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের মাধ্যমে দ্বিপদী

৮৯. $\frac{1}{(1 - x)(3 - x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{2}(1 - 3^{-4})$ খ $\frac{1}{2}(1 - 3^{-3})$
গ $1 - 3^{-4}$ ঘ $1 - 3^{-3}$ **ক**

৯০. $(1 - 5x + 6x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^m এর সহগ কোনটি? (কঠিন)

ক $3^m - 2^m$ খ $2^m - 3^m$
গ $3^{m+1} - 2^{m+1}$ ঘ $2^{m+1} - 3^{m+1}$ **গ**

৯১. $(1 - 2x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে—

i. ধারাটি অভিসৃত হবে যদি $|x| < \frac{1}{2}$ হয়
ii. ধারাটি x^2 এর সহগ $= 6$
iii. ধারাটির x^3 এর সহগ $= 80$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

৯২. $(1 + x + x^2 + ...)^2$ এর বিস্তৃতিতে —

i. x^3 এর সহগ $= 4$
ii. x^{n-1} এর সহগ $= n$
iii. x^n এর সহগ $= n + 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৯৩. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে—

i. $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য বিস্তৃতি সসীম হবে
ii. $n \in \mathbb{Z}$ এর জন্য বিস্তৃতি অসীম হতে পারে
iii. n মূলদ ভগ্নাংশ হলে বিস্তৃতি অসীম হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৯৪. n যেকোনো একটি ঋণাত্মক সংখ্যা হলে, $(1 + x)^n$ বিস্তৃতিটি—

i. বৈধ হবে যদি x এর সাংখ্যিক মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়

ii. অভিসারী হবে যদি $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ একটি নির্দিষ্ট লিমিট থাকে

iii. $\lim_{r\to\infty} \frac{u_r+1}{u_r} = \ell$ বিস্তৃতিটি অভিসারী যদি $|\ell| > 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৯৫. $\frac{x+17}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$ হলে—

i. $A = 4$

ii. $B = -3$

iii. x^n এর সহগ $= -\frac{4}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৯৬ – ৯৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$(1 - 2x)^{-3}$ একটি দ্বিপদী রাশি।

৯৬. দ্বিপদী বিস্তৃতির বৈধ ব্যবধি কত? (কঠিন)

ক $-1 < x < 1$ খ $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$
গ $|x| > 1$ ঘ $|2x| > 1$ **খ**

৯৭. রাশিটির বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ কত? (কঠিন)

ক 240 খ 80
গ 24 ঘ 6 **ক**

৯৮. রাশিটির বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ x^3 এর সহগের কত গুণ? (কঠিন)

ক 2 খ 3
গ 4 ঘ 5 **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৯৯–১০১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\frac{3-2x}{(1-x)(2-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{2-x}$

৯৯. A এর মান কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{2}$ খ 1
গ 2 ঘ 3 **খ**

১০০. B এর মান কত? (কঠিন)

ক 3 খ 2
গ 1 ঘ $\frac{1}{2}$ **গ**

১০১. রাশিটির বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ কত? (কঠিন)

ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{5}{4}$
গ $\frac{9}{8}$ ঘ $\frac{17}{16}$ **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১০২ ও ১০৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$ একটি রাশি।

১০২. বিস্তৃতির সাধারণ পদটি কত? (কঠিন)

ক $(2^r - 1)x^r$ খ $(2^{r+1} - 1)x^r$
গ $(2^{r+1} - 1)x^{r+1}$ ঘ $(2^r - 1)x^{r+1}$ **খ**

১০৩. বিস্তৃতির x^n এর সহগ কত? (মধ্যম)

ক $2^{n+1} - 1$ খ $2^n - 1$
গ $2^{n+1} + 1$ ঘ 2^{n+1} **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (১০৪ ও ১০৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f'(x) = 1 - 5x + 6x^2$

১০৪. f(x) এর ন্যূনতম মান কোনটি? (মধ্যম)

ক $-\frac{25}{24}$ খ $-\frac{1}{24}$
গ $\frac{25}{144}$ ঘ $\frac{119}{144}$ **খ**

১০৫. $\frac{1}{f(x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^{n-1} এর সহগ নিচের কোনটি? (কঠিন)

ক $3^n - 2^n$ খ $3^{n+1} - 2^{n+1}$
গ $3^n + 2^n$ ঘ $3^{n+1} + 2^{n+1}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-5x+6x^2}$

$= \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$

$= \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$

$= 3(1-3x)^{-1} - 2(1-2x)^{-1}$

$\therefore$ x^{n-1} এর সহগ $= 3.3^{n-1} - 2.2^{n-1} = 3^n - 2^n$

নিচের তথ্যের আলোকে (১০৬ ও ১০৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$(1 - 2x)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি, যেখানে $|x| < \frac{1}{2}$

১০৬. $n = -\frac{1}{2}$ হলে রাশিটির বিস্তৃতিতে ২য় পদ কোনটি? (মধ্যম)

ক $-x$ খ $-2x$
গ x ঘ $2x$ **গ**

ব্যাখ্যা: $(1-2x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) + \ldots$

$= 1 + x + \ldots$

$\therefore$ ২য় পদ $= x$

১০৭. $n = -1$ হলে রাশিটির বিস্তৃতিতে সাধারণ পদের সহগ কোনটি? (মধ্যম)

ক -2^r খ -2^{r+1}
গ 2^r ঘ 2^{r+1} **গ**

ব্যাখ্যা: $(1-2x)^{-1}$

$= 1 + 2x + (2x)^2 + \ldots + (2x)^r + \ldots$

$\therefore$ সাধারণ পদের সহগ $= 2^r$

অধ্যায়-৬: কণিক

প্রশ্ন ▶ ১ $16x^2 + 25y^2 = 400.$ *[চ. বো. ১৭]*

ক. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(0, 2\sqrt{2})$ ও $(-3, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায়। ২

খ. উৎকেন্দ্রিকতাসহ উদ্দীপকের কণিকটির শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, ফোকাস ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. চিত্র অংকন পূর্বক উদ্দীপকের কণিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বদ্বয় ও নিয়ামকদ্বয় এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণটি $(0, 2\sqrt{2})$ ও $(-3, 0)$ বিন্দুগামী

$\therefore \frac{0}{a^2} + \frac{(2\sqrt{2})^2}{b^2} = 1$ বা, $\frac{8}{b^2} = 1 \therefore b^2 = 8$ ... ... (ii)

আবার, $\frac{(-3)^2}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$ বা, $\frac{9}{a^2} = 1$

$\therefore a^2 = 9$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) নং হতে প্রাপ্ত মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $16x^2 + 25y^2 = 400$

বা, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

বা, $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ ... ... (i)

(i) নং হতে পাই, $a = 5$ এবং $b = 4$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4^2}{5^2}}$

$= \sqrt{\frac{25 - 16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$ **(Ans.)**

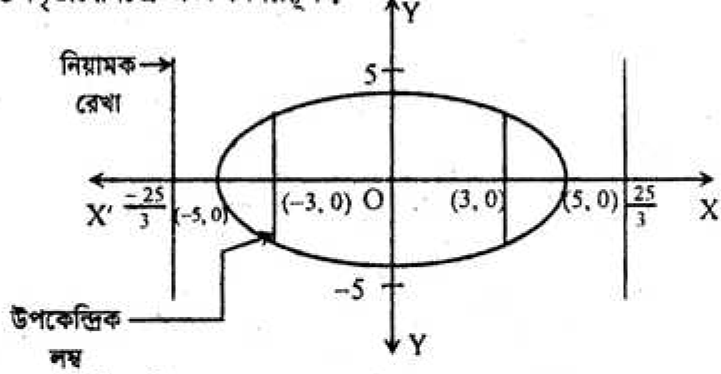
$\therefore$ ফোকাস বা উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm ae, 0)$

$= \left(\pm 5.\frac{3}{5}, 0\right) = (\pm 3, 0)$ **(Ans.)**

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.4^2}{5} = \frac{32}{5}$ **(Ans.)**

গ $16x^2 + 25y^2 = 400$ বা, $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

উপবৃত্তটির চিত্র অঙ্কন নিম্নরূপ :



যেহেতু $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

এবং 'খ' হতে প্রাপ্ত, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{3}{5}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = \pm ae$

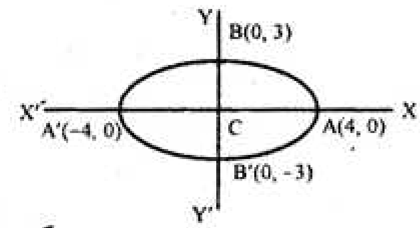
বা, $x = \pm 5.\frac{3}{5}$

$\therefore x = \pm 3$ **(Ans.)**

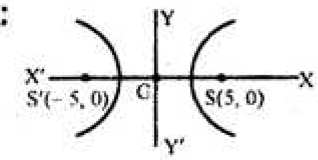
এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e}$ বা, $x = \pm\frac{5}{\frac{3}{5}}$

$\therefore x = \pm\frac{25}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২ দৃশ্যকল্প-১: *[রা. বো. ১৭]*



দৃশ্যকল্প-২:



ক. $y^2 + 6y - 4x = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লেখিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 + 6y - 4x = 0$

বা, $y^2 + 2.3.y + 3^2 - 4x = 9$

বা, $(y + 3)^2 = 4x + 9$

$\therefore (y + 3)^2 = 4.1\left(x + \frac{9}{4}\right)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4 \times 1| = 4$ **(Ans.)**

খ উল্লেখিত উপবৃত্ত থেকে পাই, $a = 4$ এবং $b = 3$

$\therefore a > b$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ বা, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}}$

$= \sqrt{\frac{16 - 9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

$= \left(\pm 4 \times \frac{\sqrt{7}}{4}, 0\right) = (\pm\sqrt{7}, 0)$ **(Ans.)**

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \pm 4 \times \frac{4}{\sqrt{7}}$

বা, $x = \pm\frac{16}{\sqrt{7}}$

$\therefore \sqrt{7}x = \pm 16$ **(Ans.)**

গ অধিবৃত্তের চিত্র হতে পাই, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 5, 0)$

দেওয়া আছে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{5}$

এখন, $\pm ae = \pm\sqrt{5}$ বা, $a^2e^2 = 5$

বা, $a^2 = \frac{5}{e^2} = \frac{5}{5} \therefore a^2 = 1$

আবার, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

বা, $\sqrt{5} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{1}}$

বা, $5 = 1 + b^2$

বা, $b^2 = 5 - 1$

বা, $b^2 = 4$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$

বা, $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

$\therefore 4x^2 - y^2 = 4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩ $16x^2 + 25y^2 = 400$. *[দি. বো. ১৭]*

ক. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(0, 2\sqrt{2})$ ও $(-3, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায়। ২

খ. উৎকেন্দ্রিকতাসহ উদ্দীপক কণিকের শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, ফোকাস ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. চিত্রসহ উদ্দীপক কণিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বদ্বয়ের ও নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৯৬

প্রশ্ন ▶৪ S এর স্থানাঙ্ক (7, 3) এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 1, 3). *[কু. বো. ১৭]*

ক. $y^2 = 32x$ পরাবৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 10; বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের S ও A বিন্দুকে যথাক্রমে উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু ধরে একটি কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা = 1 ৪

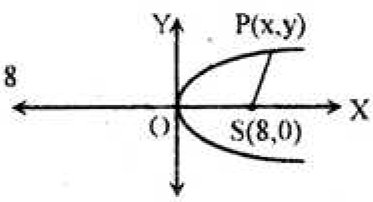
গ. উদ্দীপকের SA রেখাংশকে বৃহদাক্ষ ধরে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 32x$ ... ... (i)

$= 4.8.x$

$= 4ax$ যেখানে $a = 8$



ফোকাস দূরত্ব $= x + a$

প্রশ্নমতে, $x + a = 10$

বা, $x + 8 = 10$

বা, $x = 2$

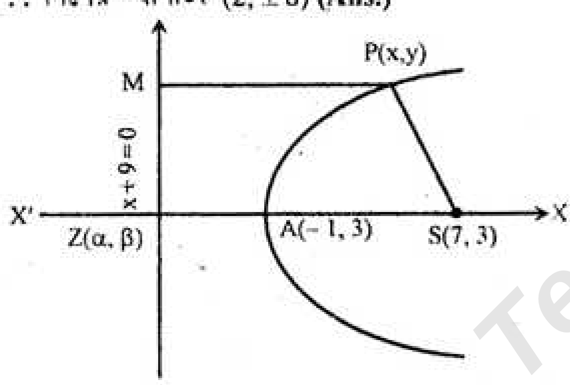
(i) এ $x = 2$ বসিয়ে

$y^2 = 32 \times 2 = 64$

$\therefore y = \pm 8$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(2, \pm 8)$ **(Ans.)**

খ



দেওয়া আছে, উৎকেন্দ্রিকতা = 1। সুতরাং এটি একটি পরাবৃত্ত হবে। উপকেন্দ্র S(7, 3), শীর্ষ (– 1, 3) XAX′ রেখাটি অক্ষ রেখা ও ZM দিকাক্ষরেখা এবং XAX′ ও ZM এর ছেদবিন্দু Z। মনে করি, Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β) যেহেতু, A(– 1, 3), ZS এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore -1 = \frac{7 + \alpha}{2}$ এবং $3 = \frac{3 + \beta}{2}$

$\Rightarrow -2 = 7 + \alpha$ $\Rightarrow \beta + 3 = 6$

$\Rightarrow \alpha = -9$ $\therefore \beta = 3$

$\therefore$ Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 9, 3)

এখন, ZS অক্ষরেখার সমীকরণ,

$\frac{x + 9}{9 - 7} = \frac{y - 3}{3 - 3}$

$\Rightarrow \frac{x + 9}{2} = \frac{y - 3}{0}$

$\Rightarrow y - 3 = 0$

$\therefore 0.x + y - 3 = 0$ ... ... (i)

আবার, (i) নং রেখার উপর লম্ব রেখাটি দিকাক্ষ, যার সমীকরণ,

$x - 0 . y + k = 0$

$\Rightarrow x = -k$ ... ... (ii)

যেহেতু, (ii) নং রেখাটি (– 9, 3) বিন্দুগামী।

$\therefore -9 = -k \Rightarrow k = 9$

k এর মান (ii)নং এ বসিয়ে দিকাক্ষের সমীকরণ পাই,

$x = -9$

$\Rightarrow x + 9 = 0$ ... ... (iii)

মনে করি, পরাবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু P(x, y)

এখন, SP = PM

$\Rightarrow SP^2 = PM^2$

$\Rightarrow (x - 7)^2 + (y - 3)^2 = (x + 9)^2$

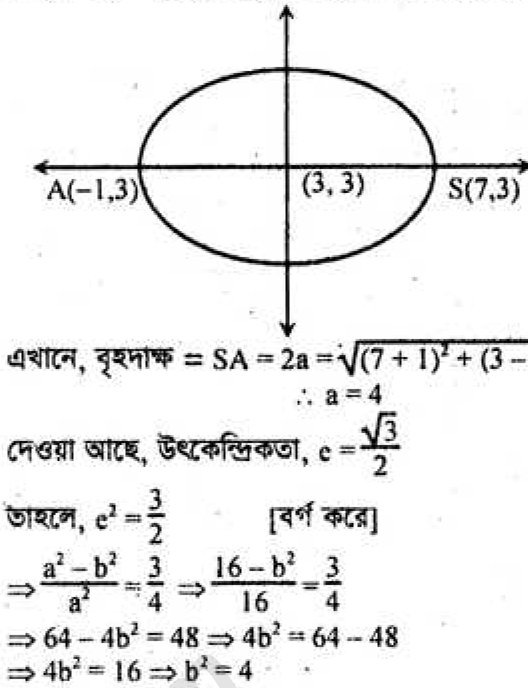
$\Rightarrow x^2 - 14x + 49 + (y - 3)^2 = x^2 + 18x + 81$

$\Rightarrow (y - 3)^2 = x^2 + 18x + 81 - x^2 + 14x - 49$

$\Rightarrow (y - 3)^2 = 32x + 32$

$\Rightarrow (y - 3)^2 = 32(x + 1)$, ইহাই নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ



এখানে, বৃহদাক্ষ $= SA = 2a = \sqrt{(7 + 1)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{8^2} = 8$

$\therefore a = 4$

দেওয়া আছে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

তাহলে, $e^2 = \frac{3}{2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{16 - b^2}{16} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 64 - 4b^2 = 48 \Rightarrow 4b^2 = 64 - 48$

$\Rightarrow 4b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 4$

$\therefore b = 2$

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{7 - 1}{2}, \frac{3 + 3}{2}\right) = (3, 3)$

উপবৃত্তের সমীকরণ:

$\frac{(x - 3)^2}{4^2} + \frac{(y - 3)^2}{2^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{16} + \frac{y^2 - 6y + 9}{4} = 1$

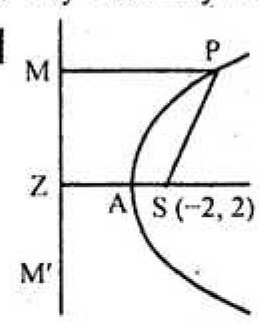
$\Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9 + 4y^2 - 24y + 36}{16} = 1$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 45 = 16$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 45 - 16 = 0$

$\therefore x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 29 = 0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫ *[চ. বো. ১৭]*



চিত্রটি একটি কণিক নির্দেশ করে যার নিয়ামক রেখা MZM′।

ক. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২

খ. A(1, –2) হলে MZM′ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. SP : PM = 1 : 2 এবং MZM′ রেখার সমীকরণ $3x + 4y = 1$ হলে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

বা, $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

একে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2, b = 3$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{3^2}{2^2}}$

$= \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A ও S এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -2)$ ও $(-2, 2)$

ধরি, Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

আমরা জানি, পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে $ZA = AS$

$\therefore \frac{x-2}{2} = 1$ এবং $\frac{y+2}{2} = -2$

বা, $x - 2 = 2$ বা, $y + 2 = -4$

$\therefore x = 4$ $\therefore y = -6$

$\therefore$ Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, -6)$

এখন, A ও S বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-1}{1+2} = \frac{y+2}{-2-2}$

বা, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4}$

বা, $3y + 6 = -4x + 4$

$\therefore 4x + 3y + 2 = 0$ ……… (i)

ধরি, (i) এর লম্ব রেখার (MZM′) সমীকরণ,

$3x - 4y + k = 0$ ……… (ii)

(ii) নং রেখাটি $Z(4, -6)$ বিন্দুগামী

$\therefore 3.4 - 4(-6) + k = 0$

বা, $12 + 24 + k = 0$

$\therefore k = -36$

$\therefore$ MZM′ এর সমীকরণ $3x - 4y - 36 = 0$

গ দেওয়া আছে, SP ঃ PM = 1 ঃ 2

বা, $\frac{SP}{PM} = \frac{1}{2}$

বা, $PM = 2SP$ ……… (i)

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

আবার, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $S(-2, 2)$ এবং MZM′ রেখার সমীকরণ $3x + 4y = 1$

(i) থেকে পাই, $\frac{3x + 4y - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2.\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$

বা, $\frac{3x + 4y - 1}{5} = 2\sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4}$

বা, $(3x + 4y - 1)^2 = (10\sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8})^2$

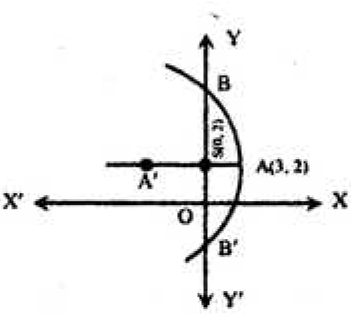
বা, $9x^2 + 16y^2 + 1 + 24xy - 6x - 8y = 100(x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8)$

বা, $100x^2 + 100y^2 + 400x - 400y + 800 - 9x^2 - 16y^2 - 24xy + 6x + 8y - 1 = 0$

$\therefore 91x^2 + 84y^2 - 24xy + 406x - 392y + 799 = 0$

যা নির্ণেয় কণিকের সমীকরণ।

প্রশ্ন ▶ ৬ /সি. বো. ১৭/



ক. $9x^2 - 4y^2 = 36$ কণিকের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. A কে শীর্ষবিন্দু এবং S কে উপকেন্দ্র ধরে অঙ্কিত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে $OB' = 4$ এবং $AS = A'S$ হলে BB′ কে বৃহৎ অক্ষ এবং AA′ কে ক্ষুদ্র অক্ষ ধরে অঙ্কিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত কণিক : $9x^2 - 4y^2 = 36$

বা, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

বা, $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণকে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2, b = 3$

(i) নং এর নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e}$ ……… (ii)

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{\frac{2^2 + 3^2}{2^2}}$

$= \sqrt{\frac{4 + 9}{4}}$

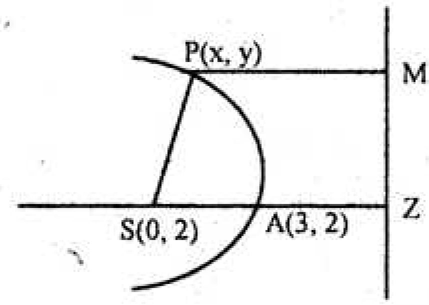
$= \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

(ii) হতে, $x = \pm\frac{2}{\frac{\sqrt{13}}{4}}$

বা, $x = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$.

$\therefore \sqrt{13}x = \pm 4$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

খ



দেওয়া আছে, উপকেন্দ্র $S(0, 2)$ এবং শীর্ষ $A(3, 2)$।

ধরি, পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু $P(x, y)$ ও নিয়ামক রেখা MZ।

আমরা জানি, Z ও S এর মধ্যবিন্দু A। ধরি, Z এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)

$\therefore \frac{x_1 + 0}{2} = 3$ $\frac{y_1 + 2}{2} = 2$

বা, $x_1 = 6$ বা, $y_1 + 2 = 4$

বা, $y_1 = 2$

$\therefore Z(6, 2)$

পরাবৃত্তের অক্ষরেখার ঢাল, $m_1 = \frac{2-2}{3-0} = 0$

$\therefore$ নিয়ামক রেখার ঢাল, $m_2 = \frac{-1}{0}$ $[\because m_1 \times m_2 = -1]$

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $y - 2 = \frac{-1}{0}(x - 6)$

বা, $-x + 6 = 0$

বা, $x - 6 = 0$

এখন, $SP = PM$

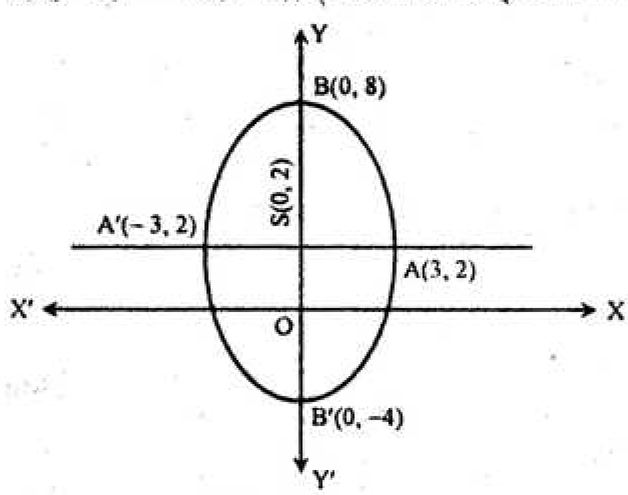
বা, $SP^2 = PM^2$

বা, $x^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2$

বা, $x^2 + (y-2)^2 = x^2 - 12x + 36$

বা, $(y-2)^2 = -12(x-3)$, ইহাই নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ।

গ



যেহেতু, $OB' = 4$ একক, সেহেতু $SB' = 2 + 4 = 6$ একক

$\therefore SB = 6$ একক অর্থাৎ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 8)$

আবার, $AS = A'S$ অর্থাৎ S, AA′ এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ A′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3, 2)$

BB′ কে বৃহৎ অক্ষ এবং AA′ কে ক্ষুদ্র অক্ষ ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ,

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{6^2}=1$$

যেখানে $a = 3, b = 6 (a < b)$

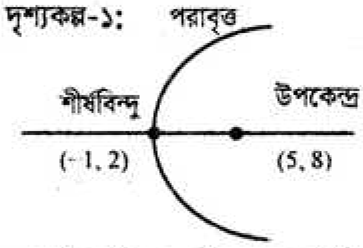
$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{36-9}{36}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}$

$\therefore$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y-2=\pm be$

বা, $y-2=\pm 6\times\frac{3\sqrt{3}}{6}$

$\therefore y-2=\pm 3\sqrt{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ দৃশ্যকল্প-১: /য. বো. ১৭/



দৃশ্যকল্প-২: একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি (6, 1) ও (10, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3.

ক. $3x^2+5y^2=1$ এর উৎকেন্দ্রিকা নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^2+5y^2=1$ বা, $\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{1}{5}}=1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $=\sqrt{1-\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}}=\sqrt{1-\frac{3}{5}}$

$=\sqrt{\frac{5-3}{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (−1, 2) এবং উপকেন্দ্র (5, 8)। পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি পরাবৃত্তটির নিয়ামকরেখা ও অক্ষের ছেদবিন্দু (x_1, y_1)

$\therefore \frac{x_1+5}{2}=-1$ | এবং $\frac{y_1+8}{2}=2$

$\therefore x_1=-2-5=-7$ | $y_1=4-8=-4$

এখন অক্ষরেখার ঢাল $\frac{8-2}{5+1}=1$

$\therefore$ নিয়ামক রেখার ঢাল − 1

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ $y+4=-1(x+7)$

বা, $x + y+11=0$

ধরি, পরাবৃত্তের উপর P(x, y) যে কোনো একটি বিন্দু।

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুযায়ী $\sqrt{(x-5)^2+(y-8)^2}$

$=\left|\frac{x+y+11}{\sqrt{2}}\right|$

বা, $x^2-10x+25+y^2-16y+64=\frac{1}{2}(x^2+y^2+121+2xy+22x+22y)$

বা, $2x^2-20x+50+2y^2-32y+128-x^2-y^2-121-2xy-22x-22y=0$

$\therefore x^2+y^2-2xy-42x-54y+57=0$ **(Ans.)**

গ ধরি, অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্র দুইটি S(6, 1) ও S′ (10, 1)

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b এবং উৎকেন্দ্রিকতা = e তাহলে উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব = 2ae

এখন উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব,

$SS'=\sqrt{(6-10)^2+(1-1)^2}=\sqrt{16}=4$

$\therefore 2ae=4$ বা, $ae=2$ বা, $a\,.\,3=2$ $\therefore a=\frac{2}{3}$

$\therefore a^2=\frac{4}{9}$

আমরা জানি, $e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$ বা, $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}$

বা, $\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$ বা, $b^2=(3^2-1)\times\frac{4}{9}$ $\therefore b^2=\frac{32}{9}$

আবার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবিন্দু হলো অধিবৃত্তটির কেন্দ্র

$\therefore$ কেন্দ্র $=\left(\frac{6+10}{2}, \frac{1+1}{2}\right)=(8, 1)$

$\therefore$ (8, 1) কে মূলবিন্দু ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ

$\frac{(x-8)^2}{\frac{4}{9}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{32}{9}}=1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ দৃশ্যকল্প-১: কণিকের উপকেন্দ্র S(5, 2) এবং শীর্ষবিন্দু A(3, 4),

দৃশ্যকল্প-২: $6x^2+4y^2-36x-4y+43=0$ একটি সমীকরণ। /য. বো. ১৭/

ক. $4x^2-9y^2-1=0$ কণিকটি প্রমাণ আকারে প্রকাশ করে সনাক্ত কর। ২

খ. e = 1 হলে দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকের সমীকরণ বের কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $4x^2-9y^2-1=0$

বা, $4x^2-9y^2=1$

বা, $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$

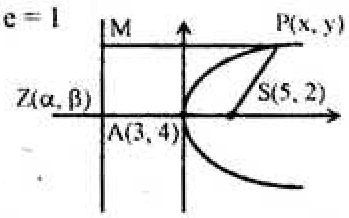
$\therefore \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$

ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

খ দেওয়া আছে, কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা e = 1

অর্থাৎ কণিকটি একটি পরাবৃত্ত।

দেওয়া আছে, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র S(5, 2) এবং শীর্ষবিন্দু A(3, 4).



AS রেখাটি অক্ষরেখা, ZM উহার নিয়ামক রেখা এবং পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক Z(α, β)

যেহেতু শীর্ষবিন্দু A(3, 4), ZS এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore 3=\frac{5+\alpha}{2}$

বা, $6=5+\alpha$

$\therefore \alpha=1$

এবং $4=\frac{2+\beta}{2}$

বা, $8=2+\beta$

$\therefore \beta=6$

$\therefore$ Z এর স্থানাঙ্ক (1, 6)

এখন, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা অর্থাৎ SZ রেখার সমীকরণ,

$\frac{x-5}{5-1}=\frac{y-2}{2-6}$

বা, $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{-4}$

বা, $x-5=-y+2$

$\therefore x+y-7=0$ ……… (i)

আবার, পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা অক্ষরেখার উপর লম্ব এবং Z বিন্দুগামী। (i) নং এর লম্বরেখার সমীকরণ,

$x-y+k=0$ ……… (ii)

(ii) নং রেখাটি Z(1, 6) বিন্দুগামী,

$\therefore 1-6+k=0$

$\therefore k=5.$

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x-y+5=0$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $x-y+5=0$ ……… (iii)

পরাবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু P(x, y) হলে

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, PS = PM

বা, $\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} = \frac{|x-y+5|}{\sqrt{1+1}}$

বা, $(x-5)^2+(y-2)^2 = \frac{(x-y+5)^2}{2}$

বা, $x^2-10x+25+y^2-4y+4 = \frac{x^2+y^2+25-2xy+10x-10y}{2}$

বা, $2x^2-20x+50+2y^2-8y+8$
$= x^2+y^2+25-2xy+10x-10y$

$\therefore$ $x^2+y^2-30x+2y+2xy+33=0$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত সমীকরণ,

$6x^2+4y^2-36x-4y+43=0$

বা, $6(x^2-6x)+4(y^2-y)=-43$

বা, $6(x^2-2.3.x+9)+4\left(y^2-2.\frac{1}{2}.y+\frac{1}{4}\right)=-43+54+1$

বা, $6(x-3)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=12$

বা, $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{3}=1$

$\therefore$ $\frac{(x-3)^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{(\sqrt{3})^2}=1$

ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

এখানে, $a=\sqrt{2}$ এবং $b=\sqrt{3}$

$\therefore$ $b>a$

উৎকেন্দ্রিকতা $=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ধরি, $x-3=X$ এবং $y-\frac{1}{2}=Y$

উপকেন্দ্রের জন্য $X=0,\ Y=\pm be$

বা, $x-3=0$

বা, $y-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $x=3$

বা, $y=\frac{1}{2}\pm 1$

$\therefore$ $y=\frac{3}{2}$

বা, $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $\left(3, \frac{1}{2}\pm\left(\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

$=\left(3,\frac{3}{2}\right),\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

এবং নিয়ামকের সমীকরণ,

$y-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

বা, $y-\frac{1}{2}=\pm 3$

$\therefore$ $y=\pm 3+\frac{1}{2}$

(+) নিয়ে, $y=3+\frac{1}{2}$

বা, $y=\frac{7}{2}$

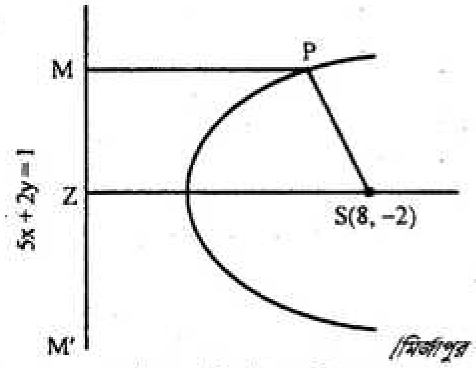
$\therefore$ $2y-7=0$ **(Ans.)**

(–) নিয়ে, $y=-3+\frac{1}{2}$

বা, $y=\frac{-5}{2}$

$\therefore$ $2y+5=0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯



[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

ক. $16x^2+25y^2=400$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা বের কর। ২

খ. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $\frac{SP}{PM}=\frac{5}{3}$ হয়, তবে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $16x^2+25y^2=400$

বা, $\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=1$

বা, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

বা, $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

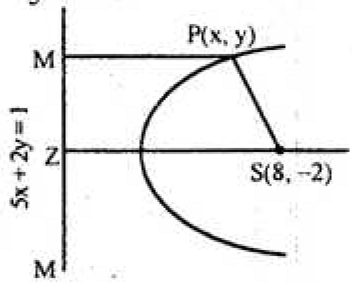
এখানে, a = 5 এবং b = 4 [$\therefore$ a > b]

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

$=\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}$

$=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\frac{3}{5}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, পরাবৃত্তের উপর P(x, y) যেকোন বিন্দু এবং S(8, –2) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং MZM′ এর নিয়ামক রেখা।



$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $5x+2y=1$

বা, $5x+2y-1=0$

সংজ্ঞানুসারে, SP = PM

বা, $SP^2=PM^2$

বা, $(x-8)^2+(y+2)^2=\left(\frac{5x+2y-1}{\sqrt{5^2+2^2}}\right)^2$

বা, $29(x^2-16x+64+y^2+4y+4)=25x^2+4y^2+1+20xy-10x-4y$

বা, $29x^2-25x^2+29y^2-4y^2-464x+10x+116y+4y+1972-1-20xy=0$

বা, $4x^2+25y^2-20xy-454x+120y+1971=0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\frac{SP}{PM}=\frac{5}{3}$

বা, $\frac{SP^2}{PM^2}=\frac{25}{9}$

বা, $9\ SP^2=25\ PM^2$

বা, $9\{(x-8)^2+(y+2)^2\}=25\left(\frac{5x+2y-1}{\sqrt{5^2+2^2}}\right)^2$

বা, $9\times 29(x^2-16x+64+y^2+4y+4)=25(25x^2+4y^2+1+20xy-10x-4y)$

বা, $261(x^2+y^2-16x+4y+68)=625x^2+100y^2+500xy-250x-100y+25$

বা, $625x^2-261x^2+100y^2-261y^2+500xy-250x+4176x-100y-1044y=17748-25$

$\therefore$ $364x^2-161y^2+500xy+3926x-1144y=17723$

যা নির্ণেয় কণিকটির সমীকরণ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১০ $(-2, 2)$ এবং $(-2, -4)$ একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দুইটি প্রান্তবিন্দু। *[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]*

ক. বৃত্ত কী কণিক? কেন? ২

খ. পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. $y^2 = 5x + 8$ এর শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বৃত্ত হলো উপবৃত্তের একটি সীমান্ত অবস্থা। যেহেতু বৃত্তের ক্ষেত্রে $e = 0$ অর্থাৎ $\frac{SP}{PM} = 0 \Rightarrow PM = \infty$, অর্থাৎ নিয়ামকটি অসীমে থাকে। অতএব বৃত্ত একটি কণিক, যার উৎকেন্দ্রিকতা 0 এবং নিয়ামক অসীমে থাকে।

খ ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু দুইটি $L(-2, 2)$ ও $L'(-2, -4)$

LL' এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক

$= \left(\frac{-2-2}{2}, \ \frac{2-4}{2}\right) = (-2, -1)$

$L(3, 5)$ ও $L'(3, -3)$ এর ভুজ অভিন্ন বলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা অর্থাৎ উপকেন্দ্রিক লম্ব y-অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β)

এখন, (α, β) শীর্ষবিন্দু ও অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ

$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ ... ... (i)

(i) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য,

$|4a| = LL' = (-2, 2)$ ও $(-2, -4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= |\sqrt{(-2+2)^2 + (2+4)^2}| = |\sqrt{6^2}| = \pm 6$

বা, $4a = \pm 6$

$\therefore \quad a = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

(i) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a + \alpha, \beta)$

$\therefore \quad a + \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -2 - a$ এবং $\beta = -1$

$a = \frac{3}{2}$ হলে, $\alpha = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

$a = -\frac{3}{2}$ হলে, $\alpha = -2 - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y + 1)^2 = 4 . \frac{3}{2}\left(x + \frac{7}{2}\right)$

বা, $y^2 + 2y + 1 = 3(2x + 7)$

$\therefore \quad y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$

এবং $(y + 1)^2 = 4 . \left(-\frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

বা, $y^2 + 2y + 1 = -3(2x + 1)$

$\therefore \quad y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$

গ দেওয়া আছে, $y^2 = 5x + 8$

ইহা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ

এখন, $y^2 = 5x + 8$

বা, $y^2 = 5\left(x + \frac{8}{5}\right)$

বা, $y^2 = 4 \times \frac{5}{4}\left(x + \frac{8}{5}\right)$

ধরি, $X = x + \frac{8}{5}$; $a = \frac{5}{4}$, $Y = y$

তাহলে, $Y^2 = 4aX$ ... ... (i)

(i) নং পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (0, 0) হলে,

$\therefore X = 0$

বা, $x + \frac{8}{5} = 0$

বা, $x = -\frac{8}{5}$

এবং $Y = 0$

$\therefore \quad y = 0$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$

আবার, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $X = a$

বা, $x + \frac{8}{5} = \frac{5}{4}$

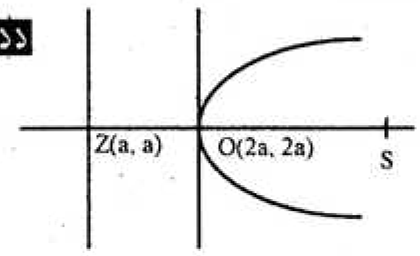
বা, $x = \frac{5}{4} - \frac{8}{5}$

বা, $x = \frac{25 - 32}{20}$

বা, $x = -\frac{7}{20}$

$\therefore \quad 20x + 7 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১১



O, S এবং Z যথাক্রমে শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র এবং পাদবিন্দু। *[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]*

ক. এমন দুইটি পরাবৃত্তের সমীকরণ লিখ যাদের অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষের সমান্তরাল। ২

খ. চিত্রানুযায়ী পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16(k+1)} = 1$ উপবৃত্তটি (3, 4) বিন্দুগামী হলে, 'k' এর মান, উৎকেন্দ্রিকতা এবং বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

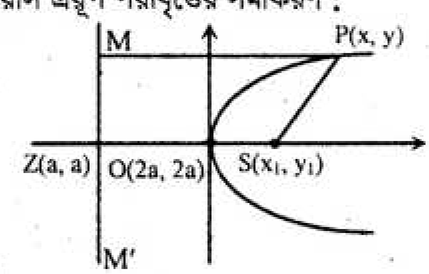
ক অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$(y - y_1)^2 = 4a(x - x_1)$

আবার, অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$(x - x_1)^2 = 4a(y - y_1)$

খ মনে করি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $S(x_1, y_1)$।



দেওয়া আছে, অক্ষরেখা ZOS এবং দিকাক্ষ MZM′ এর ছেদবিন্দু Z(a, a) এবং শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক O(2a, 2a)।

যেহেতু শীর্ষবিন্দু O(2a, 2a), ZS এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \quad 2a = \frac{a + x_1}{2}$

বা, $4a = a + x_1$

$\therefore \quad x_1 = 3a$

এবং $2a = \frac{a + y_1}{2}$

বা, $4a = a + y_1$

$\therefore \quad y_1 = 3a$

$\therefore$ উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক (3a, 3a)

এখন, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা অর্থাৎ ZS বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$\frac{x - a}{a - 3a} = \frac{y - a}{a - 3a}$

বা, $\frac{x - a}{-2a} = \frac{y - a}{-2a}$

বা, $x - a = y - a$

$\therefore \quad x - y = 0$ ... ... (i)

যেহেতু পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখা অক্ষরেখার উপর লম্ব এবং Z বিন্দুগামী

$\therefore$ (i) নং এর লম্বরেখার সমীকরণ,

$x + y + k = 0$ ... ... (ii)

(ii) নং রেখা Z(a, a) বিন্দুগামী,

$\therefore \quad a + a + k = 0$

$\therefore \quad k = -2a$

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $x + y - 2a = 0$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

বা, $SP^2 = PM^2$

বা, $(x - 3a)^2 + (y - 3a)^2 = \frac{(x + y - 2a)^2}{(\sqrt{1^2 + 1^2})^2}$

বা, $2(x^2 - 6ax + 9a^2 + y^2 - 6ay + 9a^2) = \{(x + y) - 2a\}^2$

বা, $2(x^2 + y^2 - 6ax - 6ay + 18a^2) = x^2 + y^2 + 2xy + 4a^2 - 4ax - 4ay$

বা, $2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 - 12ax + 4ax - 12ay + 4ay - 2xy + 36a^2 - 4a^2 = 0$

$\therefore$ $x^2 + y^2 - 8ax - 8ay - 2xy + 32a^2 = 0$

এটিই নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16(k+1)} = 1$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণটি (3, 4) বিন্দুগামী,

$\therefore$ $\frac{3^2}{25} + \frac{4^2}{16(k+1)} = 1$

বা, $\frac{9}{25} + \frac{16}{16(k+1)} = 1$

বা, $\frac{1}{k+1} = 1 - \frac{9}{25}$

বা, $\frac{1}{k+1} = \frac{25-9}{25}$

বা, $\frac{1}{k+1} = \frac{16}{25}$

বা, $25 = 16k + 16$

বা, $16k = 25 - 16$

বা, $16k = 9$

$\therefore$ $k = \frac{9}{16}$ **(Ans.)**

k এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16\left(1 + \frac{9}{16}\right)} = 1$

বা, $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

যেখানে, $a = 5, b = 5$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{5^2}{5^2}}$

$= \sqrt{1-1}$

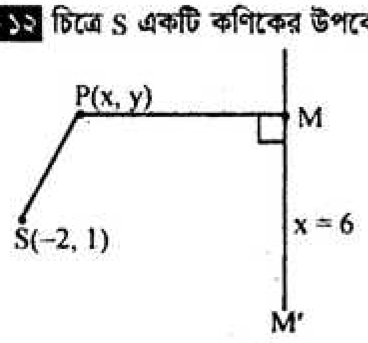
$= 0$ **(Ans.)**

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 5 = 10$ একক **(Ans.)**

এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \times 5 = 10$ একক **(Ans.)**

[বিঃদ্রঃ উৎকেন্দ্রিকতা 0 হলে কণিক উপবৃত্ত না হয়ে বৃত্ত হয়। সেক্ষেত্রে বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য ব্যাসের সমান হয়।]

প্রশ্ন ▶১২ চিত্রে S একটি কণিকের উপকেন্দ্র এবং P তার উপর একটি বিন্দু।



[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $3SP - 2PM = 0$ হয়, তাহলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। যেখানে, MM′ দিকাক্ষ রেখা। ৪

গ. যদি MM′ শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক হয়, তাহলে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র S। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

বা, $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ ……… (i)

(i) নং অধিবৃত্তের, $a = 4$

$b = 3$

$\therefore$ $e = \sqrt{1 + \frac{3^2}{4^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব $= 2ae$

$= 2 \times 4 \times \frac{5}{4} = 10$ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $3SP - 2PM = 0$

বা, $3SP = 2PM$

বা, $SP = \frac{2}{3} PM$

বা, $\frac{SP}{PM} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ $e = \frac{2}{3} < 1$

$\therefore$ কণিকটি একটি উপবৃত্ত।

এখন, $S(-2, 1)$ থেকে নিয়ামক রেখা $x - 6 = 0$

এর উপর লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{-2-6}{\sqrt{1^2}}\right| = 8 = l$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = 2a \cdot \frac{b^2}{a^2}$

$= 2a(1 - e^2) = 2e\left(\frac{a}{e} - ae\right)$

$= 2el = 2 \times \frac{2}{3} \times 8 = \frac{32}{3}$ **(Ans.)**

গ যেহেতু পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা তার শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমান্তরাল, কাজেই $x = 6$ এর সমান্তরাল রেখা $x = k$ হবে পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা। উপকেন্দ্র $(-2, 1)$ হতে নিয়ামক রেখার ওপর লম্ব দূরত্ব হচ্ছে এই উপকেন্দ্র হতে প্রদত্ত স্পর্শকটির ওপর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ।

$\therefore$ $\frac{-2-k}{\sqrt{1^2}} = 2 \times \frac{-2-6}{\sqrt{1^2}}$

$\therefore$ $k = 14$

সুতরাং নিয়ামক রেখার সমীকরণ $x = 14$ এবং উপকেন্দ্রদ $(-2, 1)$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{x - 14}{\sqrt{1^2}}\right)^2$

বা, $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 28x + 196$

বা, $y^2 - 2y + 32x - 191 = 0$

বা, $y^2 - 2y + 1 + 32x - 192 = 0$

$\therefore$ $(y - 1)^2 + 32(x - 6) = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৩ $P = x + y + 1$ এবং S ও A এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 1)$ এবং $(2, -3)$ *[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]*

ক. $3x^2 + 4y^2 = 12$ এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. S উপকেন্দ্র এবং A শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. কোনো কণিকের নিয়ামক $P = 0$, উপকেন্দ্র S এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ হলে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $3x^2 + 4y^2 = 12$

বা, $\frac{x^2}{\frac{12}{3}} + \frac{y^2}{\frac{12}{4}} = 1$

বা, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

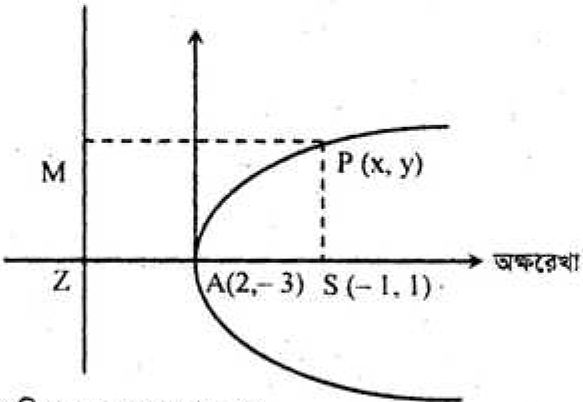
একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a^2 = 4$ এবং $b^2 = 3$

$\therefore a = 2$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$ একক **(Ans.)**

খ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S (– 1, 1) এবং শীর্ষবিন্দু A(2, –3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাটি এর অক্ষরেখা। মনে করি, অক্ষরেখাটি দিকাক্ষকে Z বিন্দুতে ছেদ করে।



ধরি, Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

যেহেতু AS = AZ

এবং $-3 = \frac{\beta + 1}{2}$ ∴ $2 = \frac{\alpha - 1}{2}$

∴ $\beta = -7$ বা, $\alpha = 4 + 1$ ∴ $\alpha = 5$

∴ Z-এর স্থানাঙ্ক (5, – 7)

অক্ষ ZS-এর ঢাল $= \frac{-7-1}{5+1} = \frac{-4}{3}$

অতএব, ZS-এর সমীকরণ,

$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 1)$

বা, $3y - 3 = -4x - 4$

∴ $4x + 3y + 1 = 0$

আবার, নিয়ামক রেখা অক্ষের উপর লম্ব, অতএব, নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

নিয়ামক রেখা (5, – 7) বিন্দুগামী

∴ $3.5 - 4(-7) + k = 0$

∴ $k = -43$

∴ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $3x - 4y - 43 = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P = x + y + 1$

P = 0 হলে, নিয়ামকের সমীকরণ, $x + y + 1 = 0$

উপকেন্দ্র S(–1, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{2}$

$e = \sqrt{2} > 1$ হওয়ায় কণিকটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

∴ অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2}\left(\frac{x+y+1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)$

বা, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2.\frac{(x+y+1)^2}{2}$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - x^2 - y^2 - 1 - 2xy - 2x - 2y = 0$

বা, $1 - 2xy - 4y = 0$

∴ $4y + 2xy = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ দৃশ্যকল্প-১: একটি পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $4x + 3y = 5$ এবং শীর্ষবিন্দু (3, 1)।

দৃশ্যকল্প-২: $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

ক. $16x^2 - 25y^2 = 400$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উপবৃত্তটির উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $16x^2 - 25y^2 = 400$

বা, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

∴ $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

একে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 5, b = 4$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e^2 = \frac{25 + 16}{25} = \frac{41}{25}$

∴ $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) \equiv \left(\pm 5.\frac{\sqrt{41}}{5}, 0\right)$

$\equiv (\pm\sqrt{41}, 0)$ **(Ans.)**

খ মনে করি, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র S(α, β) এবং শীর্ষ A(3, 1)। এর অক্ষরেখা হবে তার নিয়ামক রেখা $4x + 3y - 5 = 0$ এর উপর লম্ব এবং A(3, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে। $4x + 3y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব যেকোনো রেখার সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$ কিন্তু $3x - 4y + k = 0$ রেখাটি (3, 1) বিন্দু দিয়ে যায়। অতএব আমরা পাই,

$3(3) - 4(1) + k = 0$ ∴ $k = -5$

সুতরাং, অক্ষরেখার সমীকরণ $3x - 4y - 5 = 0$

এখন নিয়ামক রেখা ও অক্ষরেখার সমীকরণ সমাধান করলে এদের ছেদবিন্দু Z পাওয়া যাবে।

∴ $4x + 3y - 5 = 0$

এবং $3x - 4y - 5 = 0$ হতে আমরা পাই,

$\frac{x}{-15-20} = \frac{y}{-15+20} = \frac{1}{-16-9}$

বা, $x = \frac{-35}{-25} = \frac{7}{5}$ এবং $y = \frac{5}{-25} = -\frac{1}{5}$

∴ Z এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

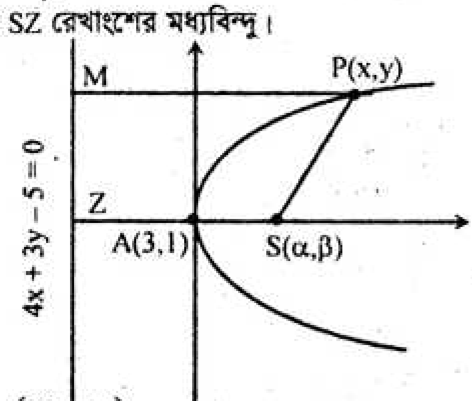
এখন, শীর্ষ A(3, 1) হচ্ছে SZ রেখাংশের মধ্যবিন্দু।

∴ $3 = \frac{\alpha + \frac{7}{5}}{2}$

∴ $\alpha = \frac{23}{5}$

এবং $1 = \frac{\beta - \frac{1}{5}}{2}$

∴ $\beta = \frac{11}{5}$



উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{23}{5}, \frac{11}{5}\right)$

যদি পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু P(x, y) হয়,

তাহলে $\sqrt{\left(x - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2} = \left|\frac{4x + 3y - 5}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right|$

বা, $25\left\{\left(x - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2\right\} = (4x + 3y - 5)^2$

বা, $25\left\{x^2 + y^2 - \frac{46}{5}x - \frac{22}{5}y + \frac{529}{25} + \frac{121}{25}\right\}$

$= 16x^2 + 9y^2 + 25 + 24xy - 40x - 30y$

বা, $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 190x - 80y + 625 = 0$

∴ $(3x - 4y)^2 - 190x - 80y + 625 = 0$

যা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$

বা, $4(x^2 - 4x) + 5(y^2 + 2y) + 1 = 0$

বা, $4(x^2 - 2x2 + 2^2 - 4) + 5(y^2 + 2y.1 + 1^2 - 1) + 1 = 0$

বা, $4(x-2)^2 - 16 + 5(y+1)^2 - 5 + 1 = 0$

বা, $4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20$

বা, $\frac{4(x-2)^2}{20} + 5\frac{(y+1)^2}{20} = 1$ ∴ $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{4} = 1$

এখানে, $X = x - 2$, $Y = y + 1$

বা, $\frac{X^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$

একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a=\sqrt{5}, b=2$

উৎকেন্দ্রিকতা e হলে, $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}^2-2^2}{\sqrt{5}^2}=\frac{5-4}{5}=\frac{1}{5}$

$\therefore\ e=\frac{1}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}$ [সূত্রের সাহায্যে]

$=2.\frac{2^2}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$ একক **(Ans.)**

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\equiv(\pm ae, 0)$

এখানে, $X=\pm ae$

$\therefore\ x-2=\pm\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ x=2\pm1$

$=3$ অথবা 1

এবং $y=0$

বা, $y+1=0$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(3, -1)$ এবং $(1, -1)$ **(Ans.)**

নিয়ামকের সমীকরণ, $X=\pm\frac{a}{e}$

বা, $x-2=\pm\frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

বা, $x-2=\pm5$

বা, $x=2\pm5$

$\therefore\ x=7$ অথবা $x=-3$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $x-7=0$ এবং $x+3=0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৫ **দৃশ্যকল্প-১:** $y^2=16x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6।

দৃশ্যকল্প-২: একটি অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ, উপকেন্দ্র এবং উৎকেন্দ্রিকতা যথাক্রমে $2x+y=1$, $(1, 1)$ এবং $\sqrt{3}$। *[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]*

ক. $y^2=4y+4x-16$ কণিকটির শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $y^2=4y+4x-16$

$\Rightarrow\ y^2-4y=4x-16$

$\Rightarrow\ y^2-2.2.y+4=4x-16+4$

$\Rightarrow\ (y-2)^2=4x-12$

$\Rightarrow\ (y-2)^2=4(x-3)$

ধরি, $y-2=Y$ এবং $x-3=X$

$\therefore\ Y^2=4X$

$=4.1.X$

$=4aX$ যেখানে $a=1$

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$

অর্থাৎ $X=0$	$Y=0$
বা, $x-3=0$	বা, $y-2=0$
বা, $x=3$	বা, $y=2$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 2)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y^2=16x\ \cdots\cdots\cdots$ (i)

বা, $y^2=4.4.x$

একে $y^2=4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=4$

আমরা জানি, উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $=a+x$

$\therefore\ 6=4+x$

$\therefore\ x=2$

(i) নং সমীকরণে x-এর মান বসিয়ে পাই, $y^2=32$

$\therefore\ y=\pm4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \pm4\sqrt{2})$ **(Ans.)**

গ মনে করি, $P(x, y)$ অধিবৃত্তের ওপর যে কোনো বিন্দু।

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(1, 1)$ হতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

নিয়ামক হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $=\left|\frac{2x+y-1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|=\left|\frac{2x+y-1}{\sqrt{5}}\right|$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞা হতে আমরা পাই, $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{3}.\left|\frac{2x+y-1}{\sqrt{5}}\right|$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=3\left(\frac{2x+y-1}{\sqrt{5}}\right)^2$

$\Rightarrow 5\{(x-1)^2+(y-1)^2\}=3(2x+y-1)^2$

$\Rightarrow 7x^2-2y^2+12xy-2x+4y-7=0$ এটিই নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ।

প্রশ্ন ▶১৬ **দৃশ্যকল্প-১:** একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $A(-1, 1)$

দৃশ্যকল্প-২: একটি অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষ বরাবর অবস্থিত এবং এর উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm13)$ *[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. $2x^2+3y^2=1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের উল্লিখিত পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার দিকাক্ষের সমীকরণ $x+y+1=0$. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 একক। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $2x^2+3y^2=1$

বা, $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

$=\sqrt{1-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়, $(\pm ae, 0)\equiv\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$

$\equiv\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

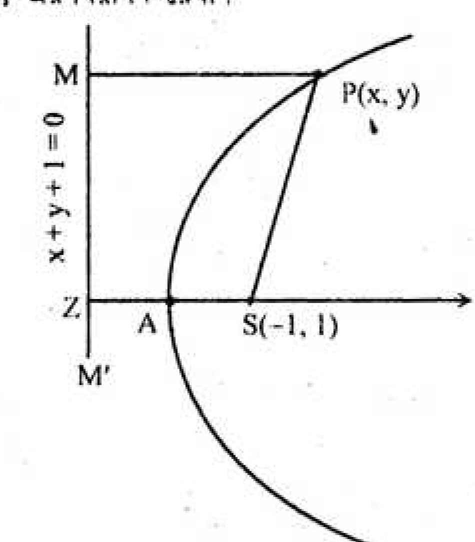
দিকাক্ষের সমীকরণ, $x=\pm\frac{a}{e}$

বা, $x=\pm\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

বা, $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

বা, $\sqrt{2}x=\pm\sqrt{3}$ **(Ans.)**

খ পরাবৃত্তের ওপর $P(x, y)$ যেকোনো বিন্দু ও $(-1, 1)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং MZM′ এর নিয়ামক রেখা।



∴ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x + y + 1 = 0$

সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

বা, $SP^2 = PM^2$

বা, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{(x+y+1)^2}{(\sqrt{2})^2}$

বা, $2\{(x+1)^2 + (y-1)^2\} = (x+y+1)^2$

বা, $2(x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2y + 2x$

বা, $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 3 - 2xy = 0$

∴ $(x - y)^2 + 2x - 6y + 3 = 0$

যা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 2.SZ

SZ = নিয়ামক থেকে $S(-1, 1)$ উপকেন্দ্রের লম্ব দূরত্ব

$= \frac{-1+1+1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ **(Ans.)**

গ মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ……… (i)

∴ অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = 24$

∴ $a = \frac{24}{2} = 12$

এখানে, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (0, 13) এবং (0, –13)

∴ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(0-0)^2 + (13+13)^2}$

$= \sqrt{(26)^2} = 26$

∴ $2be = 26$

বা, $be = 13$

∴ $e = \frac{13}{b}$

আমরা পাই, $e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\left(\frac{13}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{12}{b}\right)^2$

বা, $\frac{(13)^2}{b^2} - \frac{(12)^2}{b^2} = 1$

বা, $b^2 = 169 - 144 = 25$

∴ $b = 5$

a এবং b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{y^2}{5^2} - \frac{x^2}{(12)^2} = 1$ ……… (ii)

∴ $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ উদ্দীপক-১: $x = ay^2 + by + c$ কণিকটি (5, 0) বিন্দুগামী এবং এর শীর্ষবিন্দু (4, –3)।

উদ্দীপক-২: $4x^2 + qy^2 = 80$ কণিকটি $(0, \pm 4)$ বিন্দুগামী। *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$, উপকেন্দ্র (2, 5) এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $12x + 5y = 1$। ২

খ. উদ্দীপক-১ এ বর্ণিত a, b, c এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপক-২ এ বর্ণিত কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, P(x, y) অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু

∴ উপকেন্দ্র (2, 5) থেকে P(x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$

নিয়ামক হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{12x + 5y - 1}{\sqrt{(12)^2 + (5)^2}}\right|$

$= \left|\frac{12x + 5y - 1}{\sqrt{144 + 25}}\right| = \left|\frac{12x + 5y - 1}{13}\right|$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞা হতে আমরা পাই,

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{3}.\left|\frac{12x + 5y - 1}{13}\right|$

বা, $(x-2)^2 + (y-5)^2 = \frac{3}{169}(12x + 5y - 1)^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = \frac{3}{169}(144x^2 + 120xy + 25y^2 - 24x - 10y + 1)$

বা, $169x^2 - 676x + 676 + 169y^2 - 1690y + 4225 = 432x^2 + 360xy + 75y^2 - 72x - 30y + 3$

∴ $263x^2 - 94y^2 + 360xy + 604x + 1660y - 4898 = 0$

এটিই নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ **(Ans.)**

খ উদ্দীপক-১ হতে প্রদত্ত সমীকরণ, $x = ay^2 + by + c$ ……… (i)

কণিকটি x অক্ষের সমান্তরাল এবং শীর্ষবিন্দু (4, –3) এরূপ কণিকের সমীকরণ, $(y + 3)^2 = 4a'(x - 4)$ ……… (ii)

যেহেতু (ii) নং সমীকরণটি (5, 0) বিন্দুগামী,

$(0 + 3)^2 = 4a'(5 - 4)$

বা, $9 = 4a'.1$

বা, $4a' = 9$

∴ $a' = \frac{9}{4}$

(ii) নং এ a' এর মান বসিয়ে পাই, $(y + 3)^2 = 4 \times \frac{9}{4}(x - 4)$

বা, $y^2 + 6y + 9 = 9x - 36$

বা, $9x = y^2 + 6y + 45$

∴ $x = \frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{3}y + 5$ ……… (iii)

(i) ও (iii) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$a = \frac{1}{9}$

$b = \frac{2}{3}$

এবং $c = 5$

∴ $a = \frac{1}{9}, b = \frac{2}{3}$ এবং $c = 5$ **(Ans.)**

গ উদ্দীপক-২ হতে প্রদত্ত সমীকরণ, $4x^2 + 2y^2 = 80$ ……… (i)

(i) নং কণিকটি $(0, \pm 4)$ বিন্দুগামী

∴ $4(0)^2 + q(\pm 4)^2 = 80$

বা, $16q = 80$

বা, $q = \frac{80}{16}$

∴ $q = 5$

q এর মান (i) নং বসিয়ে পাই, $4x^2 + 5y^2 = 80$

বা, $\frac{4x^2}{80} + \frac{5y^2}{80} = \frac{80}{80}$ [উ: প: কে 80 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

বা, $\frac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ ……… (ii)

সমীকরণ (ii) হতে পাই, কণিকটি একটি উপবৃত্ত যার $a = 2\sqrt{5}$ এবং $b = 4$ [যেখানে $a > b$]

∴ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{20}} = \sqrt{\frac{4}{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm ae, 0) = (\pm 2\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}, 0) = (\pm 2, 0)$ **(Ans.)**

এবং শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm a, 0) = (\pm 2\sqrt{5}, 0)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ (i) একটি উপবৃত্তের ফোকাস (– 1, 1), নিয়ামক রেখা $2x + y = 4$ এবং $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $2y^2 - x^2 + 4x + 4y - 10 = 0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। *[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং ঋণাত্মক দিকের প্রান্তবিন্দুর সংযোগরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

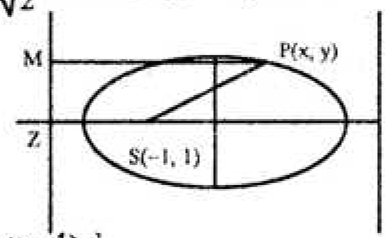
খ. উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রশ্নটি অসঙ্গতিপূর্ণ।

খ মনে করি, উপবৃত্তের ফোকাস S(−1, 1) নিয়ামকরেখা MZ এর সমীকরণ $2x + y - 4 = 0$, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং P(x, y) উপবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু।



উপবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে পাই,

$SP = e.MP$

বা, $SP^2 = e^2MP^2$

বা, $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2x + y - 4}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right)^2$

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(4x^2 + y^2 + 16 + 4xy - 8y - 16x)$

বা, $10x^2 + 20x + 10 + 10y^2 - 20y + 10 = 4x^2 + y^2 + 16 + 4xy - 8y - 16x$

বা, $6x^2 + 9y^2 - 4xy + 36x - 12y + 4 = 0$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ : $2y^2 - x^2 + 4x + 4y - 10 = 0$

বা, $2y^2 + 4y + 2 - x^2 + 4x - 4 - 10 - 2 + 4 = 0$

বা, $2(y^2 + 2.y.1 + 1^2) - (x^2 - 2.x.2 + 2^2) - 10 - 2 + 4 = 0$

বা, $2(y + 1)^2 - (x - 2)^2 - 8 = 0$

বা, $2(y + 1)^2 - (x - 2)^2 = 8$

বা, $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{8} = 1$

একে $\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = \sqrt{8}, b = 2, X = x - 2, Y = y + 1$

উপকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{8}{4}} = \sqrt{3}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 8}{2} = 8$ একক **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ : $Y = \pm be$

$\therefore\ y + 1 = \pm 2.\sqrt{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১: কণিকের উপকেন্দ্র S(5, 2) এবং শীর্ষবিন্দু A(3, 4)
দৃশ্যকল্প-২: $6x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 43 = 0$ একটি সমীকরণ।

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, ± 13). ২

খ. e = 1 হলে দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকের সমীকরণ বের কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্র (0, ± 13), y অক্ষের উপর অবস্থিত এবং অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ। সুতরাং এর আড় অক্ষটি y-অক্ষ বরাবর।

ধরি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ... ... (i)

(i) অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a একক এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, ± be)

প্রশ্নমতে, 2a = 24 বা, a = 12 এবং

$\pm be = \pm 13$ বা, $be = 13$

আবার, $a^2 = b^2e^2 - b^2$

বা, $12^2 = 13^2 - b^2$ বা, $b^2 = 13^2 - 12^2$

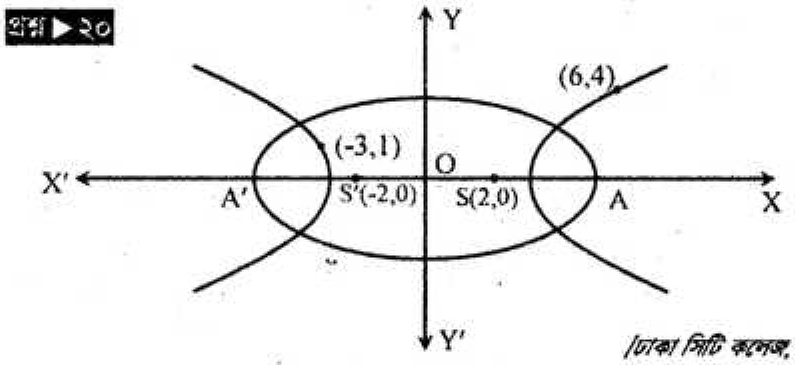
$\therefore\ b^2 = 5^2 = 25$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল-৮(খ) নং দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল-৮(গ) নং দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ২০



[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]

ক. $y^2 - 4x + 8 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের উপবৃত্তটির AA′ = 8 হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $y^2 - 4x + 8 = 0$

বা, $y^2 = 4x - 8$

বা, $y^2 = 4.1.(x - 2)$

উপকেন্দ্র (a, 0)

বা, $X = a,\quad Y = 0$

বা, $x - 2 = 1,\quad y = 0$

বা, $x = 3,\quad y = 0$

$\therefore$ উপকেন্দ্র (3, 0) **(Ans.)**

খ মনে করি, P(x, y) চিত্রের উপবৃত্তের উপরিস্থ একটি বিন্দু।

$\therefore$ উপবৃত্তের ধর্মানুসারে,

$PS + PS' = AA'$

বা, $\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2} = 8$ [AA′ = 8]

বা, $\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 8$

বা, $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 8 - \sqrt{(x+2)^2+y^2}$

বা, $(x - 2)^2 + y^2 = 64 - 16\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2 + y^2$

[উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(x - 2)^2 - (x + 2)^2 = 64 - 16\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

বা, $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 16\sqrt{(x+2)^2+y^2} - 64$

[উভয়পক্ষকে (−1) দ্বারাগুণ করে]

বা, $4.x.2 = 16\sqrt{(x+2)^2+y^2} - 64$ [$\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$]

বা, $8x = 16\sqrt{(x+2)^2+y^2} - 64$

বা, $x = 2\sqrt{(x+2)^2+y^2} - 8$

বা, $(x + 8)^2 = \{2\sqrt{(x+2)^2+y^2}\}^2$

বা, $x^2 + 16x + 64 = 4\{(x + 2)^2 + y^2\}$

বা, $x^2 + 16x + 64 = 4(x^2 + 4x + 4) + 4y^2$

বা, $x^2 + 16x + 64 = 4x^2 + 16x + 16 + 4y^2$

বা, $3x^2 + 4y^2 + 16 - 64 = 0$

$\therefore\ 3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$ **(Ans.)**

গ চিত্র হতে যেহেতু অধিবৃত্তের আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত।

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (1)

কিন্তু অধিবৃত্তটি (−3, 1) এবং (6, 4) বিন্দুগামী [উদ্দীপকের চিত্র হতে]

$\therefore$ x = − 3 এবং y = 1 বসিয়ে (1) সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1$

বা, $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ .... (2)

যেহেতু (1) অধিবৃত্তটি (6, 4) বিন্দুগামী

$\therefore\ \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$ ... ... (3)

(2) কে 4 দ্বারা গুণ করে, (3) বিয়োগ করে পাই,

$\frac{36}{a^2} - \frac{36}{a^2} - \frac{4}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 4 - 1$

বা, $\frac{12}{b^2} = 3$ বা, $b^2 = 4$

$\therefore\ b = 2$

b এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{2^2} = 1$$

বা, $\frac{9}{a^2} = 1 + \frac{1}{4}$ বা, $\frac{9}{a^2} = \frac{5}{4}$ বা, $a^2 = \frac{9 \times 4}{5} = \frac{36}{5}$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $\frac{x^2}{\frac{36}{5}} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

$\therefore$ $\frac{5x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২১ (i) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (−1, 1) এবং শীর্ষ (2, −3)

(ii) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. পরাবৃত্তটির অক্ষরেখার সমীকরণ বের কর। ২

খ. পরাবৃত্তের সমীকরণ বের কর। ৪

গ. $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটি (0, 5) বিন্দুগামী। যার শীর্ষ উপবৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত। a, b, c এর মান বের কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (−1, 1) এবং শীর্ষ (2, −3)

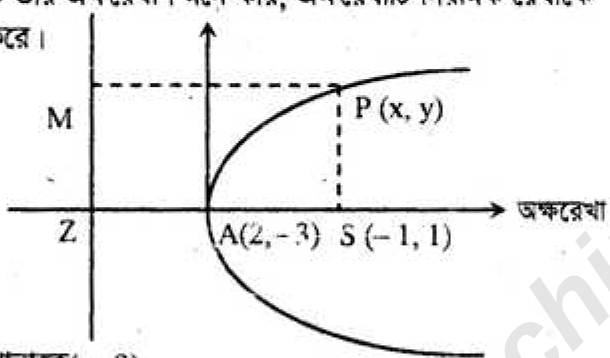
$\therefore$ পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ, $\frac{x+1}{-1-2} = \frac{y-1}{1+3}$

বা, $4x + 4 = -3y + 3$

বা, $4x + 3y + 4 - 3 = 0$

$\therefore$ $4x + 3y + 1 = 0$ **(Ans.)**

খ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(− 1, 1) এবং শীর্ষবিন্দু A(2, −3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাটি তার অক্ষরেখা। মনে করি, অক্ষরেখাটি নিয়ামক রেখাকে Z বিন্দুতে ছেদ করে।



ধরি, Z বিন্দুরস্থানাঙ্ক(α, β).

যেহেতু AS = AZ

$2 = \frac{\alpha - 1}{2}$ এবং $-3 = \frac{\beta + 1}{2}$ $\therefore \beta = -7$

বা, $\alpha = 4 + 1$ $\therefore \alpha = 5$

Z-এর স্থানাঙ্ক(5, − 7)

অক্ষ ZS-এর ঢাল $= \frac{-7-1}{5+1} = \frac{-4}{3}$

অতএব, ZS-এর সমীকরণ,

$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 1)$

বা, $3y - 3 = -4x - 4$

$\therefore 4x + 3y + 1 = 0$

আবার, নিয়ামক অক্ষের সাথে লম্ব।

অতএব, নিয়ামকের সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

নিয়ামক (5, − 7) বিন্দুগামী

সুতরাং $3.5 - 4(-7) + k = 0$ $\therefore$ $k = -43$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $3x - 4y - 43 = 0$

পরাবৃত্তের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু(x, y) হলে সংজ্ঞানুসারে পাই,

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \left|\frac{3x - 4y - 43}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right|$$

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{(3x - 4y - 43)^2}{25}$ [বর্গকরে]

বা, $25(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = 9x^2 + 16y^2 + 1849 - 24xy - 258x + 344y$

বা, $25x^2 - 9x^2 + 25y^2 - 16y^2 + 50x + 258x - 50y - 344y + 24xy + 50 - 1849 = 0$

$\therefore$ $16x^2 + 9y^2 + 308x - 394y + 24xy - 1799 = 0$ **(Ans.)**

গ $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র (−2, 3)

$y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল।

পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু (−2, 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এর পরাবৃত্তের সমীকরণ

$(x + 2)^2 = 4a(y - 3)$ .... (i)

যেহেতু (i) পরাবৃত্তটি (0, 5) বিন্দুগামী

$(0 + 2)^2 = 4 \cdot a(5 - 3)$

বা, $4 = 4.a.2$

বা, $8a = 4$

$\therefore$ $a = \frac{1}{2}$

(i) নং এ $a = \frac{1}{2}$ বসিয়ে,

$(x + 2)^2 = 4.\frac{1}{2}(y - 3)$

বা, $x^2 + 4x + 4 = 2y - 6$

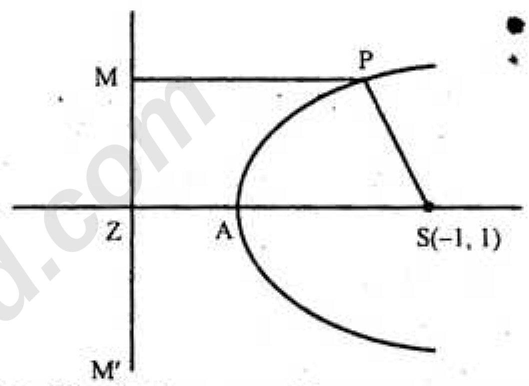
বা, $x^2 + 4x + 10 = 2y$

বা, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই

$a = \frac{1}{2}$, b = 2, c = 5 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২



চিত্রটি একটি কণিক নির্দেশ করে যার নিয়ামক রেখা MZM′.

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]

ক. $9x^2 - 25y^2 = 225$ কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের চিত্রটিতে A(2, −3) হলে, MZM′ এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে SP : PM = 1 : 2 এবং MZM′ রেখার সমীকরণ $x - y + 3 = 0$ হলে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত কণিকের সমীকরণ, $9x^2 - 25y^2 = 225$

বা, $\frac{9x^2}{225} - \frac{25y^2}{225} = 1$

$\therefore$ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\therefore$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a^2 = 25$, $b^2 = 9$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{1 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25 + 9}{25}}$

$= \frac{\sqrt{34}}{5}$ **(Ans.)**

খ চিত্র হতে, উপকেন্দ্র S(− 1, 1) এবং শীর্ষবিন্দু A(2, −3)

চিত্রের কণিকটি পরাবৃত্ত।

ধরি, Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

আমরা জানি, AZ = AS

$\frac{x - 1}{2} = 2$ এবং $\frac{y + 1}{2} = -3$

বা, $x - 1 = 4$ বা, $y + 1 = -6$

$\therefore$ $x = 5$ $\therefore$ $y = -7$

$\therefore$ Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, −7)

A ও S বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x+1}{-1-2} = \frac{y-1}{1-(-3)}$

বা, $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{4}$

বা, $4x + 4 = -3y + 3$

$\therefore$ $4x + 3y + 1 = 0$ ... ... (i)

(i) নং রেখার লম্বরেখার সমীকরণ, $3x - 4y + k = 0$, যা $(5, -7)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ $3 \times 5 - (4)(-7) + k = 0$

$\therefore$ $k = -43$

$\therefore$ MZM′ এর সমীকরণ, $3x - 4y - 43 = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, SP : PM = 1 : 2

বা, $\frac{SP}{PM} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ PM = 2SP ... ... (i)

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক S(– 1, 1) এবং MZM′ রেখার সমীকরণ $x - y + 3 = 0$

(i) নং হতে পাই, $\left|\frac{x-y+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = 2 \times \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

বা, $\frac{(x-y+3)^2}{2} = 4\{(x+1)^2 + (y-1)^2\}$

বা, $(x-y+3)^2 = 8(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1)$

বা, $(x-y)^2 + 6(x-y) + 9 = 8x^2 + 16x + 8 + 8y^2 - 16y + 8$

বা, $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y + 9 = 8x^2 + 16x + 8y^2 - 16y + 16$

$\therefore$ $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$

যা নির্ণেয় কণিকের সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৩ $x^2 = 4(y-1)$ ... ... (i), $y^2 = 4(x-1)$ ... ... (ii)

[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

ক. m এর মান কত হলে y = mx সরলরেখাটি (i) পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে। ২

খ. উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে (i) ও (ii) নং পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়গামী উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (2, – 3), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং দিকাক্ষ (i) ও (ii) নং পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 = 4(y-1)$

সরলরেখাটির সমীকরণ, $y = mx$

$\therefore x = \frac{y}{m}$

$\therefore$ $\frac{y^2}{m^2} = 4(y-1)$

বা, $y^2 = 4m^2y - 4m^2$

$\therefore$ $y^2 - 4m^2y + 4m^2 = 0$ ... ... (1)

(1) নং সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান অর্থাৎ নিশ্চায়ক 0 হলে সরলরেখাটি পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করবে।

$\therefore$ $(-4m^2)^2 - 4.4m^2.1 = 0$

বা, $16m^4 - 16m^2 = 0$

বা, $16m^2(m^2 - 1) = 0$

বা, $m^2(m^2 - 1) = 0$

$\therefore$ $m = 0$ অথবা, $m^2 - 1 = 0$

বা, $m^2 = 1$

$\therefore$ $m = \pm 1$

m = 0 হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ x অক্ষরেখার সমীকরণ হয়। কিন্তু পরাবৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে না।

$\therefore m \neq 0 \therefore$ m এর মান ± 1 **(Ans.)**

খ মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (1)

(i) নং পরাবৃত্তটি $x^2 = 4(y-1)$

বা, $x^2 = 4.1(y-1)$

$\therefore$ উপকেন্দ্র (0, 1)

(ii) নং পরাবৃত্তটি $y^2 = 4(x-1)$

বা, $y^2 = 4.1(x-1)$

$\therefore$ উপকেন্দ্র (1, 0)

শর্তমতে,

(1) নং উপবৃত্তটি এই দুই বিন্দুগামী।

$\frac{1}{b^2} = 1$

বা, $b^2 = 1$

$\therefore b = 1$

এবং $\frac{1}{a^2} = 1$

বা, $a^2 = 1$

$\therefore a = 1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{1}{1}} = 0$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) \equiv (0, 0)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, উপবৃত্তটির উপকেন্দ্র (2, – 3)

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{2}$

(i) ও (ii) নং পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে (0, 1) এবং (1, 0)

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ, $\frac{x-0}{0-1} = \frac{y-1}{1-0}$

বা, $x = 1 - y$

$\therefore x + y - 1 = 0$

$\therefore$ উপবৃত্তটির সমীকরণ, $\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{x+y-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$

বা, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{1}{4}\frac{(x+y-1)^2}{2}$

বা, $8(x^2 - 4x + 4) + 8(y^2 + 6y + 9) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y$

বা, $8x^2 - 32x + 32 + 8y^2 + 48y + 72 - x^2 - y^2 - 1 - 2xy + 2x + 2y = 0$

$\therefore$ $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 30x + 50y + 103 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৪ একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(– 1, 1) এবং শীর্ষ A(2, – 3)

[অগ্রণী স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। ২

খ. পরাবৃত্তের অক্ষ ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $3x^2 + 4y^2 = 12$

বা, $\frac{3x^2}{12} + \frac{4y^2}{12} = 1$ বা, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ... ... (i)

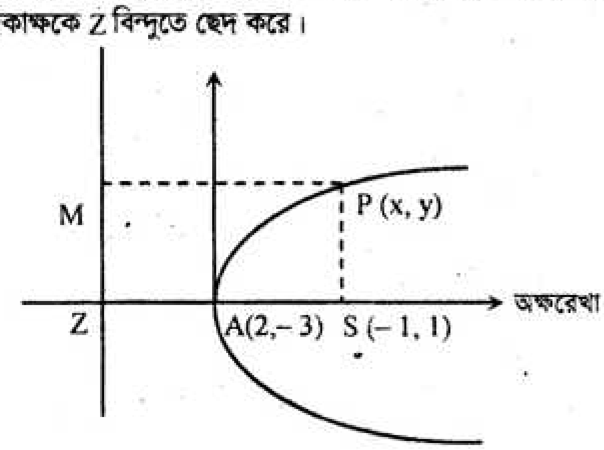
$\therefore$ $a = 2, b = \sqrt{3}$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm ae, 0) \equiv (\pm 2\frac{1}{2}, 0) \equiv (\pm 1, 0)$ **(Ans.)**

খ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S (– 1, 1) এবং শীর্ষবিন্দু A(2, –3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাটি তার অক্ষরেখা। মনে করি, অক্ষরেখাটি দিকাক্ষকে Z বিন্দুতে ছেদ করে।



ধরি, Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

যেহেতু AS = AZ

এবং $-3 = \frac{\beta + 1}{2}$

$\therefore 2 = \frac{\alpha - 1}{2}$

$\alpha = 4 + 1 \;\therefore \alpha = 5$ এবং $\beta = -7$

$\therefore$ Z-এর স্থানাঙ্ক $(5, -7)$

অক্ষ ZS-এর ঢাল $= \frac{-7-1}{5+1} = \frac{-4}{3}$

অতএব, ZS-এর সমীকরণ,

$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 1)$

বা, $3y - 3 = -4x - 4$

$\therefore 4x + 3y + 1 = 0$ (Ans.)

আবার, নিয়ামক রেখা অক্ষের লম্ব, অতএব, নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

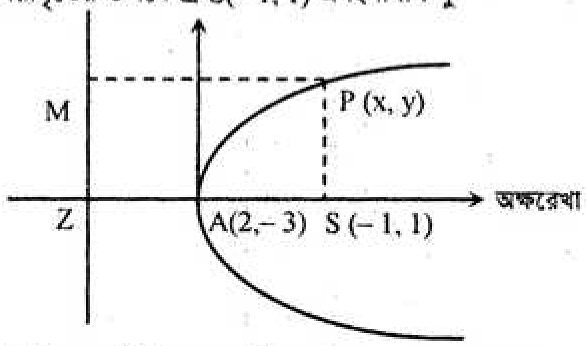
নিয়ামক রেখা $(5, -7)$ বিন্দুগামী

$\therefore 3.5 - 4(-7) + k = 0$

$\therefore k = -43$

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $3x - 4y - 43 = 0$ (Ans.)

গ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(-1, 1)$ এবংশীর্ষবিন্দু



'খ' হতে, নিয়ামকের সমীকরণ, $3x - 4y - 43 = 0$

পরাবৃত্তের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু (x, y) হলে সংজ্ঞানুসারে পাই,

$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \left|\frac{3x - 4y - 43}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right|$

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{(3x - 4y - 43)^2}{25}$ [বর্গ করে]

বা, $25(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = 9x^2 + 16y^2 + 1849 - 24xy - 258x + 344y$

বা, $25x^2 - 9x^2 + 25y^2 - 16y^2 + 50x + 258x - 50y - 344y + 24xy + 50 - 1849 = 0$

$\therefore 16x^2 + 9y^2 + 308x - 394y + 24xy - 1799 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৫ দৃশ্যকল্প-১: $x^2 = 4(1 - y)$

দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 16x$

[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা]

ক. দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লেখিত পরাবৃত্তের শীর্ষ ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লেখিত পরাবৃত্তের যে বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$, উপকেন্দ্র $(1, -8)$ এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x - 4y = 10$ ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^2 = 4(1 - y) \cdots\cdots\cdots$ (i)

বা, $x^2 = 4.1.(1 - y)$

$\therefore x^2 = 4.(-1).(y - 1)$

ধরি, X = x এবং Y = y – 1

$\therefore$ (i) নং সমীকরণটি দাঁড়ায়, $X^2 = 4(-1)Y \cdots\cdots\cdots$ (ii)

(ii) নং কে $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$\therefore a = -1.$

$\therefore$ (ii) নং এর শীর্ষবিন্দু (0, 0)

অর্থাৎ, X = 0 এবং Y = 0

বা, x = 0 এবং y – 1 = 0

$\therefore$ x = 0 $\therefore$ y = 1

$\therefore$ (i) নং এর শীর্ষবিন্দু (0, 1) **(Ans.)**

আবার (ii) নং এর উপকেন্দ্র (0, a)

অর্থাৎ,

X = 0 এবং Y = a

বা, x = 0 বা, y – 1 = – 1

$\therefore$ x = 0 $\therefore$ y = 0

$\therefore$ (i) নং এর উপকেন্দ্র (0, 0) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y^2 = 16x \cdots\cdots\cdots$ (i)

বা, $y^2 = 4.4.x$

একে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, a = 4

আমরা জানি, উপকেন্দ্রিক দূরত্ব = a + x

$\therefore 6 = 4 + x$

$\therefore x = 2$

(i) নং সমীকরণে x-এর মান বসিয়ে পাই, $y^2 = 32$

$\therefore y = \pm 4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \pm 4\sqrt{2})$ **(Ans.)**

গ ধরি, অধিবৃত্তের ওপরস্থ যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক P(x, y) উপকেন্দ্র S(1, –8), উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{5}$ এবং PM, নিয়ামক $3x - 4y - 10 = 0$ এর ওপর লম্ব দূরত্ব।

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, SP = e. PM

বা, $\sqrt{(x-1)^2 + (y+8)^2} = \sqrt{5}.\left|\frac{(3x - 4y - 10)}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right|$

বা, $\sqrt{(x-1)^2 + (y+8)^2} = \sqrt{5}.\frac{3x - 4y - 10}{\sqrt{25}}$

বা, $(x-1)^2 + (y+8)^2 = \frac{5}{25}(3x - 4y - 10)^2$

বা, $5(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 16y + 64) = 9x^2 + 16y^2 + 100 + 2.3x(-4y) + 2(-4y)(-10) + 2(-10).3x$

বা, $5x^2 - 10x + 5 + 5y^2 + 80y + 320 = 9x^2 + 16y^2 + 100 - 24xy + 80y - 60x$

বা, $9x^2 + 16y^2 + 100 - 24xy + 80y - 60x - 5x^2 + 10x - 325 - 5y^2 - 80y = 0$

$\therefore 4x^2 + 11y^2 - 24xy - 50x - 225 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৬ $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{36} = 1$ একটি কণিক নির্দেশ করে।

[নারায়ণগঞ্জ সরকারি মহিলা কলেজ, নারায়ণগঞ্জ]

ক. $y^2 = -40x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. কণিকটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য; অক্ষের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (– 2, 3), নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x - y + 7 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$ প্রদত্ত কণিকের উৎকেন্দ্রিকতার সমান। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y^2 = -40x = 4(-10)x$

পরাবৃত্তটিকে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

a = – 10

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |-40| = 40$ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, কণিকটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{36} = 1$

বা, $\frac{x^2}{(\sqrt{10})^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$

কণিকটিকে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \sqrt{10}$, b = 6

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm b) \equiv (0, \pm 6)$

অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ, x = 0, y = 0 **(Ans.)**

অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 2a ও 2b অর্থাৎ $2\sqrt{10}$ ও 12 একক **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times (\sqrt{10})^2}{6} = \frac{2 \times 10}{6} = \frac{10}{3}$ একক **(Ans.)**

গ মনে করি, P(x, y) উপবৃত্তের ওপর যেকোনো বিন্দু; উপকেন্দ্র S (–2, 3).

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{(10)}^2}{6^2}} = \sqrt{1 - \frac{10}{36}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$

এবং PM, নিয়ামক রেখা $x - y + 7 = 0$ এর ওপর লম্ব।

$\therefore SP = e.PM$

বা, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \frac{\sqrt{26}}{6} \cdot \left|\frac{x - y + 7}{\sqrt{1+1}}\right|$

বা, $(x+2)^2 + (y-3)^2 = \frac{26\,(x - y + 7)^2}{36}$

বা, $36\,(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) - 26\,(x - y + 7)^2 = 0$

বা, $36(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13) - 26\,(x^2 + y^2 + 49 - 2xy - 14y + 14x) = 0$

বা, $36x^2 - 26x^2 + 36y^2 - 26y^2 + 144x - 364x - 216y + 364y + 52xy + 468 - 1274 = 0$

বা, $10x^2 + 10y^2 + 52xy - 220x + 148y - 806 = 0$

যা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৭ একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক S(6, 1) এবং $x - y + 3 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ। *[রাজেন্দ্রপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, গাজীপুর]*

ক. $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত বিন্দু ও রেখা একটি পরাবৃত্তের শীর্ষ ও দিকাক্ষ হলে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি একটি অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ এবং উদ্দীপকে উল্লিখিত বিন্দু ও রেখা অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষ হয় তবে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^2 = 4(1 - y)$

বা, $x^2 = 4(-1)(y - 1)$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণকে লেখা যায়, $X^2 = 4(-1)Y$ ……… (ii)

(ii) নং সমীকরণকে $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

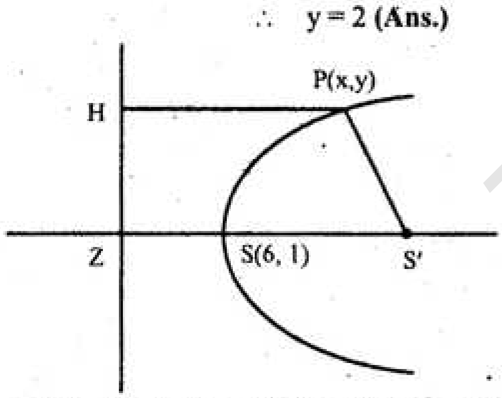
$\therefore a = -1$

অর্থাৎ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $Y = -a$

বা, $y - 1 = 1$

$\therefore y = 2$ **(Ans.)**

খ



দেওয়া আছে, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু S(6, 1) এবং দিকাক্ষরেখা $x - y + 3 = 0$

মনে করি, অক্ষরেখা ZS′ এর সমীকরণ, $x + y + k = 0$ [∵ ZS′ ⊥ HZ]

যা, S(6, 1) বিন্দুগামী

$\therefore 6 + 1 + k = 0 \quad \therefore k = -7$

অক্ষরেখা ZS′ এর সমীকরণ, $x + y - 7 = 0$ ……… (iii)

নিয়ামকরেখা ও অক্ষরেখার ছেদবিন্দু Z।

এখন, $x - y + 3 = 0$

$x + y - 7 = 0$

যোগ করে $2x - 4 = 0$

$\therefore x = 2$

(iii) এ x = 2, বসিয়ে পাই,

$2 + y - 7 = 0$

$\therefore y = 5$

Z এর স্থানাঙ্ক (2, 5)

আবার, ZS′ এর মধ্যবিন্দু S

ধরি, S′ এর স্থানাঙ্ক (α, β)

সুতরাং, $\frac{2 + \alpha}{2} = 6 \quad \therefore \alpha = 10$

আবার, $\frac{5 + \beta}{2} = 1 \quad \therefore \beta = -3$

$\therefore$ উপকেন্দ্র S′ এর স্থানাঙ্ক (10, –3)

আবার, $|SS'| = \sqrt{(10-6)^2 + (-3-1)^2}$

$= 4\sqrt{2}$

$\therefore a = 4\sqrt{2}$

সুতরাং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4|a|$

$= 4(4\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র (10, –3)

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 16\sqrt{2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $e = \sqrt{2}$

উপকেন্দ্র, S(6, 1)

নিয়ামকরেখা, $x - y + 3 = 0$

অধিবৃত্তের সমীকরণটি হবে, $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2 \frac{(x - y + 3)^2}{1^2 + 1^2}$

বা, $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2xy + 2.3.(x - y) + 9$

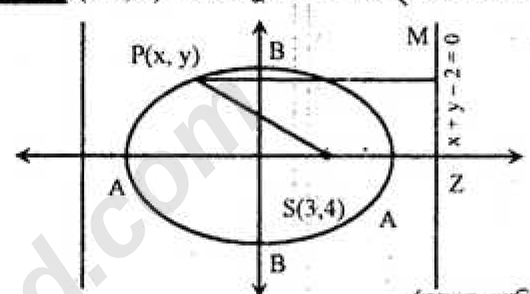
বা, $-12x - 2y + 37 = -2xy + 6x - 6y + 9$

বা, $18x - 4y - 2xy - 28 = 0$

বা, $9x - 2y - xy - 14 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ, $9x - 2y - xy - 14 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৮ (– 2, 3) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ $y = ax^2 + bx + c$.



[আবদুল কাদির মোল্লা সিটি কলেজ, নরসিংদী]

ক. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত পরাবৃত্তটি (0, 5) বিন্দুগামী হলে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. চিত্রের আলোকে $\frac{1}{3}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

বা, $\frac{y^2}{(5)^2} - \frac{x^2}{(4)^2} = 1$

একে $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

a = 4, b = 5 এবং y-অক্ষই আড় অক্ষ।

তাহলে উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{25 + 16}{25}} = \frac{\sqrt{41}}{5}$

উপকেন্দ্র, $(0, \pm be) \equiv \left(0, \pm 5.\frac{\sqrt{41}}{5}\right) \equiv (0, \pm\sqrt{41})$ **(Ans.)**

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $y = \pm\frac{b}{e}$

বা, $y = \pm\frac{5}{\frac{\sqrt{41}}{5}}$

$\therefore \sqrt{41}y = \pm 25$ **(Ans.)**

খ $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল।

পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু (–2, 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এর পরাবৃত্তের সমীকরণ

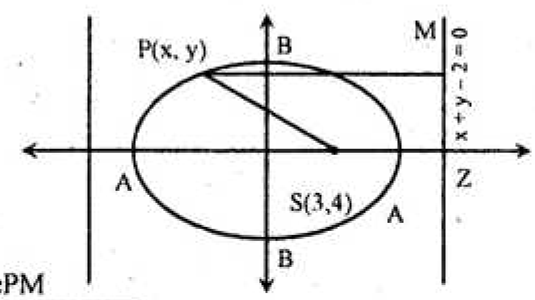
$(x + 2)^2 = 4a(y - 3)$ …… (i)

যেহেতু (i) পরাবৃত্তটি (0, 5) বিন্দুগামী

$(0 + 2)^2 = 4 \cdot a\,(5 - 3)$

বা, $4 = 4.a.2$
বা, $8a = 4$
$\therefore$ $a = \frac{1}{2}$
(i) নং এ $a = \frac{1}{2}$ বসিয়ে, $(x + 2)^2 = 4.\frac{1}{2}(y - 3)$
বা, $x^2 + 4x + 4 = 2y - 6$
বা, $x^2 + 4x + 10 = 2y$
বা, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$
$y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই
$a = \frac{1}{2}, b = 2, c = 5$ **(Ans.)**

গ চিত্র হতে, P(x, y) উপবৃত্তের ওপর যেকোনো বিন্দু; উপকেন্দ্র S(3, 4) এবং PM, নিয়ামক রেখা $x + y - 2 = 0$ এর ওপর লম্ব



$\therefore$ SP = ePM
বা, $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}$
বা, $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{(x+y-2)^2}{18}$
বা, $18(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16) = x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4y - 4x$
$\therefore$ $17x^2 + 17y^2 - 2xy - 104x - 140y + 446 = 0$
যা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**
উপকেন্দ্রিক লম্ব = 2e.SZ
এখন, SZ = S(3, 4) বিন্দু থেকে $x + y - 2 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব
$= \frac{|3 + 4 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ একক
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2e.SZ = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৯ $4x^2 + ky^2 = 80$ এবং $y = px^2 + qx + r$ দুটি কণিক।
[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]

ক. $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২
খ. উপবৃত্তটি (0, ±4) বিন্দুগামী হলে k এর মান এবং উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। ৪
গ. পরাবৃত্তটির শীর্ষ (– 2, 3) এবং উহা (0, 5) বিন্দুগামী হলে দেখাও যে, r = 5pq ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

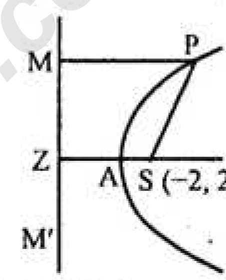
ক দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের সমীকরণ, $25x^2 - 16y^2 = 400$
বা, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$
$\therefore$ $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$
একে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
a = 4, b = 5
উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$
$= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16 + 25}{16}} = \frac{\sqrt{41}}{4}$ **(Ans.)**

খ $4x^2 + ky^2 = 80$ উপবৃত্তটি (0, ±4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে,
$\therefore$ $0 + 16k = 80$
$\therefore$ **k = 5 (Ans.)**
সুতরাং, উপবৃত্তের সমীকরণ, $4x^2 + 5y^2 = 80$
বা, $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$; এখানে, $a = 2\sqrt{5}$, $b = 4$
$\therefore$ $\frac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(4)^2} = 1$ $\therefore a > b$

উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা e হলে, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$
বা, $e^2 = \frac{20 - 16}{20}$ বা, $e^2 = \frac{1}{5}$ $\therefore$ $e = \frac{1}{\sqrt{5}}$
এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, (± ae, 0)
$= \left(\pm 2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$
= (± 2, 0). **(Ans.)**

গ $y = px^2 + qx + r$ পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল।
পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু (–2, 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এর পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x + 2)^2 = 4p(y - 3)$ .... (i)
যেহেতু (i) পরাবৃত্তটি (0, 5) বিন্দুগামী
$\therefore$ $(0 + 2)^2 = 4\cdot p\,(5 - 3)$
বা, $4 = 4.p.2$
বা, $8p = 4$
$\therefore$ $p = \frac{1}{2}$
(i) নং এ $p = \frac{1}{2}$ বসিয়ে, $(x + 2)^2 = 4.\frac{1}{2}(y - 3)$
বা, $x^2 + 4x + 4 = 2y - 6$
বা, $x^2 + 4x + 10 = 2y$
বা, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$
$y = px^2 + qx + r$ সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই
$r = 5 = 5 \times \frac{1}{2} \times 2 = 5pq$
$\therefore$ r = 5pq (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ৩০



[সরকারি সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ, ফরিদপুর]

চিত্রটি একটি কণিক নির্দেশ করে যার নিয়ামক রেখা MZM′।
ক. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২
খ. A(1, –2) হলে MZM′ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪
গ. SP : PM = 1 : 2 এবং MZM′ রেখার সমীকরণ $3x + 4y = 1$ হলে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৯৭

প্রশ্ন ▶ ৩১ প্রথম উদ্দীপক: $y^2 = 4px$, দ্বিতীয় উদ্দীপক: নিয়ামক $x + y - 2 = 0$
[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]

ক. প্রথম উদ্দীপক (3, –2) বিন্দুগামী হলে এর উপকেন্দ্র কত? ২
খ. প্রথম উদ্দীপকে p = 4 হলে এবং এর উপোরস্থ কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 হলে, উক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? ৪
গ. উপকেন্দ্র (3, –4), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ ও দ্বিতীয় উদ্দীপক বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y^2 = 4px$ ... ... (i)
সমীকরণটি (3, –2) বিন্দুগামী হলে, $(-2)^2 = 4.p.(3)$
বা, $p = \frac{1}{3}$
$\therefore$ $y^2 = 4.\frac{1}{3}x$ ... ... (ii)
(i) নং কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \frac{1}{3}$
উপকেন্দ্র $(a, 0) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y^2 = 4px$

বা, $y^2 = 4.4x$ [∵ $p = 4$] .... (1)

একে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 4$

আমরা জানি, উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + x$

∴ $6 = 4 + x$

∴ $x = 2$

(1) নং সমীকরণে x-এর মান বসিয়ে পাই, $y^2 = 32$

∴ $y = \pm 4\sqrt{2}$

∴ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \pm 4\sqrt{2})$ **(Ans.)**

গ মনে করি, $P(x, y)$ উপবৃত্তের ওপর যেকোনো বিন্দু; উপকেন্দ্র $S(3, -4)$ এবং PM নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x + y - 2 = 0$।

উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = ePM$

বা, $\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = \frac{1}{3}\frac{x+y-2}{\sqrt{1^2+1^2}}$

বা, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = \frac{(x+y-2)^2}{18}$

বা, $18(x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16) = x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4y - 4x$

∴ $17x^2 + 17y^2 - 2xy - 104x + 148y + 446 = 0$

যা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩২ A এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$, S এর স্থানাঙ্ক $(1, 8)$ এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ: $3x - 4y = 10$। *[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]*

ক. $y^2 = 4kx$ পরাবৃত্তটি $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও উপকেন্দ্রিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট এবং A বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. S উপকেন্দ্র এবং প্রদত্ত নিয়ামক বিশিষ্ট একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $= \sqrt{5}$। ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $y^2 = 4kx$

পরাবৃত্তটি $(3, 2)$ বিন্দুগামী

∴ $4 = 12k$

বা, $k = \frac{1}{3}$

∴ $y^2 = \frac{4}{3}k$

বা, $y^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)x$

∴ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

এবং উপকেন্দ্রিক স্থানাঙ্ক,

$x = a$

বা, $x = \frac{1}{3}$

এবং $y = 0$

এখানে, $a = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ **(Ans.)**

খ মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

আমরা জানি, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

যেখানে, উৎকেন্দ্রিকতা e

বা, $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

বা, $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{16}{25}$

বা, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{25}$

বা, $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$

∴ $b = \frac{3a}{5}$

যেহেতু উপবৃত্তটি $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে,

∴ $\frac{100}{9a^2} + \frac{5}{b^2} = 1$

বা, $\frac{100}{9a^2} + \frac{5 \times 25}{9a^2} = 1$

বা, $9a^2 = 225$

∴ $a = 5$

∴ $b = 3$

∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **(Ans.)**

গ ধরি, অধিবৃত্তের ওপরস্থ যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x, y)$

উপকেন্দ্র $S(1, 8)$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{5}$

নিয়ামক, $3x - 4y - 10 = 0$

∴ অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-8)^2} = \sqrt{5}.\frac{(3x-4y-10)}{\sqrt{3^2+4^2}}$

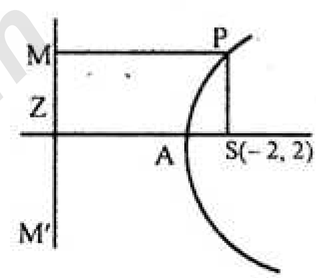
বা, $(x-1)^2 + (y-8)^2 = 5\frac{(3x-4y-10)^2}{25}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $5(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 16y + 64) = 9x^2 + 16y^2 + 100 - 24xy + 80y - 60x$

বা, $5x^2 + 5y^2 - 10x - 80y + 325 = 9x^2 + 16y^2 + 100 - 24xy + 80y - 60x$

বা, $4x^2 + 11y^2 - 24xy - 50x + 160y - 225 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৩ উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২: $6x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 43 = 0$ একটি সমীকরণ *[সরকারি আকবর আলী কলেজ, সিরাজগঞ্জ]*

ক. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। ২

খ. $A(1, -2)$ হলে উদ্দীপক-১ এর আলোকে পরাবৃত্তের অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপক-২ কিসের সমীকরণ নির্দেশ করে। এর কেন্দ্র, নিয়ামক রেখা ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

একে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a^2 = 4, b^2 = 9$

∴ $a = 2$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}}$

$= \frac{\sqrt{13}}{2}$

∴ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

$= (\pm 2.\frac{\sqrt{13}}{2}, 0)$

$= (\pm\sqrt{13}, 0)$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৫(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৯৮

গ দেওয়া আছে,

$6x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 43 = 0$

বা, $6x^2 - 36x + 4y^2 - 4y + 43 = 0$

বা, $6(x^2 - 6x) + 4(y^2 - y) + 43 = 0$

বা, $6\{(x)^2 - 2.x.3 + (3)^2\} + 4\left\{(y)^2 - 2.y.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$

$+ 43 - 54 - 1 = 0$

বা, $6(x-3)^2 + 4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 12$

বা, $\frac{(x-3)^2}{2} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{3} = 1$ …… (i)

(i) নং একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

ধরি, $x-3 = X$ এবং $y-\frac{1}{2} = Y$

(i) নং থেকে পাই, $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{3} = 1$

একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

এর সাথে তুলনা করে পাই, $a^2 = 2$ এবং $b^2 = 3$

$\therefore a = \sqrt{2} \therefore b = \sqrt{3}$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

কেন্দ্র $(X, Y) = (0, 0)$

$\therefore X = 0$ এবং $Y = 0$

বা, $x - 3 = 0$ বা, $y - \frac{1}{2} = 0$

$\therefore x = 3$ $\therefore y = \frac{1}{2}$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $Y = \pm\frac{b}{e}$

বা, $y - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

বা, $y - \frac{1}{2} = \pm 3$

বা, $y = \pm 3 + \frac{1}{2}$

বা, $2y = \pm 6 + 1$

$\therefore$ $2y - 7 = 0$ এবং $2y + 5 = 0$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2.2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৪ উদ্দীপক: একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুটো (4, 2) এবং (8, 2) ও উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ *[নওগাঁ সরকারি কলেজ, নওগাঁ]*

ক. $x^2 = 9py$ উপবৃত্তটি (2, 1) বিন্দুগামী বলে উহার উপকেন্দ্র কত? ২

খ. অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উপকেন্দ্রদ্বয় যদি কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হয় তাহলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করে, কেন্দ্র বের কর। দেখাও যে, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^2 = 9py$ …… (i)

(i) নং উপবৃত্তটি (2, 1) বিন্দুগামী বলে $2^2 = 9.P.1$

বা, $P = \frac{4}{9}$

P এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x^2 = 9 \times \frac{4}{9} y$

$\therefore$ $x^2 = 4y$ …… (ii)

(ii) নং কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$x^2 = 4ay$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, a) বা, (0, 1) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{2}$

এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (4, 2) এবং (8, 2)

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(8-4)^2 + (2-2)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

$\therefore$ $2ae = 4$

বা, $2.a.\sqrt{2} = 4$

বা, $a = \frac{4}{2.\sqrt{2}}$

বা, $a = \sqrt{2}$

$\therefore$ $a^2 = 2$

আবার, $e = \sqrt{2}$

বা, $\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{2}$

বা, $1 + \frac{b^2}{a^2} = 2$

বা, $1 + \frac{b^2}{2} = 2$

$\frac{b^2}{2} = 1$

$\therefore$ $b^2 = 2$

এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4+8}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$

বা, (6, 2)

নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-6)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$

বা, $(x-6)^2 - (y-2)^2 = 2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় (4, 2) ও (8, 2) বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়।

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)(x-8) + (y-2)(y-2) = 0$

বা, $x^2 - 4x - 8x + 32 + y^2 - 4y + 4 = 0$

বা, $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$

বা, $x^2 + y^2 + 2(-6)x + 2(-2)y + 36 = 0$

$g = -6, f = -2, c = 36$

বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f) = (6, 2)$ **Ans.**

$g^2 = (-6)^2 = 36 = c$

$g^2 = c$ হওয়ায় বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ৩৫ দৃশ্যকল্প-১: কণিকের উপকেন্দ্র S(5, 2) এবং শীর্ষবিন্দু A(3, 4)

দৃশ্যকল্প-২: $6x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 43 = 0$ একটি সমীকরণ।

[বিয়াম মডেল স্কুল ও কলেজ, বগুড়া]

ক. $4x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ কণিকটি প্রমাণ আকারে প্রকাশ করে সনাক্ত কর। ২

খ. e = 1 হলে, দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২: এর সমীকরণটির উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকের সমীকরণ বের কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $4x^2 - 9y^2 - 1 = 0$

বা, $4x^2 - 9y^2 = 1$ বা, $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$

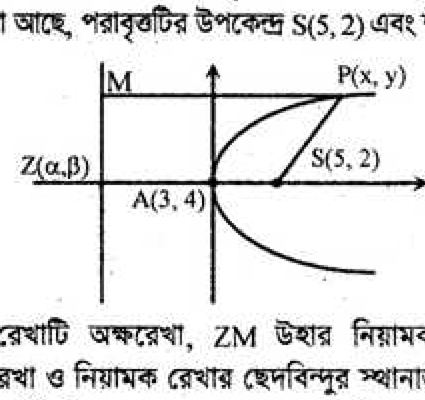
$\therefore \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$

ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

খ দেওয়া আছে, কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা e = 1

অর্থাৎ কণিকটি একটি পরাবৃত্ত।

দেওয়া আছে, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র S(5, 2) এবং শীর্ষবিন্দু A(3, 4).



AS রেখাটি অক্ষরেখা, ZM উহার নিয়ামক রেখা এবং পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক Z(α, β)

যেহেতু শীর্ষবিন্দু A(3, 4), ZS এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore 3 = \frac{5+\alpha}{2}$

বা, $6 = 5 + \alpha \therefore \alpha = 1$

এবং $4 = \frac{2+\beta}{2}$ বা, $8 = 2 + \beta \therefore \beta = 6$

$\therefore$ Z এর স্থানাঙ্ক (1, 6)

এখন, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা অর্থাৎ SZ রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5-1} = \frac{y-2}{2-6}$

বা, $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{-4}$ বা, $x - 5 = -y + 2$

$\therefore x + y - 7 = 0$ ……… (i)

আবার, পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা অক্ষরেখার উপর লম্ব এবং Z বিন্দুগামী। (i) নং এর লম্বরেখার সমীকরণ,

$x - y + k = 0$ ……… (ii)

(ii) নং রেখাটি Z(1, 6) বিন্দুগামী,

$\therefore 1 - 6 + k = 0 \therefore k = 5.$

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $x - y + 5 = 0$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $x - y + 5 = 0$ ……… (iii)

পরাবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু P(x, y) হলে

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, PS = PM

বা, $\sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x-y+5|}{\sqrt{1+1}}$

বা, $(x-5)^2 + (y-2)^2 = \frac{(x-y+5)^2}{2}$

বা, $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = \frac{x^2 + y^2 + 25 - 2xy + 10x - 10y}{2}$

বা, $2x^2 - 20x + 50 + 2y^2 - 8y + 8$
$= x^2 + y^2 + 25 - 2xy + 10x - 10y$

$\therefore x^2 + y^2 - 30x + 2y + 2xy + 33 = 0$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ৮(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০০

প্রশ্ন ▶ ৩৬ একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A(3, 4) এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ y = 8.

[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]

ক. $y^2 - x^2 = 16$ অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। ২

খ. পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, ইহার সমীকরণ এবং অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 - x^2 = 16$

বা, $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1$

একে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

এর সাথে তুলনা করে পাই,

$b^2 = 16$ এবং $a^2 = 16$

$\therefore b = 4$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$

$= \sqrt{1 + \frac{16}{16}} = \sqrt{2}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm be)$

বা, $(0, \pm 4\sqrt{2})$ **(Ans.)**

খ মনে করি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$ এবং শীর্ষবিন্দু A(3, 4) এর অক্ষরেখা হবে নিয়ামকরেখা $y - 8 = 0$ এর উপর লম্ব।

সুতরাং $y - 8 = 0$ রেখার ওপর লম্বরেখার সমীকরণ $x + k = 0$, ইহা (3, 4) বিন্দুগামী।

$\therefore 3 + k = 0 \quad \therefore k = -3$

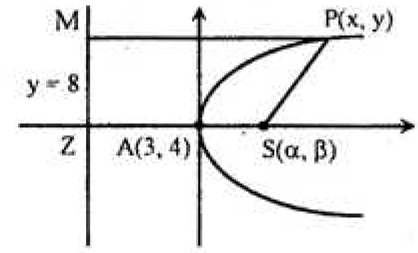
অক্ষরেখার সমীকরণ, $x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3$

আবার, $y - 8 = 0 \quad \therefore y = 8$

অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক Z(3, 8)

এখন, শীর্ষবিন্দু A(3, 4), ZS এর মধ্যবিন্দু।

$3 = \frac{\alpha + 3}{2}$



বা, $\alpha + 3 = 6$

$\therefore \alpha = 3$

এবং $4 = \frac{\beta + 8}{2}$

বা, $\beta + 8 = 8$

$\therefore \beta = 0$

$\therefore$ উপকেন্দ্র S(3, 0)

ধরি, পরাবৃত্তটির উপরস্থ P(x, y) একটি বিন্দু।

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, SP = PM

বা, $\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \frac{|y-8|}{\sqrt{1^2}}$

বা, $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = y - 8$

বা, $(x-3)^2 + y^2 = (y-8)^2$

বা, $(x-3)^2 = (y-8)^2 - y^2$

বা, $(x-3)^2 = y^2 - 16y + 64 - y^2$

$\therefore (x-3)^2 = -16(y-4)$ **(Ans.)**

গ প্রাপ্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)^2 = -4.4\,(y-4)$

এখানে, $x - 3 = X$ এবং $y - 4 = Y$ বসালে পাই,

$X^2 = -4.4Y$

সমীকরণটিকে $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -4$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4(-4)| = 16$ **(Ans.)**

পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ,

$Y = a$

বা, $y - 4 = -4$

$\therefore y = 0$ **(Ans.)**

অক্ষরেখার সমীকরণ, $X = 0$

$x - 3 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৭ একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (−1, 3) এবং শীর্ষবিন্দু (4, 3)।

[রাণীভবানী সরকারী মহিলা কলেজ, নাটোর]

ক. $5x^2 + 6y^2 = 30$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২

খ. পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

উপবৃত্তের সমীকরণ, $5x^2 + 6y^2 = 30$

বা, $\frac{5x^2}{30} + \frac{6y^2}{30} = 1$ [উভয়পক্ষকে 30 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণে, $a = \sqrt{6}$ এবং $b = \sqrt{5}$ [যেখানে $a > b$]

$\therefore$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5})^2}{(\sqrt{6})^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{5}{6}}$

$= \sqrt{\frac{6-5}{6}}$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}$ **(Ans.)**

খ ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক,
S (– 1, 3) এবং শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, A (4, 3)
ASX রেখাটি অক্ষরেখা, ZM উহার নিয়ামক রেখা এবং পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক Z(α, β)
যেহেতু, শীর্ষবিন্দু A(4, 3), ZS এর মধ্যবিন্দু

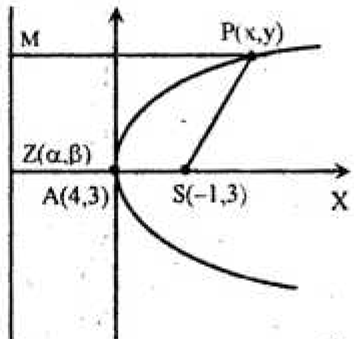
$\therefore 4 = \frac{-1 + \alpha}{2}$

$\therefore \alpha = 9$

এবং $3 = \frac{3 + \beta}{2}$

বা, $\beta = 3$

$\therefore \beta = 3$



∴ Z এর স্থানাঙ্ক (9, 3)

এখন, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা অর্থাৎ ZS বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-9}{9+1} = \frac{y-3}{3-3}$

বা, $\frac{x-9}{10} = \frac{y-3}{0}$

বা, $y - 3 = 0$ **(Ans.)**

গ 'খ' হতে পাই,
পরাবৃত্তের অক্ষ রেখার সমীকরণ, $y - 3 = 0$ ……… (i)
আবার, যেহেতু পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা অক্ষরেখার ওপর লম্ব এবং Z বিন্দুগামী।
∴ (i) নং এর লম্ব রেখার সমীকরণ, $x + k = 0$ …… (ii)
(ii) নং রেখা Z (9, 3) বিন্দুগামী।
$\therefore k = -9$
k এর মান (ii) নং বসিয়ে, $x - 9 = 0$
∴ নিয়ামক রেখা সমীকরণ, $x - 9 = 0$
পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, SP = PM

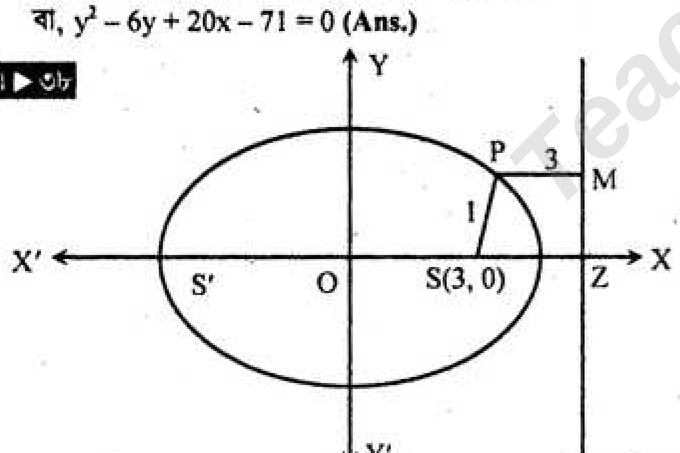
বা, $\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x-9|}{\sqrt{1}}$

বা, $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-9)^2$

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 18x + 81$

বা, $y^2 - 6y + 20x - 71 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৮



[কারমাইকেল কলেজ, রংপুর]

ক. $y^2 = -4(2 - x)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২
খ. উদ্দীপকের উপবৃত্তটির নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪
গ. SS′কে আড় অক্ষ এবং 3 উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = -4(2 - x)$

বা, $y^2 = 4(x - 2)$

ধরি, $y = Y, x - 2 = X$

$\therefore Y^2 = 4X$

$= 4.1.X = 4aX$ যেখানে $a = 1$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (a, 0)

অর্থাৎ $X = a$	বা, $Y = 0$
বা, $x - 2 = 1$	বা, $y = 0$
বা, $x = 3$	

∴ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, 0) **(Ans.)**

খ উদ্দীপক হতে পাই, উপকেন্দ্রটির বৃহৎ অক্ষ x অক্ষে অবস্থিত।
এবং উপকেন্দ্র, S(3, 0) কেন্দ্র O(0, 0)

∴ অপর উপকেন্দ্র S′(–3, 0)

এখন, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{SP}{PM} = \frac{1}{3}$

∴ উপকেন্দ্র দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব = 2ae

প্রশ্নমতে, $2ae = \sqrt{\{3 - (-3)\}^2 + (0 - 0)^2}$

বা, $2ae = \sqrt{36} = 6$ বা, $ae = \frac{6}{2} = 3$

বা, $a = \frac{3}{e} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$

∴ নিয়ামকের সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e}$

বা, $x = \pm\frac{9}{\frac{1}{3}}$ $[\because a = 9]$

$\therefore x = \pm 27$ **(Ans.)**

গ SS′ আড় অক্ষ হলে অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রদ্বয় হবে S(– 3, 0) এবং S′(3, 0) এবং কেন্দ্র (0, 0)

∴ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

যার আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a

প্রশ্নমতে, $2a = \sqrt{(-3-3)^2 + (0-0)^2} = 6$

$\therefore a = 3$

আবার, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

বা, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

বা, $(e^2 - 1) = \frac{b^2}{a^2}$

বা, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\therefore b^2 = 3^2(3^2 - 1)$ $[\because a = 3, e = 3]$

$= 9(9 - 1) = 72$

∴ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{72} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৯ $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

[আহমদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]

ক. $x = 0$ হলে $y =$ কত? ২
খ. উপবৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় কর। ৪
গ. উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ ………… (i)
$x = 0$ হলে, সমীকরণ (i) হতে পাই,

$5 \times 0^2 + 9y^2 - 30 \times 0 = 0$

$\therefore y = 0$ **(Ans.)**

খ এখানে, $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$

বা, $5(x^2 - 6x) + 9y^2 = 0$

বা, $5(x^2 - 2.x.3 + 3^2 - 3^2) + 9y^2 = 0$

বা, $5(x - 3)^2 - 5 \times 9 + 9y^2 = 0$

বা, $5(x - 3)^2 + 9y^2 = 45$

বা, $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

∴ উপবৃত্তটির কেন্দ্র, $x - 3 = 0$

$\therefore x = 3$

এবং $y = 0$

সুতরাং উপবৃত্তের কেন্দ্র (3, 0) **(Ans.)**

গ এখানে, $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

বা, $\frac{(x-3)^2}{3^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$

$\therefore$ $a=3$ এবং $b=\sqrt{5}$

$a>b$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times5}{3}$

$=\frac{10}{3}$ একক **(Ans.)**

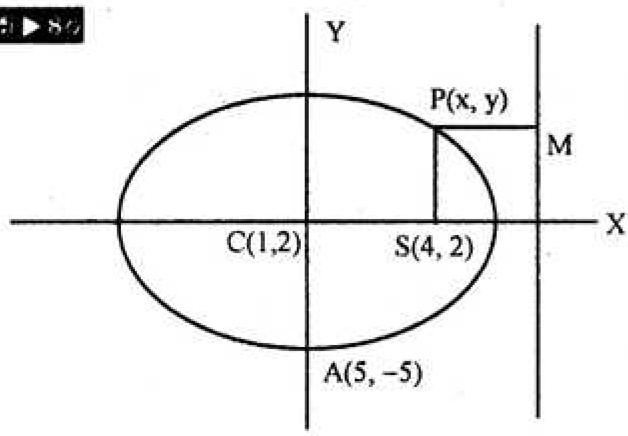
$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{(\sqrt{5})^2}{3^2}}=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

ধরি, $X=x-3$	এবং $Y=y$
তাহলে, $X=\pm ae$	তাহলে, $Y=0$
$x-3=\pm3.\frac{2}{3}=\pm2$	বা, $y=0$
$\therefore$ $x=3\pm2$	$\therefore$ $y=0$
$\therefore$ $x=5, 1$	

$\therefore$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(5, 0)$ ও $(1, 0)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪০



[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]

চিত্রে উপবৃত্তটির মূল অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল।

ক. $5x^2+4y^2=1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। ২

খ. উপবৃত্তটির কেন্দ্র $C(1, 2)$ এবং ইহা $A(5, -5)$ বিন্দু দিয়ে যায়। এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x+y-2=0$ হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $5x^2+4y^2=1$

$\Rightarrow\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a=\frac{1}{\sqrt{5}}, b=\frac{1}{2}$, এখানে $a<b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}}$

$=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্র, $S=\left(0, \pm\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ **(Ans.)**

খ চিত্র থেকে দেখা যায় যে, উপবৃত্তটির অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল। $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x-অক্ষের সমান্তরাল উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$ ……… (i)

চিত্র থেকে, $S(4, 2)$

এখন, $CS=ae$, যেখানে $e=$ উৎকেন্দ্রিকতা

বা, $\sqrt{(1-4)^2+(2-2)^2}=a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

বা, $9=a^2-b^2$

বা, $a^2-b^2=9$

$\therefore$ $a^2=b^2+9$ ……… (ii)

(i) নং $(5, -5)$ বিন্দুগামী বলে, $\frac{16}{a^2}+\frac{49}{b^2}=1$

বা, $\frac{16}{9+b^2}+\frac{49}{b^2}=1$ [(ii) হতে]

বা, $\frac{16b^2+49(b^2+9)}{b^2(b^2+9)}=1$

বা, $16b^2+49b^2+441=b^4+9b^2$

বা, $b^4-56b^2-441=0$

বা, $b^4-63b^2+7b^2-441=0$

বা, $b^2(b^2-63)+7(b^2-63)=0$

বা, $(b^2-63)(b^2+7)=0$

$\therefore$ $b^2=63$ [$\because b^2\neq-7$]

(ii) হতে পাই, $a^2=63+9=72$

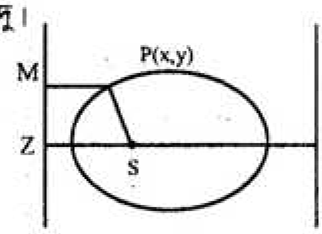
$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-1)^2}{72}+\frac{(y-2)^2}{63}=1$ **(Ans.)**

গ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্র $S(4, 2)$, উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\frac{1}{\sqrt{3}}$

নিয়ামকরেখা, $MZ\equiv x+y-2=0$

ধরি, উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যেকোন বিন্দু।

সংজ্ঞানুসারে, $SP=e.PM$



বা, $\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{x+y-2}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$

বা, $(x-4)^2+(y-2)^2=\frac{(x+y-2)^2}{3\times2}$

বা, $6(x^2-8x+16+y^2-4y+4)=(x+y)^2-2(x+y)2+2^2$

বা, $6x^2-48x+96+6y^2-24y+24=x^2+y^2+2xy-4x-4y+4$

বা, $5x^2+5y^2-2xy-44x-20y+116=0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪১ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $4x^2-9y^2-24x+36y-36=0$

[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]

ক. উদ্দীপকের কণিকটিকে আদর্শ আকারে প্রকাশ করে পরিচয় দাও। ২

খ. কণিকটির শীর্ষবিন্দু, কেন্দ্র, অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য ও উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ৪

গ. কণিকটির দিকাক্ষের সমীকরণ, অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $4x^2-9y^2-24x+36y-36=0$

বা, $4(x^2-6x+9)-36-9(y^2-4y+4)+36-36=0$

বা, $4(x-3)^2-9(y-2)^2=36$

বা, $\frac{(x-3)^2}{3^2}-\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$

$\therefore$ প্রদত্ত কণিকটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে যেখানে, $a=3$ এবং $b=2$।

খ 'ক' থেকে পাই, অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{(x-3)^2}{3^2}-\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$

একে $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$\alpha=3, \beta=2, a=3, b=2$

$\therefore$ কেন্দ্র $(\alpha, \beta)=(3, 2)$ **(Ans.)**

শীর্ষবিন্দু $(\pm a, 0)$ **(Ans.)**

এখানে, $x-3=\pm a$ এবং $y-2=0$

বা, $x=\pm3+3$ $\therefore$ $y=2$

$=0, 6$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(6, 2)$ এবং $(0, 2)$ **(Ans.)**

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=2\times3=6$ **(Ans.)**

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=2\times2=4$ **(Ans.)**

উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

$=\sqrt{1+\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$ **(Ans.)**

গ 'খ' হতে পাই, $\alpha = 3, \beta = 2, a = 3, b = 2$

এর দিকাক্ষের সমীকরণ, $x - \alpha = \pm \frac{a}{e}$

$\Rightarrow \quad x - 3 = \pm \frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{3}}$

$\therefore \quad x - 3 = \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$

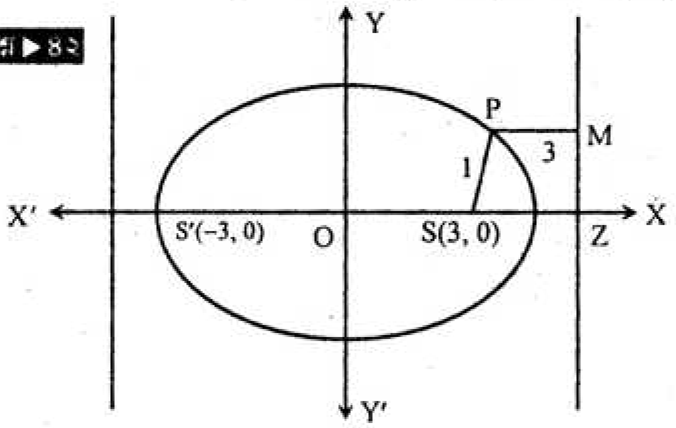
আড় অক্ষের সমীকরণ, $y - \beta = 0 \quad \therefore y - 2 = 0$

অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $x - \alpha = 0 \quad \therefore x - 3 = 0$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = 2ae

$= 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{13}}{3} = 2\sqrt{13}$ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪২



[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]

ক. $y^2 = 4(x - 2)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের উপবৃত্তটির নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. SS′ আড় অক্ষ এবং 9 উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $y^2 = 4(x - 2)$

বা, $y^2 = 4.1.(x - 2)$

$\therefore$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$x - 2 = 1$

বা, $x = 1 + 2 \therefore x = 3$

এবং $y = 0$

অর্থাৎ (3, 0) **(Ans.)**

খ উদ্দীপক হতে পাই, উপকেন্দ্রটির বৃহৎ অক্ষ x অক্ষে অবস্থিত।

এবং উপকেন্দ্র, S(3, 0)

কেন্দ্র O(0, 0)

$\therefore$ অপর উপকেন্দ্র S′(−3, 0)

এখন, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{SP}{PM} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব = 2ae

প্রশ্নমতে, $2ae = \sqrt{\{3 - (-3)\}^2 + (0 - 0)^2}$

বা, $2ae = \sqrt{36} = 6$ বা, $ae = \frac{6}{2} = 3$

বা, $a = \frac{3}{e} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $x = \pm \frac{a}{e}$

বা, $x = \pm \frac{9}{\frac{1}{3}} \quad [\because a = 9]$

$\therefore \quad x = \pm 27$ **(Ans.)**

গ SS′ আড় অক্ষ হলে অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রদ্বয় হবে S(−3, 0) এবং S′(3, 0) এবং কেন্দ্র (0, 0)

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

যার আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a

প্রশ্নমতে, 2a = 6

$\therefore a = 3$

আবার, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ বা, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

বা, $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$ বা, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\therefore b^2 = (3)^2(9^2 - 1) = 9 \times (81 - 1) = 9 \times 80 = 720$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{(3)^2} - \frac{y^2}{720} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{720} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৩ $x^2 - 8y^2 = 2; 4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ দুইটি কণিক নির্দেশ করে।

[চাঁদপুর সরকারি মহিলা কলেজ, চাঁদপুর]

ক. $y^2 = 4(x - 3)$ কণিকটির শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, প্রথম কণিকটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. ৪

গ. দ্বিতীয় কণিকটির উপকেন্দ্রের অবস্থান, উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, নিয়ামক রেখার সমীকরণ এবং উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y^2 = 4(x - 3)$

বা, $y^2 = 4.1(x - 3)$

বা, $Y = 4.1.X$ [Y = y এবং X = x − 3 ধরে]

$\therefore \quad a = 1$

$\therefore \quad X = 0$ এবং $Y = 0$

বা, $x - 3 = 0 \quad \therefore \quad y = 0$

$\therefore \quad x = 3$

$\therefore$ শীর্ষের স্থানাঙ্ক (3, 0) **(Ans.)**

খ প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 - 8y^2 = 2$ বা, $\frac{x^2}{2} - 4y^2 = 1$ বা, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

একে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে

পাই, $a^2 = 2, b^2 = \frac{1}{4}$

উৎকেন্দ্রতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1/4}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $x = \pm \frac{a}{e}$ বা, $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}}$

বা, $x = \pm \frac{4}{3}$ বা, $3x = \pm 4$ (দেখানো হলো)

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ একক (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$

বা, $4(x^2 - 4x) + 5(y^2 + 2y) + 1 = 0$

বা, $4(x^2 - 2.x.2 + 2^2 - 4) + 5(y^2 + 2y.1 + 1^2 - 1) + 1 = 0$

বা, $4(x - 2)^2 - 16 + 5(y + 1)^2 - 5 + 1 = 0$

বা, $4(x - 2)^2 + 5(y + 1)^2 = 20$

বা, $\frac{4(x - 2)^2}{20} + 5\frac{(y + 1)^2}{20} = 1 \qquad \therefore \frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{4} = 1$

এখানে, $X = x - 2, Y = y + 1$

বা, $\frac{X^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$

একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \sqrt{5}, b = 2$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}}$

$= \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

উপকেন্দ্রের জন্য, $X = \pm ae$ $Y = 0$

বা, $x - 2 = \pm ae$ বা, $y + 1 = 0$

বা, $x = \left(\pm\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\right)$ $\therefore y = -1$

$= \pm 1 + 2$

$\therefore$ $x = 3$ বা 1

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(3, -1)$ এবং $(1, -1)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae = \left(2\sqrt{5} . \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$= 2$ একক **(Ans.)**

$\therefore$ নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $X = \pm\frac{a}{e}$ বা, $x - 2 = \pm\sqrt{5} . \frac{\sqrt{5}}{1}$

বা, $x - 2 = \pm 5$

বা, $x - 2 = 5$ অথবা $x - 2 = -5$

$\therefore$ $x - 7 = 0$ $\therefore$ $x + 3 = 0$ **(Ans.)**

$\therefore$ নিয়ামকদ্বয়ের দূরত্ব $= \frac{2a}{e}$

$= \frac{2 \times \sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$

$= 10$ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৪ দৃশ্যকল্প-১: $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু P এর ফোকাস দূরত্ব ৪।

দৃশ্যকল্প-২: একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ । *[চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ল্যাবরেটরী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত পরাবৃত্তের P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত উপবৃত্তটির দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$

বা, $y^2 - 4y + 4 - 4x + 12 = 0$

বা, $y^2 - 4y + 4 = 4x - 12$

$\therefore (y - 2)^2 = 4 . (x - 3)$ ……… (i)   যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore$ (i) নং এর উৎকেন্দ্রিকতা $= 1$ **(Ans.)**

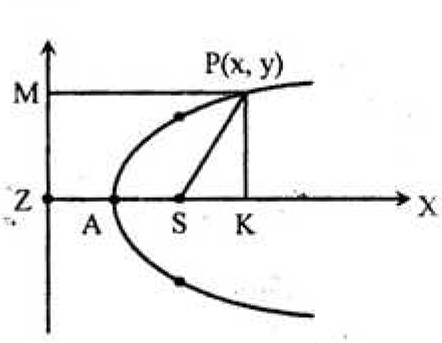
[পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা সর্বদা 1]

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4.1| = 4$ **(Ans.)**

খ ধরি, পরাবৃত্তস্থ বিন্দু $P(x, y)$ এর ফোকাস দূরত্ব, $SP = 8$.

এখন, $y^2 = 4ax$ এর সাথে $y^2 = 8x$ এর তুলনা করে পাই,

$a = 2 = AS = AZ$



$P(x, y)$ বিন্দু হতে অক্ষের ওপর PK লম্ব আঁকি।

$\therefore SP = MP = ZK = AZ + AK$

$\Rightarrow 8 = a + x \Rightarrow x + 2 = 8 \therefore x = 6$

যেহেতু, $P(x, y)$ বিন্দুটি $y^2 = 8x$ এর ওপর অবস্থিত

সুতরাং $y^2 = 8.6 = 48 \therefore y = \pm 4\sqrt{3}$

সুতরাং নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(6, \pm 4\sqrt{3})$ **(Ans.)**

গ মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ …… (i)

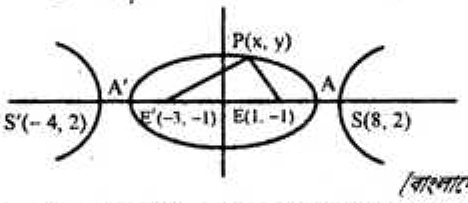
উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(0, \pm 4)$ সুতরাং, y-অক্ষই বৃহৎ অক্ষ।

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{4}{5}$ $\therefore 4 = be$ $\Rightarrow b = \frac{4}{e} = \frac{4}{4/5} = 5$ $\therefore b = 5$

আবার, $a^2 = b^2(1 - e^2) \Rightarrow a^2 = 25\left(1 - \frac{16}{25}\right) = 9$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৫



[বাংলাদেশ নৌবাহিনী কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর, যদি কোটি 12 হয়। ২

খ. $AA' = 2\sqrt{5}$ হলে উদ্দীপকের আলোকে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. $e = \frac{3}{2}$ হলে উদ্দীপকের আলোকে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $y^2 = 16x$

বা, $y^2 = 4.4.x$ ……………(i)

(i) নং সমীকরণকে $y^2 = 4ax$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a = 4$

এখন, $y = 12$ হলে,

$16x = (12)^2$

বা, $16x = 144$

বা, $x = 9$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + x = 4 + 9 = 13$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, উপকেন্দ্রদ্বয় $E(1, -1)$ এবং $E'(-3, -1)$

এবং উপবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু $P(x, y)$

এখন, আমরা জানি, $EP + E'P = AA' = 2a$

বা, $E'P = AA' - EP$

বা, $(E'P)^2 = (AA' - EP)^2$

বা, $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = (2\sqrt{5} - EP)^2$

বা, $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 20 - 4\sqrt{5}\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} + (x-1)^2 + (y+1)^2$

বা, $x^2 + 6x + 9 - x^2 + 2x - 1 - 20 = -4\sqrt{5}\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} - (y+1)^2 + (y+1)^2$

বা, $8x - 12 = -4\sqrt{5}\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$.

বা, $(8x - 12)^2 = 80(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 1 + y + 1)$

বা, $64x^2 - 192x + 144 = 80x^2 - 160x + 80 + 80y^2 + 160y + 80$

বা, $16x^2 + 32x + 80y^2 + 160y + 16 = 0$

$\therefore$ $x^2 + 5y^2 + 2x + 10y + 1 = 0$

ইহাই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ।

গ দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $S'(-4, 2)$ এবং $S(8, 2)$

এবং উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{3}{2}$

এখন, $S'S = \sqrt{(-4 - 8)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{144 + 0}$

বা, $2ae = 12$ বা, $2a \times \frac{3}{2} = 12$ বা, $a = 4$

আবার, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

বা, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ বা, $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$ বা, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\therefore$ $b = \sqrt{a^2(e^2 - 1)} = \sqrt{4^2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1\right\}}$

$b = \sqrt{20}$

আবার, অধিবৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{-4 + 8}{2}, \frac{2 + 2}{2}\right) = (2, 2)$

সুতরাং $(2, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{(x - 2)^2}{a^2} - \frac{(y - 2)^2}{b^2} = 1$ বা, $\frac{(x - 2)^2}{4^2} - \frac{(y - 2)^2}{(\sqrt{20})^2} = 1$

$\therefore$ $\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y - 2)^2}{20} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৬ একটি কণিকের উপকেন্দ্র (– 1, 1) এবং নিয়ামক রেখা $x - y + 3 = 0$.

[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]

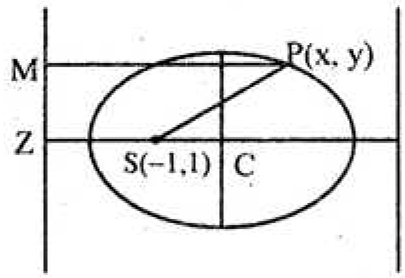
ক. একটি উপবৃত্তের সরল চিত্র এঁকে এর কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্দেশ কর। ২

খ. উদ্দীপকের উল্লিখিত কণিকটি পরাবৃত্ত হলে এর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ হলে সমীকরণ বাহির কর। ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে, উপবৃত্তের S উপকেন্দ্র ও C কেন্দ্র।

খ মনে করি, $x - y + 3 = 0$ রেখার লম্বের সমীকরণ

$x + y + k = 0$ ....(i)

যেহেতু (i) রেখাটি (–1, 1) বিন্দুগামী

$-1 + 1 + k = 0$ বা, $k = 0$

(i) এ $k = 0$ বসিয়ে $x + y = 0$

বা, $x = -y$.............(ii)

$x - y + 3 = 0$ সমীকরণে $x = -y$ বসিয়ে $-y - y + 3 = 0$

বা, $2y = 3$ বা, $y = \frac{3}{2}$

(ii) এ $y = \frac{3}{2}$ বসিয়ে $x = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore$ অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দু $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

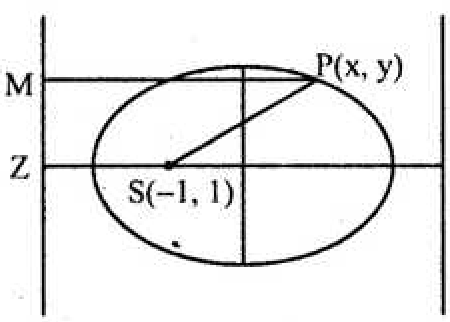
মনে করে, শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)

প্রদত্ত উপকেন্দ্র (–1, 1)

$\therefore \alpha = \frac{-\frac{3}{2} - 1}{2} = -\frac{5}{4}$ | $\beta = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ **(Ans.)**

গ মনে করি, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S(–1, 1) নিয়ামকরেখা MZ এবং উপবৃত্তের উপর P(x, y) যে কোনো বিন্দু।



উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{2}$

$\therefore$ উপবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে পাই, $SP = e.\,MP$

$\Rightarrow SP^2 = e^2.MP^2$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x - y + 3}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right)^2$

$\Rightarrow 8(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y$

$\therefore 7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$ এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ দৃশ্যকল্প-১: একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (1, 1) এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x + y + 1 = 0$।

দৃশ্যকল্প-২: একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব ৪ একক এবং নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 18 একক।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. $(\sqrt{3}\sec\theta, 2\tan\theta)$ পরামিতিক স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত পরাবৃত্তের সমীকরণ, অক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(\sqrt{3}\sec\theta, 2\tan\theta)$

পরামিতিক সমীকরণ $x = \sqrt{3}\sec\theta$ এবং $y = 2\tan\theta$

আবার, $\frac{x}{\sqrt{3}} = \sec\theta$

বা, $\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} = \sec^2\theta$ ……… (i)

এবং $y = 2\tan\theta$

বা, $\frac{y}{2} = \tan\theta$

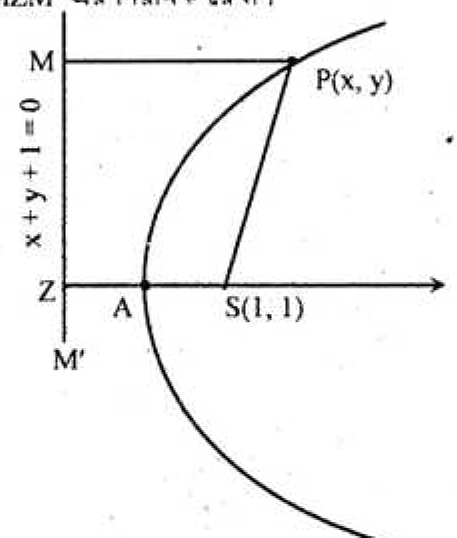
বা, $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \tan^2\theta$ ……… (ii)

(i) – (ii) হতে, $\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{(2)^2} = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

বা, $\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{(2)^2} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ **(Ans.)**

খ পরাবৃত্তের ওপর P(x, y) যেকোনো বিন্দু ও (1, 1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং MZM′ এর নিয়ামক রেখা।



$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x + y + 1 = 0$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$ [$\because e = 1$]

বা, $SP^2 = PM^2$

বা, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{(x + y + 1)^2}{(\sqrt{2})^2}$

বা, $2\{(x - 1)^2 + (y - 1)^2\} = (x + y + 1)^2$

বা, $2(x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2y + 2x$

$\therefore x^2 - 6x + y^2 - 6y + 3 - 2xy = 0$ **(Ans.)**

যা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

উপকেন্দ্র (1, 1) দিয়ে অতিক্রমকারী $x + y + 1 = 0$ নিয়ামক রেখার ওপর লম্ব রেখাটিই অক্ষরেখা।

$x + y + 1 = 0$ রেখার ওপর লম্ব যেকোনো রেখার সমীকরণ

$x - y + k = 0$ ……… (i)

যেহেতু (i) নং সরলরেখাটি (1, 1) বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore 1 - 1 + k = 0$

অর্থাৎ, $k = 0$

সুতরাং, অক্ষরেখার সমীকরণ, $x - y = 0$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2.SZ$

SZ = নিয়ামক থেকে $S(1, 1)$ উপকেন্দ্রের লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{1+1+1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2 \times \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্র দিয়ে অতিক্রান্ত নিয়ামক রেখার সমান্তরাল রেখাটিই উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ। নিয়ামক রেখার সমান্তরাল যেকোনো রেখার সমীকরণ,

$x + y + k' = 0$ ……… (ii)

যদি (ii) নং উপকেন্দ্র $S(1, 1)$ দিয়ে অতিক্রম করে, তবে $1 + 1 + k' = 0$

বা, $k' = -2$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x + y - 2 = 0$ **(Ans.)**

গ মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যার উৎকেন্দ্রিকতা e

তাহলে উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae$

এবং নিয়ামক রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{2a}{e}$

শর্তানুসারে, $2ae = 8$ ……… (i)

এবং $\frac{2a}{e} = 18$ ……… (ii)

(i) নং হতে $a = \frac{8}{2e}$ ……… (iii)

এখন, $2.\frac{8}{2e.e} = 18$

বা, $e^2 = \frac{4}{9}$

$\therefore e = \frac{2}{3}$

(iii) নং হতে $a = \frac{8}{2e} = \frac{8}{2 . \frac{2}{3}} = 6$

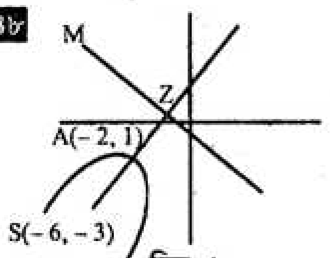
এবং $b^2 = a^2(1-e^2) = 36\left(1 - \frac{4}{9}\right) = 20$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

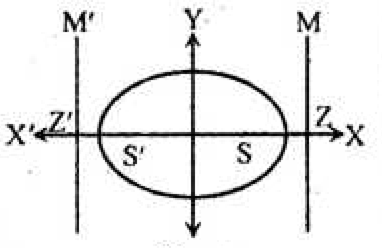
বা $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

$\therefore 5x^2 + 9y^2 = 180$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৮



চিত্র: ১



চিত্র: ২

[মদন মোহন কলেজ, সিলেট]

ক. $3x^2 - 4y^2 = 12$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. চিত্র-১: এর পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. চিত্র-২: $SS' = 8$ এবং $ZZ' = 18$ হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $3x^2 - 4y^2 = 12$

বা, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

বা, $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

একে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2, b = \sqrt{3}$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$$= \sqrt{1 + \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2}} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $= 2ae$

$$= 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$= 2\sqrt{7}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, উপকেন্দ্র $S(-6, -3)$ ও শীর্ষবিন্দু $A(-2, 1)$; এবং অক্ষ ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দু $Z(h,k)$। তাহলে SZ এর মধ্যবিন্দু A হবে।

$\therefore \frac{h-6}{2} = -2$ এবং $\frac{k-3}{2} = 1$

$\therefore h = 2$ এবং $k = 5$

$\therefore$ Z এর স্থানাঙ্ক $(2, 5)$

অক্ষের সমীকরণ অর্থাৎ $(-6, -3)$ ও $(-2, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{y+3}{-3-1} = \frac{x+6}{-6+2}$

বা, $y + 3 = x + 6$

$\therefore x - y + 3 = 0$ **(Ans.)**

$x - y + 3 = 0$ রেখার লম্বরেখার সমীকরণ,

$x + y + k = 0$ যা $(2, 5)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 2 + 5 + k = 0$

$\therefore k = -7$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x + y - 7 = 0$

মনে করি, পরাবৃত্তস্থ যেকোনো বিন্দু (x, y) তাহলে পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$(x+6)^2 + (y+3)^2 = \left(\pm\frac{x+y-7}{\sqrt{2}}\right)^2$

বা, $2(x^2 + 12x + y^2 + 6y + 45) = (x + y - 7)^2$

বা, $2x^2 + 24x + 2y^2 + 12y + 90$

$= x^2 + y^2 + 49 + 2xy - 14x - 14y$

বা, $x^2 + y^2 - 2xy + 38x + 26y + 41 = 0$

$\therefore (x - y)^2 + 38x + 26y + 41 = 0$ **(Ans.)**

গ মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যার উৎকেন্দ্রিকতা e

তাহলে উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae$

এবং নিয়ামক রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{2a}{e}$

শর্তানুসারে, $2ae = 8$ ……… (i)

এবং $\frac{2a}{e} = 18$ ……… (ii)

(i) নং হতে $a = \frac{8}{2e}$ ……… (iii)

এখন, $2.\frac{8}{2e.e} = 18$

বা, $e^2 = \frac{4}{9}$

$\therefore e = \frac{2}{3}$

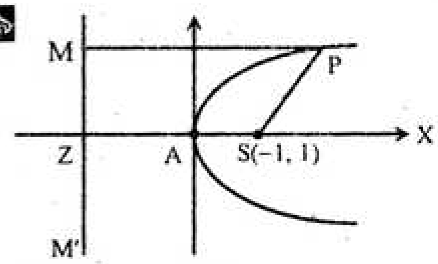
(iii) নং হতে $a = \frac{8}{2e} = \frac{8}{2 . \frac{2}{3}} = 6$

এবং $b^2 = a^2(1-e^2) = 36\left(1 - \frac{4}{9}\right) = 20$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

$\therefore 5x^2 + 9y^2 = 180$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৯ *[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]*



ক. $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$ কণিকটির উপকেন্দ্রিক লম্ব এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. কণিকটি পরাবৃত্ত হলে MZM′ রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর যেখানে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, −3) ৪

গ. SP : PM = 3 : 4 এবং MZM′ রেখার সমীকরণ $3x - 4y = 1$ হলে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$

$\therefore \frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ ……… (i)

(i) নং কে অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ,

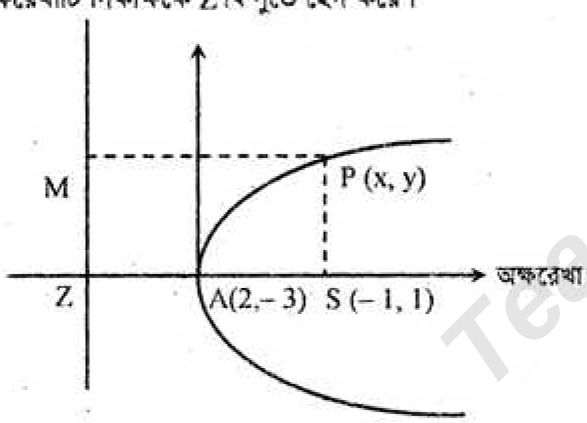
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$b = 1,\ a = \sqrt{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b}$ একক

$= \frac{2(\sqrt{2})^2}{1}$ একক = 4 একক **(Ans.)**

খ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S (− 1, 1) এবং শীর্ষবিন্দু A(2, −3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাটি তার অক্ষরেখা। মনে করি, অক্ষরেখাটি দিকাক্ষকে Z বিন্দুতে ছেদ করে।



ধরি, Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

যেহেতু AS = AZ

অর্থাৎ, $-3 = \frac{\beta + 1}{2}$ এবং $2 = \frac{\alpha - 1}{2}$

$\therefore \beta = -7$ বা, $\alpha = 4 + 1$ $\therefore \alpha = 5$

$\therefore$ Z-এর স্থানাঙ্ক (5, − 7)

অক্ষ ZS-এর ঢাল $= \frac{-7 - 1}{5 + 1} = \frac{-4}{3}$

অতএব, ZS-এর সমীকরণ,

$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 1)$

বা, $3y - 3 = -4x - 4$

$\therefore 4x + 3y + 1 = 0$ **(Ans.)**

আবার, নিয়ামক রেখা অক্ষের উপর লম্ব, অতএব, নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

নিয়ামক রেখা (5, − 7) বিন্দুগামী

$\therefore 3.5 - 4(-7) + k = 0$

$\therefore k = -43$

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $3x - 4y - 43 = 0$ **(Ans.)**

গ ধরি, কণিকটির উপরস্থ একটি বিন্দু P(x, y)

এখানে, MZM′ রেখার সমীকরণ,

$3x - 4y = 1$

বা, $3x - 4y - 1 = 0$

শর্তমতে, $SP : PM = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{SP}{PM} = \frac{3}{4}$

বা, $SP = \frac{3}{4} PM$

বা, $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \frac{3}{4}\frac{|3x - 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$

বা, $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \frac{3}{4}\frac{(3x - 4y - 1)}{\sqrt{25}}$

বা, $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{16}\frac{(3x - 4y - 1)^2}{25}$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{9}{400}(9x^2 + 16y^2 + 1 - 24xy + 8y - 6x)$

বা, $400x^2 + 800x + 400 + 400y^2 - 800y + 400 = 81x^2 + 144y^2 + 9 - 216xy + 72y - 54x$

বা, $400x^2 + 800x + 400 + 400y^2 - 800y + 400 - 81x^2 - 144y^2 - 9 + 216xy - 72y + 54x = 0$

বা, $319x^2 + 256y^2 + 216xy + 854x - 872y + 791 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫০ একটি কণিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (− 1, 1) এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ $x - y + 3 = 0$। *[সরকারি বি এল কলেজ, খুলনা]*

ক. $2x^2 - y^2 = 4$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের কণিকটি পরাবৃত্ত হলে এর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ হলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2x^2 - y^2 = 4$

বা, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\therefore a^2 = 2, b^2 = 4$

$\therefore e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{1 + \frac{4}{2}}$

$= \sqrt{1 + 2}$

$\therefore e = \sqrt{3}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, $x - y + 3 = 0$ রেখার লম্বের সমীকরণ

$x + y + k = 0$ ……….(i)

যেহেতু (i) রেখাটি (−1, 1) বিন্দুগামী

$-1 + 1 + k = 0$ বা, $k = 0$

(i) এ k = 0 বসিয়ে $x + y = 0$

বা, $x = -y$…………(ii)

$x - y + 3 = 0$ সমীকরণে $x = -y$ বসিয়ে $-y - y + 3 = 0$

বা, $2y = 3$ বা, $y = \frac{3}{2}$

(ii) এ $y = \frac{3}{2}$ বসিয়ে $x = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore$ অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দু $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

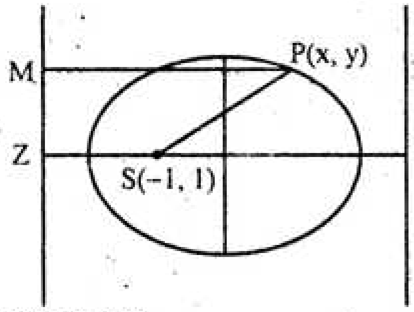
মনে করে, শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)

প্রদত্ত উপকেন্দ্র (−1, 1)

$\therefore \alpha = \frac{-\frac{3}{2} - 1}{2} = -\frac{5}{4}$ | $\beta = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ **(Ans.)**

গ মনে করি, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S(−1, 1) নিয়ামক MZ এবং উপবৃত্তের উপর P(x, y) যে কোনো বিন্দু।



উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{2}$

∴ উপবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে পাই, $SP = e. MP$

বা, $SP^2 = e^2.MP^2$

বা, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x - y + 3}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right)^2$

বা, $8(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y$

∴ $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$ এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫১ দৃশ্যকল্প-১: উপকেন্দ্র $(-1, 3)$ ও শীর্ষবিন্দু $(4, 3)$.

দৃশ্যকল্প-২: উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ৪ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

[সরকারি সুন্দরবন আদর্শ কলেজ, খুলনা]

ক. $25x^2 - 16y^2 = 400$ কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরাবৃত্তের সমীকরণ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে উপবৃত্তের সমীকরণ ও বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের সমীকরণ,
$25x^2 - 16y^2 = 400$

বা, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

∴ $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$

একে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
$a = 4, b = 5$

∴ কেন্দ্র $(0, 0)$ **(Ans.)**

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16 + 25}{16}}$
$= \frac{\sqrt{41}}{4}$ **(Ans.)**

খ ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $S(-1, 3)$ এবং শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $A(4, 3)$
ASX রেখাটি অক্ষরেখা, ZM উহার নিয়ামক রেখা এবং পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $Z(\alpha, \beta)$
যেহেতু, শীর্ষবিন্দু $A(4, 3)$, ZS এর মধ্যবিন্দু

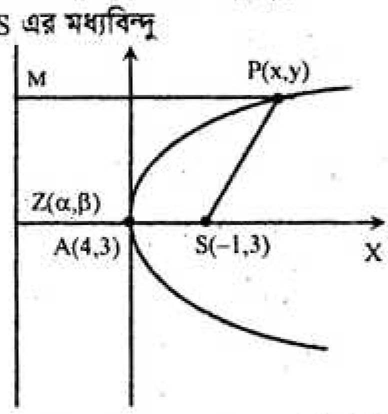
∴ $4 = \frac{-1 + \alpha}{2}$

∴ $\alpha = 9$

এবং $3 = \frac{3 + \beta}{2}$

বা, $\beta = 3$

∴ $\beta = 3$



∴ Z এর স্থানাঙ্ক $(9, 3)$

এখন, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা অর্থাৎ ZS বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-9}{9+1} = \frac{y-3}{3-3}$

বা, $\frac{x-9}{10} = \frac{y-3}{0}$

∴ $y - 3 = 0$ **(Ans.)** ...... (i)

আবার, যেহেতু পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা অক্ষরেখার ওপর লম্ব এবং Z বিন্দুগামী।

∴ (i) নং এর লম্ব রেখার সমীকরণ, $x + k = 0$ ...... (ii)

(ii) নং রেখা $Z(9, 3)$ বিন্দুগামী।

∴ $k = -9$

k এর মান (ii) নং বসিয়ে, $x - 9 = 0$

∴ নিয়ামক রেখা সমীকরণ, $x - 9 = 0$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

বা, $\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x-9|}{\sqrt{1}}$

বা, $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-9)^2$

বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 18x + 81$

বা, $y^2 - 6y + 20x - 71 = 0$ **(Ans.)** ...... (iii)

(iii) হতে পাই,
$y^2 - 6y + 9 = -20x + 71 + 9$

বা, $(y-3)^2 = -20(x-4)$

∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |-20| = 20$ **(Ans.)**

গ ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a} = 8$

∴ $b^2 = 4a$ ...... (i)

এবং উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

আমরা জানি, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

বা, $a^2 - 2b^2 = 0$

বা, $a^2 - 2(4a) = 0$ [(i) নং হতে]

বা, $a^2 - 8a = 0$

বা, $a(a - 8) = 0$

∴ $a = 8.\ (a \neq 0)$

a এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $b^2 = 32 = (4\sqrt{2})^2$

∴ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{(8)^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{2})^2} = 1$

বা, $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$

∴ $x^2 + 2y^2 = 64$ **(Ans.)**

যেহেতু $a = 8$ এবং $b = 4\sqrt{2}$

∴ $a > b$

∴ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 8 = 16$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫২ পরাবৃত্তের শীর্ষ $(0, 3)$ এবং উপকেন্দ্র $(3, 5)$

[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]

ক. $x^2 - 4y^2 - 6x + 5 = 0$ কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের উপকেন্দ্রটি যদি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র হয়, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x - y + 2 = 0$ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 - 4y^2 - 6x + 5 = 0$

বা, $x^2 - 2.3.x + 3^2 - 3^2 - 4y^2 + 5 = 0$

বা, $(x-3)^2 - 4y^2 = 4$

বা, $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{4y^2}{4} = \frac{4}{4}$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{(x-3)^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ ...... (i)

(i) নং সমীকরণকে $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
$a = 2, b = 1, X = x - 3, Y = y$

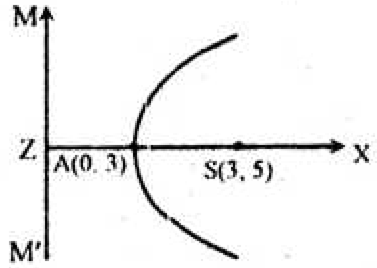
∴ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$
$= \sqrt{1 + \frac{1^2}{2^2}}$
$= \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(3, 5) এবং শীর্ষ A(0, 3)

AX অক্ষ নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং, AZ = AS

যেহেতু A এর স্থানাংক (0, 3)



ধরি, Z এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)

A, ZS এর মধ্যবিন্দু

$\therefore \quad \frac{x_1 + 3}{2} = 0, \frac{y_1 + 5}{2} = 3$

বা, $x_1 + 3 = 0$ বা, $y_1 + 5 = 6$

$\therefore \quad x_1 = -3$ $\therefore \quad y_1 = 1$

$\therefore$ Z এর স্থানাঙ্ক (– 3, 1)

ZS রেখার সমীকরণ, $\frac{y-1}{1-5} = \frac{x+3}{-3-3}$

বা, $\frac{y-1}{-4} = \frac{x+3}{-6}$

বা, $-6y + 6 = -4x - 12$

বা, $4x - 6y + 18 = 0$

MZ রেখা ZS রেখার উপর লম্ব

$\therefore$ MZ রেখার সমীকরণ $6x + 4y + k = 0$

যা, (– 3, 1) বিন্দুগামী

$\therefore \quad 6 \times (-3) + 4 \times 1 + k = 0$

বা, $-18 + 4 + k = 0$

$\therefore \quad k = 14$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $6x + 4y + 14 = 0$

$\therefore \quad 3x + 2y + 7 = 0$ **(Ans.)**

গ প্রশ্নমতে, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র (3, 5)

ধরি, P(x, y) উপবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু, S(3, 5) উপবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং PM, নিয়ামক $x - y + 2 = 0$ এর উপর লম্ব।

সংজ্ঞানুসারে, SP = e.PM

বা, $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-y+2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right)$

বা, $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-y+2}{\sqrt{2}}\right)$

বা, $(x-3)^2 + (y-5)^2 = \frac{(x-y+2)^2}{4}$ [বর্গ করে]

বা, $4(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25) = x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 4x - 4y$

বা, $4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 - 40y + 100 - x^2 - y^2 - 4 + 2xy - 4x + 4y = 0$

বা, $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 28x - 36y + 132 = 0$

এটিই উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫৩ একটি কণিকের উপকেন্দ্র (– 1, 1) এবং নিয়ামক রেখা: $x - y + 3 = 0$ *[ভোলা সরকারি কলেজ]*

ক. $3x^2 - y^2 = 6$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের কণিকটি পরাবৃত্ত হলে এর শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ হলে সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $3x^2 - y^2 = 6$

বা, $\frac{3x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ ... ... (i)

(i) নং কে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a^2 = 2, b^2 = 6$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{6}{2}}$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ **(Ans.)**

খ মনে করি, $x - y + 3 = 0$ রেখার লম্বের সমীকরণ

$x + y + k = 0$ ....(i)

যেহেতু (i) রেখাটি (–1, 1) বিন্দুগামী

$-1 + 1 + k = 0$ বা, $k = 0$

(i) এ $k = 0$ বসিয়ে $x + y = 0$

বা, $x = -y$............(ii)

$x - y + 3 = 0$ সমীকরণে $x = -y$ বসিয়ে $-y - y + 3 = 0$

বা, $2y = 3 \therefore y = \frac{3}{2}$

(ii) এ $y = \frac{3}{2}$ বসিয়ে $x = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore$ অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দু $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

মনে করে, শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)

প্রদত্ত উপকেন্দ্র (–1, 1)

$\therefore \alpha = \frac{-\frac{3}{2} - 1}{2} = -\frac{5}{4}$ $\beta = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্র দিয়ে অতিক্রান্ত নিয়ামক রেখার সমান্তরাল রেখাটিই উপকেন্দ্রিক লম্ব।

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমান্তরাল যেকোনো রেখার সমীকরণ,

$x - y + k = 0$ ... ... (iii)

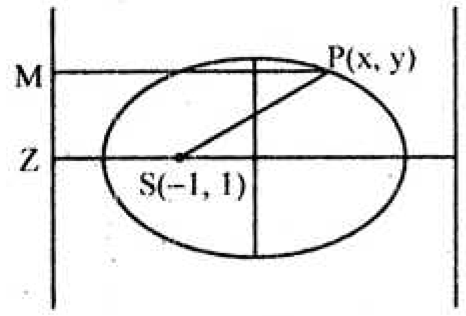
যদি (iii) নং সমীকরণ উপকেন্দ্র (– 1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তবে,

$-1 - 1 + k = 0$

বা, $k = 2$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x - y + 2 = 0$ **(Ans.)**

গ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{2} < 1$। অর্থাৎ কণিকটি একটি উপবৃত্ত। মনে করি, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S(–1, 1) নিয়ামক MZ এবং উপবৃত্তের উপর P(x, y) যে কোনো বিন্দু।



উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{2}$

$\therefore$ উপবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে পাই, SP = e. MP

$\Rightarrow SP^2 = e^2.MP^2$

$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x-y+3}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right)^2$

$\Rightarrow 8(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y$

$\therefore 7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$ এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

★ বিভিন্ন ধরনের কণিক, চিত্রের সাহায্যে কণিক উপস্থাপন

১. অধিবৃত্তের জন্য নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক $e < 1$ খ $e > 1$
গ $0 < e < 1$ ঘ $e = 0$ **খ**

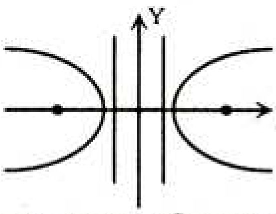
২. $11x^2 + 14y^2 - 4xy - 48x - 24y + 66 = 0$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? (কঠিন)
ক বৃত্ত খ পরাবৃত্ত
গ উপবৃত্ত ঘ অধিবৃত্ত **গ**

ব্যাখ্যা: এখানে, $a = 11, b = 14, h = -2, D \neq 0$
$ab - h^2 = 11.14 - (-2)^2 = 154 - 4 = 150 > 0$
এবং $ab - h^2 > 0$;
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

৩. $y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ সমীকরণটি নির্দেশ করে— (মধ্যম)
ক বৃত্ত খ পরাবৃত্ত
গ অধিবৃত্ত ঘ উপবৃত্ত **খ**

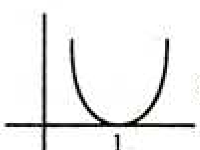
ব্যাখ্যা: এখানে, $a = 0, b = 1, h = 0, D \neq 0$
$\therefore ab - h^2 = 0$, সুতরাং পরাবৃত্ত।

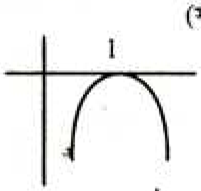
৪.

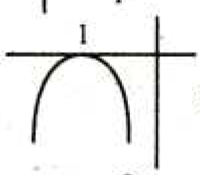


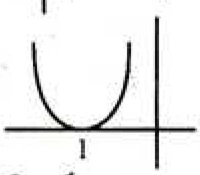
চিত্রটি কোন ধরনের কণিকের? (সহজ)
ক বৃত্ত খ উপবৃত্ত
গ অধিবৃত্ত ঘ পরাবৃত্ত **গ**

৫. নিচের কোনটি $y = -(x-1)^2$ এর লেখচিত্র? (সহজ)

ক 

খ 

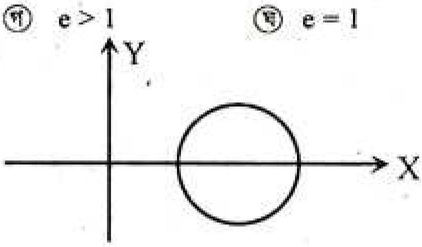
গ 

ঘ 

খ

৬. উপবৃত্তের জন্য নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক $e = 0$ খ $0 < e < 1$
গ $e > 1$ ঘ $e = 1$ **খ**

৭.



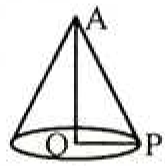
কণিকটির জন্য উৎকেন্দ্রিকতার শর্ত কী? (সহজ)
ক $e = 0$ খ $e = 1$
গ $0 < e < 1$ ঘ $e > 1$ **ক**

৮. অধিবৃত্ত—
i. একটি আবদ্ধক্ষেত্র
ii. সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
iii. উৎকেন্দ্রিকতা, $e > 1$
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

৯. কণিক বিভিন্ন প্রকার হতে পারে যেমন—
i. উপবৃত্ত
ii. অধিবৃত্ত
iii. যুগল সরলরেখা
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

★ কোণকের ও তলের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথই যে কণিক তা চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন

১০.



চিত্রের কোণকটি সমবৃত্তীয় হওয়ার শর্ত কী? (মধ্যম)
ক $AP = OP$ খ $AP > OP$
গ $\angle AOP = 90°$ ঘ $AP < OP$ **গ**

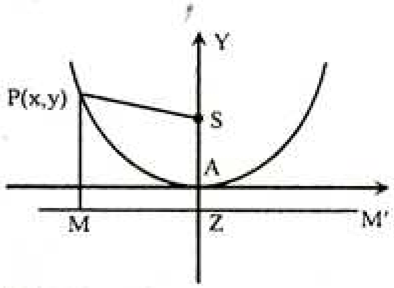
নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (১১ ও ১২)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি কণিকের সাধারণ সমীকরণ। $D \neq 0$

১১. কণিকটি অধিবৃত্ত হওয়ার শর্ত কী? (কঠিন)
ক $ab - h^2 > 0$ খ $ab - h^2 < 0$
গ $ab - h^2 > 1$ ঘ $ab - h^2 < 1$ **খ**

১২. বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)
ক $4x^2 + 5y^2 + 7x + 9y + 8 = 0$
খ $4x^2 + 5y^2 + 2xy + 9x + 7y + 8 = 0$
গ $4x^2 + 4y^2 + 9x + 7y + 8 = 0$
ঘ $4x^2 + 4y^2 + 16xy + 9x + 7y + 8 = 0$ **গ**

★★ মূলবিন্দুগামী পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন

১৩.



এখানে AS = AZ

চিত্রে পরাবৃত্তটির দিকাক্ষ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) MM′ (খ) SP

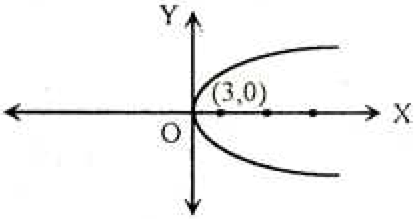
(গ) x অক্ষ (ঘ) MP **ক**

১৪. $y^2 = -14ax (a > 0)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র কোথায় থাকে? (মধ্যম)

(ক) ধনাত্মক x অক্ষে (খ) ঋণাত্মক x অক্ষে

(গ) ধনাত্মক y অক্ষে (ঘ) ঋণাত্মক y অক্ষে **খ**

১৫. চিত্রানুসারে, পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখা কোনটি? (মধ্যম)



(ক) $x + 3 = 0$ (খ) $x = 0$

(গ) $y = 0$ (ঘ) $x - 3 = 0$ **ক**

★ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক এবং নিয়ামকের সমীকরণ

১৬. মূলবিন্দুতে শীর্ষ বিন্দু এবং অক্ষরেখা x অক্ষ বরাবর এমন পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (–3,0) হলে, নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $y + 3 = 0$ (খ) $y - 3 = 0$

(গ) $x + 3 = 0$ (ঘ) $x - 3 = 0$ **ঘ**

১৭. কোনো পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ $2x + 3y = 8$ এবং নিয়ামক (1,1) বিন্দুগামী হলে পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কী? (কঠিন)

(ক) $3x - 2y + 1 = 0$ (খ) $3x - 2y = 1$

(গ) $3x - 2y = 5$ (ঘ) $3x - 2y + 5 = 0$ **খ**

১৮. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তটির —

i. উপকেন্দ্র (16, 0)

ii. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 16

iii. দিকাক্ষের সমীকরণ, $x + 4 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **গ**

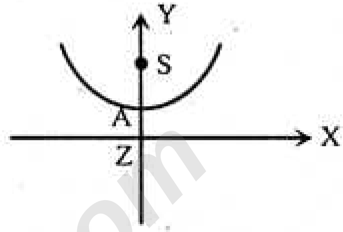
ব্যাখ্যা: $y^2 = (4) \times (4) \times (x)$; $a = 4$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(a,0) = (4,0)$

উপকেন্দ্রিক লম্ব $= |4a| = 16$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $x + a = 0 \Rightarrow x + 4 = 0$

১৯.



পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র S এর স্থানাংক (0, 4) এবং নিয়ামক x অক্ষরেখা হলে —

i. A বিন্দুর স্থানাংক (0,2)

ii. পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 8(y - 2)$

iii. অক্ষরেখা y অক্ষ বরাবর

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

২০. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 6 হলে,–

i. বিন্দুটির ভুজ 4

ii. বিন্দুটির কোটি $\pm 4\sqrt{3}$

iii. বিন্দুটি দিকাক্ষ এবং উপকেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

ব্যাখ্যা: $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের,

ফোকাস দূরত্ব $= a + x$

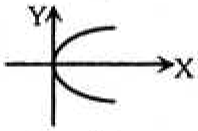
$\therefore 6 = 2 + x \Rightarrow x = 4$

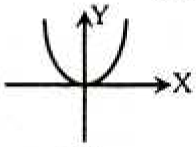
আবার, $y^2 = 8 \times 4 = 32$

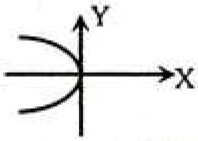
$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{2}$

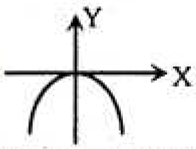
★★ পরাবৃত্তের বিভিন্ন আকার, পরাবৃত্তের বিশেষ আকার

২১. $x^2 = 4ay, (a < 0)$ পরাবৃত্তের আকার কোনটি? (সহজ)

ক 

খ 

গ 

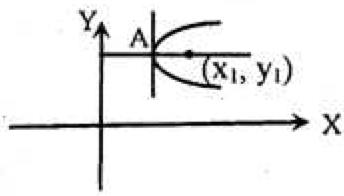
ঘ 

ঘ

২২. $y^2 = 12(x + 3)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক কত? (মধ্যম)

ক $(3,0)$ খ $(-3,0)$
গ $(0,0)$ ঘ $(12,0)$ গ

২৩.



পরাবৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? (সহজ)

ক $y^2 = -4ax$ খ $y^2 = 4a(x - a)$
গ $y^2 = 4a(x + x')$
ঘ $(y - y_1)^2 = 4a(x - x_1)$ ঘ

২৪. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(y + \frac{61}{40}\right)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু কোনটি? (মধ্যম)

ক $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}\right)$ খ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
গ $(2, 0)$ ঘ $\left(\frac{3}{2}, \frac{61}{40}\right)$ ক

২৫. $5y = x + 50$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, তার ফোকাস কত? (মধ্যম)

ক $(1, 0)$ খ $(10, 0)$
গ $(2, 0)$ ঘ $(5, 0)$ গ

২৬. $y^2 = -4ax$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি? (সহজ)

ক $x + a = 0$ খ $x - a = 0$
গ $y + a = 0$ ঘ $y - a = 0$ খ

২৭. $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে তার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক। (মধ্যম)

ক $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ খ $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$
গ $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$ ঘ $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ ঘ

ব্যাখ্যা: $(-2)^2 = 4 \times p \times 3$

বা, $12p = 4 \therefore p = \frac{1}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

২৮. $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তটির নিয়ামকরেখার সমীকরণ — (সহজ)

ক $x = 1$ খ $x = -2$
গ $y = -2$ ঘ $y = 2$ ঘ

২৯. $y^2 = 4x + 8y$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু — (মধ্যম)

ক $(1, 2)$ খ $(4, -4)$
গ $(2, 4)$ ঘ $(-4, 4)$ ঘ

৩০. যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(4, 0)$ এবং নিয়ামক $x + 2 = 0$ তার সমীকরণ — (মধ্যম)

ক $y^2 = 4(x - 1)$ খ $y^2 = 8(x - 3)$
গ $y^2 = 10(x + 2)$ ঘ $y^2 = 12(x - 1)$ ঘ

ব্যাখ্যা: $SP = PM$

বা, $\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \left|\frac{x+2}{\sqrt{1^2}}\right|$

বা, $x^2 - 8x + 16 + y^2 = (x + 2)^2$

বা, $y^2 = 12x - 12$

$\therefore y^2 = 12(x - 1)$

৩১. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের $(1, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? (সহজ)

ক $4y = 2x + 3$ খ $2x + y = 2$
গ $y = 2x + 2$ ঘ $x + y = 2$ গ

ব্যাখ্যা: $y.4 = 16 \times \frac{x+1}{2}$

৩২. $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 হলে, P এর ফোকাস দূরত্ব কত? (সহজ)

ক 9.5 খ 10.5
গ 18.25 ঘ 20.25 গ

৩৩. $y^2 = 4x + 4y - 8$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ক 4 খ 8
গ 16 ঘ কোনটিই নয় ক

ব্যাখ্যা: $y^2 = 4x + 4y - 8$

বা, $(y - 2)^2 = 4.1(x - 1)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4.1| = 4$

৩৪. a ও b এর মান কত হলে $y = ax^2 + b$ পরাবৃত্তটি $(0, 1)$ বিন্দু দিয়ে যাবে ও $(1, 0)$ বিন্দুতে উহার স্পর্শকের ঢাল 6 হবে? (মধ্যম)

ক $-1, 1$ খ $3, 1$
গ $1, -1$ ঘ $1, 3$ খ

ব্যাখ্যা: $y = ax^2 + b$ রেখাটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী হলে, $b = 1$

$\frac{dy}{dx} = 2ax, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = 2a = 6 \therefore a = 3$

৩৫. $y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে। $a = 8$ এবং $m = 2$ হলে c এর মান কত? (মধ্যম)

ক 4 খ -4
গ -5 ঘ 5 **ক**

৩৬. পরাবৃত্তের পরামিতিকসমীকরণ — (মধ্যম)

ক $x = at, y = 2at$ খ $x = at^2, y = 2at$
গ $y = at^2, x = 2at$ ঘ খ ও গ **ঘ**

৩৭. $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়? (সহজ)

ক $(1, 1)$ খ $(2, 2)$
গ $(\pm 2, 1)$ ঘ $(1, \pm 2)$ **গ**

৩৮. $(x - 4)^2 = -4(y - 5)$ পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ— (সহজ)

ক $y = 4$ খ $y = 6$
গ $x = 6$ ঘ $y = -6$ **খ**

৩৯. $2x = y^2 + 8y + 22$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক — (মধ্যম)

ক $(3, -4)$ খ $(-3, 4)$
গ $(-3, -4)$ ঘ $(3, 4)$ **ক**

ব্যাখ্যা: $2x = y^2 + 8y + 22$
বা, $(y + 4)^2 = 2(x - 3)$
$\therefore$ $y + 4 = 0$ ও $x - 3 = 0$
$y = -4$ $x = 3$
$\therefore$ $(3, -4)$

৪০. $x = 2t, y = t^2$ দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক — (মধ্যম)

ক $(1, 0)$ খ $(0, 1)$
গ $(-1, 0)$ ঘ $(0, -1)$ **খ**

ব্যাখ্যা: $x = 2t$ বা, $t = \frac{x}{2}$
$\therefore$ $y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$
$\therefore$ $x^2 = 4y$ বা, $x^2 = 4.1.y$
$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(0, 1)$

৪১. $y^2 = -20x$ পরাবৃত্তের —
i. উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-5, 0)$
ii. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 20 একক
iii. নিয়ামকের সমীকরণ $x = -5$
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৪২. $x^2 = 2(3 + y)$ পরাবৃত্তের—
i. অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$
ii. নিয়ামকের সমীকরণ, $7 + 2y = 0$
iii. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $5 - 2y = 0$
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৪৩ – ৪৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y^2 = 4PX$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দুগামী।

৪৩. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র কোনটি? (মধ্যম)

ক $(3, 0)$ খ $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$
গ $(0, 3)$ ঘ $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ **খ**

৪৪. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ক $\frac{4}{3}$ খ $\frac{1}{3}$
গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{3}{4}$ **ক**

৪৫. নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $x + 3 = 0$ খ $x - 3 = 0$
গ $3x + 1 = 0$ ঘ $3x - 1 = 0$ **গ**

নিচের উপাত্তের ভিত্তিতে (৪৬ ও ৪৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোনো পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 = 4a(y - a)$
যেখানে, $a < 0$

৪৬. পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $x = a$ খ $x = -a$
গ $x = 0$ ঘ $y = a$ **গ**

৪৭. পরাবৃত্তটিতে $a = -6$ হলে, শীর্ষবিন্দুর স্থান কত? (মধ্যম)

ক $(0,0)$ খ $(-6,0)$
গ $(0,-6)$ ঘ $(-12,0)$ **গ**

নিচের উপাত্তের ভিত্তিতে (৪৮ ও ৪৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি পরাবৃত্তের অক্ষ x অক্ষ বরাবর উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে। অক্ষরেখা ও দিকাক্ষ $(-6, 0)$ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

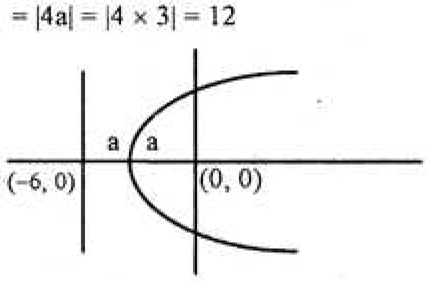
৪৮. পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক কোনটি? (মধ্যম)

ক $(0,-6)$ খ $(-6,0)$
গ $(-3,0)$ ঘ $(0,-3)$ **গ**

৪৯. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ক 12 খ 6
গ 3 ঘ $\frac{1}{3}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $a = 3$
পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য
$= |4a| = |4 \times 3| = 12$



★ কোনো সরলরেখা পরাবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত ও স্পর্শ বিন্দুর স্থানাংক

৫০. $y = mx + c$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাংক কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2m}{a}\right)$ ⓛ $\left(\frac{a}{m}, \frac{2m^2}{a}\right)$

ⓖ $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ ⓘ $\left(\frac{m}{a}, \frac{2m^2}{a}\right)$ **গ**

৫১. কোন শর্তে $2x - 3y = 9$ সরলরেখা $y^2 = 7ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে? (মধ্যম)

ⓚ $a = \frac{-8}{7}$ ⓛ $a = \frac{-7}{8}$

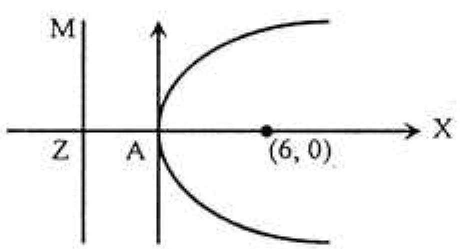
ⓖ $a = \frac{-7}{2}$ ⓘ $a = \frac{-2}{7}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $2x - 3y = 9$ বা, $y = \frac{2}{3}x - 3$

আবার, $y^2 = 7ax$ বা, $y^2 = 4.\frac{7a}{4}.x$

স্পর্শ করার শর্ত, $-3 = \frac{\frac{7a}{4}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow a = -\frac{8}{7}$

নিচের তথ্যের আলোকে (৫২ ও ৫৩)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৫২. পরাবৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? (সহজ)

ⓚ $y^2 = 6x$ ⓛ $y^2 = \frac{6}{4}x$

ⓖ $y^2 = 24x$ ⓘ $y^2 = 36x$ **গ**

৫৩. $2y - bx = 6$ রেখাটি পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, b এর মান কত? (কঠিন)

ⓚ 2 ⓛ 4

ⓖ 8 ⓘ 16 **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৪-৫৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$7y^2 = 3px$ একটি পরাবৃত্ত

৫৪. প্রদত্ত পরাবৃত্তটির p এর মান 28 হলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ⓚ 3 একক ⓛ 12 একক

ⓖ 4 একক ⓘ 28 একক **খ**

৫৫. প্রদত্ত পরাবৃত্তটিতে x এর বদলে y এবং y এর বদলে x লিখলে প্রাপ্ত পরাবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $x = 0$ ⓛ $y = 0$

ⓖ $x + y = 0$ ⓘ $x - y = 0$ **ক**

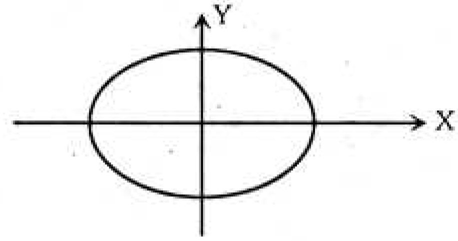
★★ উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ

৫৬. p এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে যাবে? (সহজ)

ⓚ 1 ⓛ 2

ⓖ 3 ⓘ 4 **ক**

৫৭.



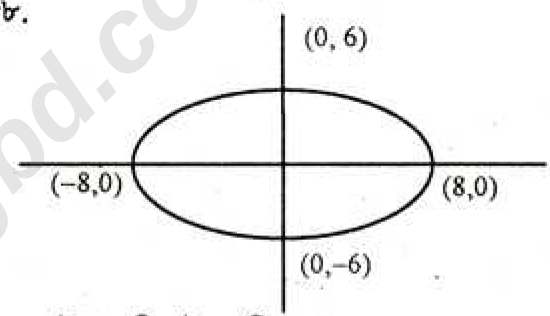
লেখচিত্রটির প্রমিত সমীকরণ কোনটি? (সহজ)

ⓚ $y = mx + c$ ⓛ $x^2 + y^2 = r^2$

ⓖ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ⓘ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **গ**

★ উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন

৫৮.



উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কত? (মধ্যম)

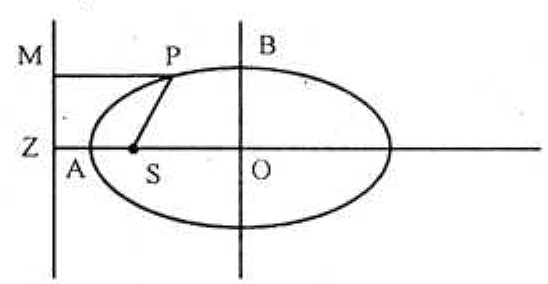
ⓚ $\frac{\sqrt{9}}{4}$ ⓛ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

ⓖ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ⓘ $\frac{\sqrt{7}}{3}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $a = 8, b = 6; a > b$

$\therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

৫৯.



উপবৃত্তটির দিকাক্ষ MZ এবং S উপকেন্দ্র হলে—

i. $e = \frac{PS}{PM}$ ii. $e = \sqrt{\frac{OA^2 - OB^2}{OA^2}}$

iii. $0 < e < 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii **ঘ**

★★ উবৃত্তের উপকেন্দ্র, নিয়ামক রেখা, উপবৃত্তের বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয়

৬০. $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$ উপবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ⓚ $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ ⓛ $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓖ $y = \pm 3$ ⓘ $y = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1; b = 2 \therefore e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ, $y = \pm\frac{b}{e} \therefore y = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

৬১. $5x^2 + 6y^2 = 30$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? (কঠিন)

ⓚ $\sqrt{6}$ ⓛ $\frac{1}{\sqrt{6}}$

ⓖ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ⓘ $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $5x^2 + 6y^2 = 30$বা, $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$

$\therefore a = \sqrt{6}$ এবং $b = \sqrt{5}$

$\therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

৬২. $\frac{(x+2)^2}{3} + \frac{(y-6)^2}{6} = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি? (কঠিন)

ⓚ $2, 6 \pm \sqrt{3}$ ⓛ $-2, 6 \pm \sqrt{3}$

ⓖ $-2, 6 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ⓘ $2, 6 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের সমীকরণের সাথে তুলনা করে করে পাই

$X = x + 2; Y = y - 6; a = \sqrt{3}; b = \sqrt{6},$

$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক,

$X = 0$ $Y = \pm be$

বা, $x + 2 = 0$ বা, $y - 6 = \pm\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

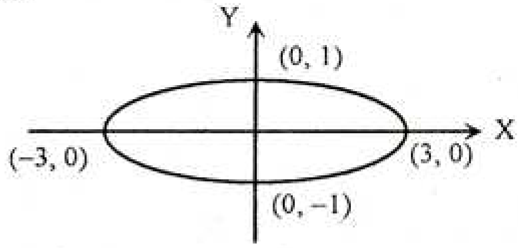
বা, $x = -2$ বা, $y = 6 \pm \sqrt{3}$

৬৩. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{8} = 1$ উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ (3, 6) ⓛ (–3,6)

ⓖ (3,–6) ⓘ (–3, – 6) **ক**

৬৪.

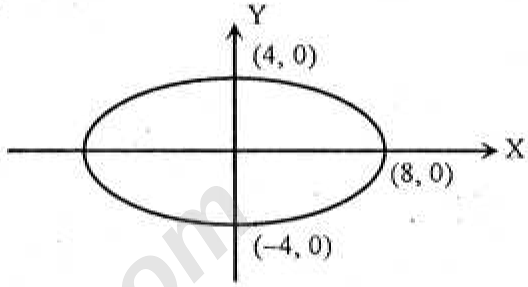


চিত্রের উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ⓚ $\frac{1}{3}$ ⓛ $\frac{2}{3}$

ⓖ 3 ⓘ 9 **খ**

৬৫.



চিত্রের উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব কত? (মধ্যম)

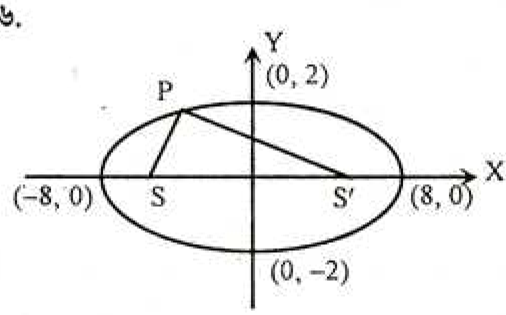
ⓚ $\sqrt{3}$ ⓛ $2\sqrt{3}$

ⓖ $4\sqrt{3}$ ⓘ $8\sqrt{3}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: চিত্রে $a = 8,\ b = 4; e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ে দূরত্ব $= 2ae = 2 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

৬৬.



চিত্রে S ও S′ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রদ্বয় এবং PS = 3 হলে, PS′ এর দৈর্ঘ্য কত? (সহজ)

ⓚ 11 ⓛ 12

ⓖ 13 ⓘ 14 **গ**

ব্যাখ্যা: চিত্রে বৃহদাক্ষ $= 2 \times 8 = 16$

$\therefore PS + PS' = 16$ বা, $PS' = 16 - 3 = 13$

৬৭. যদি $F_1(3, 0), F_2(-3, 0)$ এবং P, $16x^2 + 25y^2 = 400$ বক্ররেখার উপর একটি বিন্দু হয় তাহলে $PF_1 + PF_2 = ?$ (মধ্যম)

ⓚ 8 ⓛ 6

ⓖ 10 ⓘ 12 **গ**

৬৮. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি? (সহজ)

ক $\frac{\sqrt{5}}{2}$ খ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $=\sqrt{\frac{100-25}{100}}=\sqrt{\frac{75}{100}}$

$=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

৬৯. p এর মান কত হলে $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{p}=1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে যাবে? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{25}$ খ $\frac{17}{200}$

গ $\frac{200}{17}$ ঘ 25 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{p}=1$

(6, 4) বিন্দু দিয়ে গেলে, $\frac{36}{100}+\frac{16}{p}=1$ বা, $p=25$

৭০. $25x^2+16y^2=400$ উপবৃত্তটির–

i. উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\frac{3}{5}$

ii. অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 10 ও 8 একক

iii. উপকেন্দ্রিক লম্বের এর দৈর্ঘ্য $=\frac{32}{5}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $25x^2+16y^2=400$

বা, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

$\therefore a=4;\ b=5$

$\therefore e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\frac{3}{5}$

অক্ষদ্বয় 2a ও 2b অর্থাৎ $2\times4=8$ ও $2\times5=10$

উপকেন্দ্রিক লম্ব এর দৈর্ঘ্য $=\frac{2\times16}{5}=\frac{32}{5}$

৭১. $3x^2+4y^2=12$ উপবৃত্তের —

i. বৃহদাক্ষ X অক্ষ বরাবর

ii. নিয়ামকের সমীকরণ, $x=\pm4$

iii. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 3

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $3x^2+4y^2=12$ বা, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

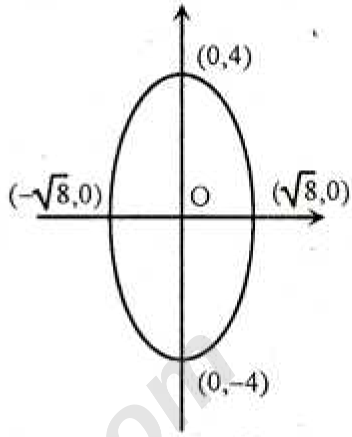
$\therefore a=2;\ b=\sqrt{3}\ [a>b]$

এখন, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$

নিয়ামকের সমীকরণ, $x=\pm\frac{a}{e}=\pm4$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2\times3}{2}=3$

৭২. উপবৃত্তটির —



i. উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ii. বৃহত্তম জ্যা এর দৈর্ঘ্য 8

iii. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

নিচের উপাত্তের আলোকে (৭৩ ও ৭৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোনো উপবৃত্তের বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষ যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর। উপবৃত্তটি (2, 0) এবং (0, 3) বিন্দুগামী।

৭৩. উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতার মান কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{4}$ খ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

গ $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ঘ $\sqrt{15}$ **খ**

৭৪. উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ক 2 খ $\frac{7}{8}$

গ $\frac{8}{3}$ ঘ $\frac{1}{8}$ **গ**

নিচের উপাত্তগুলোর আলোকে (৭৫ ও ৭৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

কোন উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

৭৫. নিচের কোন বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত? (মধ্যম)

ক (2, 3) খ (2, 1)

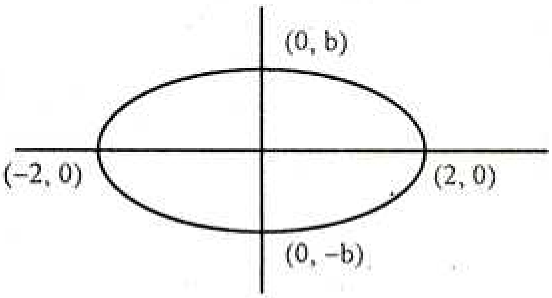
গ (−2, −1) ঘ (3, 2) **খ**

৭৬. উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (সহজ)

(ক) $\sqrt{2}$ (খ) 2

(গ) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (ঘ) 3 **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৭ ও ৭৮)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b < 2$

৭৭. b এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) $\sqrt{2}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(গ) 2 (ঘ) $\frac{1}{2}$ **ক**

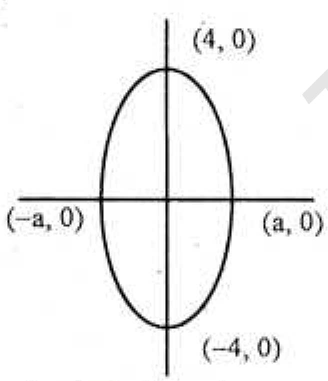
৭৮. উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (খ) $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

(গ) $(\pm\sqrt{2}, 0)$ (ঘ) $(0, \pm\sqrt{2})$ **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৯ ও ৮০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 2। $(a < 4)$



৭৯. উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতার মান কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\sqrt{3}$

(গ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **গ**

৮০. উপবৃত্তটির দিকাক্ষের সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

(ক) $x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ (খ) $y = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

(গ) $y = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$ (ঘ) $x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$ **গ**

★ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে উপবৃত্তের পরমিতিক স্থানাঙ্ক

৮১. উপবৃত্তের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$, যেখানে θ হলো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক কোণ। উপবৃত্তটির প্রমিত সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ (খ) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$

(গ) $x = \sqrt{2}\cos\theta$ (ঘ) $y = 3\sin\theta$ **খ**

৮২. $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তের যে কোনো বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $(3\cos\theta, 4\sin\theta)$ (খ) $(4\cos\theta, 3\sin\theta)$

(গ) $(3\cos\theta, 0)$ (ঘ) $(0, 4\sin\theta)$ **খ**

৮৩. $x^2 = 4 - 4y^2$ উপবৃত্তের—

i. বৃহদাক্ষ x অক্ষ বরাবর

ii. পরামিতিক স্থানাংক $(2\cos\theta, \sin\theta)$

iii. পরামিতিক সমীকরণ $x = 2\cos\theta, y = \sin\theta$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

★★ উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে উপকেন্দ্রের স্থানাংক ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয়

৮৪. উপবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ, $2x = 25$ এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক (8, 0) হলে উপবৃত্তটির বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য কত? (সহজ)

(ক) 10 (খ) 20

(গ) 30 (ঘ) 40 **খ**

ব্যাখ্যা: দিকাক্ষের সমীকরণ,

$x = \frac{25}{2} \therefore \frac{a}{e} = \frac{25}{2}$ [2a বৃহদাক্ষ ধরে]

উপকেন্দ্রের স্থানাংক, $ae = 8$

$\therefore ae \times \frac{a}{e} = \frac{25}{2} \times 8$

বা, $a^2 = 100 \therefore a = 10$

$\therefore$ বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = 2 \times 10 = 20$

৮৫. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র থেকে অনুরূপ নিয়ামকের মধ্যে দূরত্ব কত? (মধ্যম)

(ক) 9 (খ) $\frac{9}{2}$

(গ) $\frac{21}{2}$ (ঘ) $\frac{21}{4}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $a = 10; b = 6; e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{4}{5}$

$\therefore$ দূরত্ব $= \frac{a}{e} - ae = \frac{10 \times 5}{4} - 10 \times \frac{4}{5} = \frac{9}{2}$

৮৬. কোন শর্তে $lx + my + n = 0$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে? (কঠিন)

ক $(al + bm)^2 = n^2$ খ $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$
গ $(al - bm)^2 = n^2$ ঘ $al^2 + bm^2 = n^2$ **(খ)**

৮৭. $x = \sqrt{4 - 4y^2}$ উপবৃত্তকে $6x + y = k$ রেখা স্পর্শ করলে k এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\pm\sqrt{143}$ খ $\pm\sqrt{149}$
গ $\pm\sqrt{145}$ ঘ $\pm\sqrt{151}$ **(গ)**

ব্যাখ্যা: $x = \sqrt{4 - 4y^2}$ আবার, $6x + y = k$
বা, $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
বা, $y = -6x + k$
$\therefore a = 2; b = 1$
$\therefore m = -6; c = k$
এখন, স্পর্শক হওয়ার শর্ত
$k = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} = \pm\sqrt{145}$

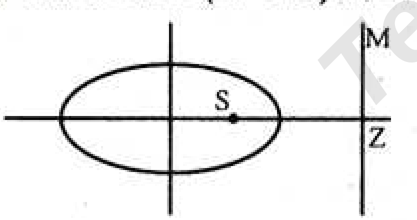
৮৮. একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ হলে —

i. y অক্ষই বৃহৎ অক্ষ
ii. বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য = 10
iii. কেন্দ্র (0, 0)

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **(ঘ)**

নিচের উপাত্তের ভিত্তিতে (৮৯ ও ৯০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



খানে, S বিন্দুর স্থানাংক $(3\sqrt{3}, 0)$ এবং MZ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $\sqrt{3}x = 12$ ।

৮৯. উপবৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ খ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$
গ $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ ঘ $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ **(খ)**

ব্যাখ্যা: উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ হলে,

$(ae, 0) = (3\sqrt{3}, 0)$ এবং $x = \frac{a}{e} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

$\therefore ae = 3\sqrt{3}$ $\therefore \frac{a}{e} = 4\sqrt{3}$

$\therefore ae \times \frac{a}{e} = 3\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 36$

বা, $a = 6 \therefore e = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার, $b^2 = (1 - e^2)a^2 = (1 - \frac{3}{4}) \times 36 = 9$

৯০. উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতার মান কত? (সহজ)

ক $\sqrt{3}$ খ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
গ $3\sqrt{3}$ ঘ 6 **(খ)**

ব্যাখ্যা: $ae = 3\sqrt{3}$ $\therefore e = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

★★ মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন, অক্ষদ্বয়ের সাথে অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু।

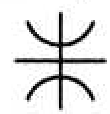
৯১. অধিবৃত্তের আড় অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের মধ্যে কোণ কত? (মধ্যম)

ক 45° খ 90°
গ 135° ঘ 180° **(খ)**

৯২. অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{36} = 1$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (সহজ)

ক 7 খ 6
গ 5 ঘ 4 **(খ)**

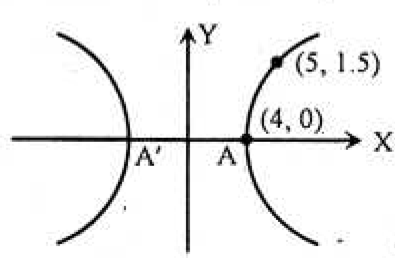
৯৩. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$ অধিবৃত্তের—

i. আকৃতি 
ii. y অক্ষকে ছেদ করে না
iii. x অক্ষকে $(\pm 10, 0)$ ছেদ করে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **(গ)**

নিচের তথ্যের আলোকে (৯৪ ও ৯৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৯৪. চিত্রে A' বিন্দুর স্থানাংক কত? (সহজ)

ক (−4 ,0) খ (−4, 4)
গ (−8, 0) ঘ (−8, 4) **(ক)**

৯৫. চিত্রের অধিবৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ খ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

গ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ ঘ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$ **গ**

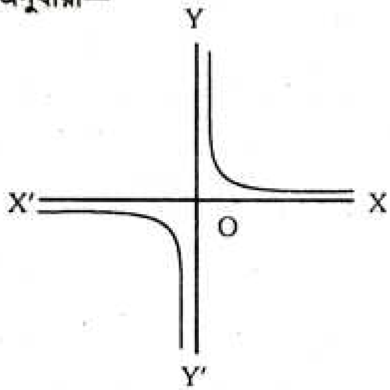
★ অধিবৃত্তের অসীমতটের অবস্থান নির্ণয়

৯৬. $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{4}=1$ অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক $y=\pm 3x$ খ $y=\pm 6x$

গ $y=\pm\frac{1}{3}x$ ঘ $y=\pm\frac{1}{6}x$ **ক**

৯৭. চিত্র অনুযায়ী—



i. অধিবৃত্তের সমীকরণ, $xy = c$

ii. অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ, $x = 0$ ও $y = 0$

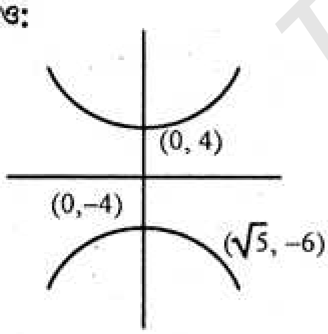
iii. দিকাক্ষের সমীকরণ, $x + y = 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

নিচের তথ্যের উপর ভিত্তি করে (৯৮ ও ৯৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৯৮. অধিবৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক $y=\sqrt{32+4x^2}$ খ $y=\sqrt{32+8x^2}$

গ $y=\sqrt{16+4x^2}$ ঘ $y=\sqrt{4+4x^2}$ **গ**

৯৯. অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? (সহজ)

ক 2 খ 4

গ 6 ঘ 8 **ক**

ব্যাখ্যা: উপকেন্দ্রিক লম্ব $=\frac{2a^2}{b}=\frac{2\times 4}{4}=2$

★★ অধিবৃত্তের আড় ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয়

১০০. $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$ অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য কত? (সহজ)

ক 2 খ 4

গ 3 ঘ 6 **খ**

ব্যাখ্যা: $b = 2$

$\therefore$ অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 2\times 2 = 4$

১০১. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{25}=1$ অধিবৃত্তের —

i. আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য ৪

ii. অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 10

iii. উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{3}{5}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

★★ অধিবৃত্তের পরামিতির স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্র, নিয়ামকের সমীকরণ এবং উৎকেন্দ্রিকতা থেকে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

১০২. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ অধিবৃত্তের $(4\sqrt{2},\ 2)$ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক কোণ কত? (সহজ)

ক $\frac{\pi^c}{3}$ খ $\frac{\pi^c}{6}$

গ $\frac{\pi^c}{4}$ ঘ π^c **গ**

ব্যাখ্যা: $4\sqrt{2}=a\sec\theta$ বা, $\sec\theta=\frac{4\sqrt{2}}{4}$

বা, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45°\ \therefore\ \theta=45°=\frac{\pi^c}{4}$

১০৩. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$ অধিবৃত্তের কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক কোণ $\frac{\pi}{4}$ হলে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক কোনটি? (মধ্যম)

ক $(\sqrt{2},\ 8)$ খ $(3\sqrt{2}\ \ 8)$

গ $(5\sqrt{2},\ 8)$ ঘ $(7\sqrt{2},\ 8)$ **গ**

১০৪. $y^2=\frac{9}{4}x^2+9$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতার মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{\sqrt{11}}{3}$ খ $\frac{\sqrt{12}}{3}$

গ $\frac{\sqrt{13}}{3}$ ঘ $\frac{\sqrt{15}}{3}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $y^2 = \frac{9}{4}x^2 + 9$ বা, $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

$\therefore b = 3;\ a = 2;$

$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{3^2 + 2^2}{3^2}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

১০৫. $x^2 = 4 + \frac{y^2}{4}$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি? (সহজ)

ⓚ $(\pm 2, 0)$ ⓚ $(\pm\sqrt{5}, 0)$

(গ) $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$ (ঘ) $(\pm 5, 0)$ **গ**

১০৬. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের পাদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{29}}, 0\right)$ (খ) $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{29}}, 0\right)$

(গ) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{29}}, 0\right)$ (ঘ) $(\pm\sqrt{29}, 0)$ **খ**

১০৭. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{13}{12}$ হলে উপকেন্দ্র কোনটি? (সহজ)

(ক) $(\pm 12, 0)$ (খ) $(\pm 5, 0)$

(গ) $(\pm 13, 0)$ (ঘ) $(\pm 11, 0)$ **গ**

১০৮. $9x^2 - 7y^2 + 63 = 0$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য — (সহজ)

(ক) $\frac{14}{3}$ (খ) $\frac{12}{7}$

(গ) $\frac{9}{7}$ (ঘ) $\frac{16}{7}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $9x^2 - 7y^2 + 63 = 0$

$\therefore \frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b}$

$= \frac{2 \times (\sqrt{7})^2}{3}$

$= \frac{14}{3}$

১০৯. $x^2 - y^2 = 18$ অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? (মধ্যম)

(ক) 6 (খ) $6\sqrt{2}$

(গ) 12 (ঘ) $12\sqrt{2}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$ অধিবৃত্তের

উৎকেন্দ্রিকতা $= \sqrt{\frac{18 + 18}{18}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 2 \times \sqrt{18} \times \sqrt{2} = 12$

১১০. $3y^2 - x^2 = 9$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ কোনটি? (সহজ)

(ক) $x = \pm\frac{3}{2}$ (খ) $y = \pm\frac{1}{2}$

(গ) $x = \pm 6$ (ঘ) $y = \pm 2\sqrt{3}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $3y^2 - x^2 = 9$

বা, $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{9} = 1$ এর জন্য উৎকেন্দ্রিকতা

$= \sqrt{\frac{3 + 9}{3}} = 2$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y = \pm\sqrt{3}.2$

১১১. $x^2 - y^2 = 0$ এর জ্যামিতিক রূপ কি? (সহজ)

(ক) পরাবৃত্ত (খ) উপবৃত্ত

(গ) অধিবৃত্ত (ঘ) জোড় সরলরেখা **ঘ**

ব্যাখ্যা: $x^2 - y^2 = 0$

বা, $(x + y)(x - y) = 0$

$\therefore$ $x + y = 0$ এবং $x - y = 0$

উভয়ই মূলবিন্দুগামী সরলরেখা।

১১২. $x = 2\tan\theta,\ y = 2\sec\theta$ অধিবৃত্তের সমীকরণ? (মধ্যম)

(ক) $x^2 + y^2 + 4 = 0$ (খ) $x^2 - y^2 + 4 = 0$

(গ) $x^2 - y^2 = 1$ (ঘ) $x^2 + 2x^2 = 0$ **খ**

১১৩. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের —

i. দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = \pm\frac{16}{5}$

ii. অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$

iii. অসীমতট রেখার সমীকরণ, $4y = \pm 3x$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

১১৪. $x^2 - y^2 = 2$ অধিবৃত্তের—

i. শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক $(\pm\sqrt{2}, 0)$

ii. উৎকেন্দ্রিকতা $= \sqrt{2}$

iii. আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{2}$ একক

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii

(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $x^2 - y^2 = 2$

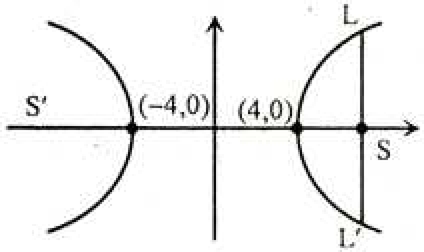
বা, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ অধিবৃত্তের জন্য

উৎকেন্দ্রিকতা $= \sqrt{\frac{2 + 2}{2}} = \sqrt{2}$

শীর্ষবিন্দু $(\pm\sqrt{2}, 0)$

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{2}$

নিচের উপাত্তের ভিত্তিতে (১১৫ ও ১১৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র S ও S′ এবং অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{5}}{2}$

১১৫. শীর্ষদ্বয়ের দূরত্ব কত? (সহজ)

ক) 0 খ) 4
গ) 8 ঘ) 16 **গ**

১১৬. চিত্রের অধিবৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ খ) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$
গ) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ ঘ) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ **ক**

★★ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের বিভিন্ন অংশের চিহ্নিত করণসহ চিত্র এবং প্রয়োজনীয় সূত্র

১১৭. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? (সহজ)

ক) $x=\pm 2$ খ) $x=\pm 4$
গ) $x=\pm 9$ ঘ) $x=\pm 5$ **ক**

ব্যাখ্যা: $a=2; b=3$ ∴ শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(\pm 2, 0)$ ∴ $(\pm 2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x=\pm 2$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ,

উপরের তথ্যের আলোকে (১১৮-১২০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

১১৮. অধিবৃত্তটি (5, 0) এবং $\left(-7, \frac{2}{5}\right)$ বিন্দুগামী হলে, উৎকেন্দ্রিকতার মান কোনটি? (সহজ)

ক) 3.45 খ) 1.003
গ) 3.00 ঘ) 2.35 **খ**

ব্যাখ্যা: (5, 0); বিন্দুগামী বলে $a=5$; $\left(7; \frac{2}{5}\right)$ বিন্দুগামী বলে

$b^2=\frac{1}{6}; e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

$=\sqrt{1+\frac{1}{25\times 6}}$

$=\sqrt{\frac{151}{150}}=1.003$

১১৯. প্রদত্ত অধিবৃত্তে $a=2$ এবং $b=4$ বসালে অসীমতটের সমীকরণ কোনটি? (সহজ)

ক) $y=\pm 4x$ খ) $y=\pm 8x$
গ) $y=\pm 2x$ ঘ) $2y=\pm x$ **গ**

ব্যাখ্যা: অসীমতট $y=\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\pm 2x.$

১২০. প্রদত্ত সমীকরণে $a=3$, $b=2$ হলে উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? (সহজ)

ক) $(0, \pm\sqrt{13})$ খ) $(\pm\sqrt{13}, 0)$
গ) $(\sqrt{13}, 2)$ ঘ) $(\sqrt{13}, 3)$ **খ**

নিচের উপাত্তের ভিত্তিতে (১২১ ও ১২২) নং প্রশ্নের উত্তর দও :

অধিবৃত্তের আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 26 এবং নির্দেশক বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 একক।

১২১. অধিবৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? (কঠিন)

ক) $(12x^2)-(13y)^2=(44)^2$
খ) $(13x)^2-(12y)^2=(156)^2$
গ) $(12x)^2-(13y)^2=156^2$
ঘ) $(13x)^2-(12y)^2=(144)^2$ **গ**

ব্যাখ্যা: $2a=26$ ∴ $a=13$ আবার, $a^2-b^2=5^2$

বা, $b^2=13^2-5^2=144$ ∴ $b=12$

∴ অধিবৃত্ত সমীকরণ, $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{144}=1$

বা, $(12x)^2-(13y)^2=156^2$

১২২. অধিবৃত্তের অসমীতটের সমীকরণ কোনটি? (মধ্যম)

ক) $y=\pm\frac{13}{2}x$ খ) $y=\pm\frac{12}{13}x$
গ) $y=\pm 12x$ ঘ) $y=\pm 13x$ **খ**

নিচের উপাত্তের আলোকে (১২৩ ও ১২৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোনো অধিবৃত্তে আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{5}$ এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 4 অধিবৃত্তের অক্ষরেখা x অক্ষ বরাবর।

১২৩. অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? (মধ্যম)

ক) 3 খ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
গ) $\sqrt{5}$ ঘ) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $2a=2\sqrt{5}$ ∴ $a=\sqrt{5}$; $2b=4$ ∴ $b=2$

∴ উৎকেন্দ্রিকতা $=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{5+4}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

১২৪. অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত? (মধ্যম)

ক) 2 খ) 4
গ) 6 ঘ) 9 **গ**

ব্যাখ্যা: $2ae=2\times\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=6$

অধ্যায়-৭: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

প্রশ্ন ▶ ১ দৃশ্যকল্প-১: $\sec^{-1}\frac{5}{3} + \cot^{-1}\frac{12}{5} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$ [ঢা. বো. ১৭]

দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{3}\sin\theta = 2 + \cos\theta$.

ক. দেখাও যে, $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$. ২

খ. দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এর মান $\frac{\pi}{2}$. ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমাধান কর যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\tan^{-1}x = \theta$ $\therefore \tan\theta = x$

$\therefore \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

বা, $\sin 2\theta = \frac{2x}{1+x^2}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

$\therefore 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ (দেখানো হলো)

খ $\sec^{-1}\frac{5}{3} + \cot^{-1}\frac{12}{5} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$

$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \sec^{-1}\frac{5}{3} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$

$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{16}{63}$ [চিত্র-১ ও ২ হতে]

$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{16}{63}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{16}{63}}$

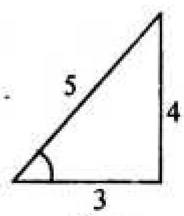
$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{84+16}{63}}{\frac{189-64}{189}}\right)$

$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \tan^{-1}\left(\frac{100}{63}\times\frac{189}{125}\right)$

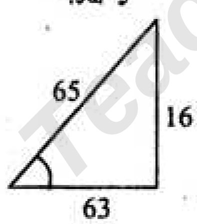
$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \tan^{-1}\frac{12}{5}$

$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \cot^{-1}\frac{5}{12}$

$= \frac{\pi}{2}\left[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$ (দেখানো হলো)



চিত্র-১



চিত্র-২

গ দেওয়া আছে, $\sqrt{3}\sin\theta = 2 + \cos\theta$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{2}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

বা, $\theta - \frac{\pi}{6} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা,

যখন, $n = 0$ তখন, $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

যখন, $n = -1$ তখন, $\theta = \frac{-3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{-4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{-4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$; যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২ $f(x) = \tan x$ [রা. বো. ১৭]

ক. $\cot^{-1}\cos\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}$ এর মুখ্য মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লেখিত $f(x)$ এর জন্য $f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে, প্রাপ্ত সঞ্চারপথটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে যার ঢাল -1 হবে। ৪

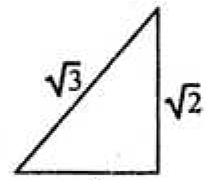
গ. $\{f(x)\}^2 + f'(x) = 3f(x)$ হলে বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর যখন $0 \le x \le 2\pi$. ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\cot^{-1}\cos\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$= \cot^{-1}\cos\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**



খ দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

$\therefore f^{-1}(x) = \tan^{-1}x$ এবং $f^{-1}(y) = \tan^{-1}y$

প্রশ্নমতে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi$

বা, $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} = \pi$

বা, $\frac{x+y}{1-xy} = \tan\pi$

বা, $\frac{x+y}{1-xy} = 0$

বা, $x + y = 0$

$\therefore y = -x$

অতএব, প্রাপ্ত সঞ্চারপথটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে এবং সরলরেখাটির ঢাল -1 **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\{f(x)\}^2 + f'(x) = 3f(x)$

বা, $\tan^2 x + \sec^2 x = 3\tan x$

বা, $\tan^2 x + 1 + \tan^2 x - 3\tan x = 0$

বা, $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$

বা, $2\tan^2 x - 2\tan x - \tan x + 1 = 0$

বা, $2\tan x(\tan x - 1) - 1(\tan x - 1) = 0$

বা, $(2\tan x - 1)(\tan x - 1) = 0$

$\therefore 2\tan x - 1 = 0$ অথবা, $\tan x - 1 = 0$

$\therefore \tan x = \frac{1}{2}$ বা, $\tan x = 1$

$\therefore x = n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ বা, $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

যখন $n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $x = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $x = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} > 2\pi$

নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধানসমূহ,

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $A = \cos\theta, B = \sin\theta, C = \cos2\theta, D = \sin2\theta$. [দি. বো. ১৭]

ক. মান নির্ণয় কর : $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$. ২

খ. $A + \sqrt{3}B = \sqrt{2}$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

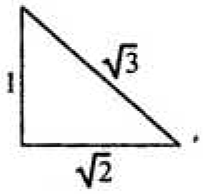
গ. $A + B = C + D$ হলে, সমীকরণটির $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে সমাধান আছে কিনা যাচাই কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$= \tan^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$ **(Ans.)**



খ দেওয়া আছে, $A = \cos\theta, B = \sin\theta$

এখন, $A + \sqrt{3}B = \sqrt{2}$ বা, $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$

উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ অর্থাৎ 2 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\frac{\pi}{3}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{3}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

বা, $\theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}$ যখন $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \cos\theta, B = \sin\theta, C = \cos2\theta, D = \sin2\theta$

$\therefore$ $A + B = C + D$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = \cos2\theta + \sin2\theta$

বা, $\cos\theta - \cos2\theta - (\sin2\theta - \sin\theta) = 0$

বা, $2\sin\frac{3\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{3\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2} = 0$

বা, $2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right) = 0$

$\therefore$ $\sin\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} = 0$ অথবা, $2\sin\frac{\theta}{2} = 0$

বা, $\sin\frac{3\theta}{2} = \cos\frac{3\theta}{2}$ বা, $\sin\frac{\theta}{2} = 0$

বা, $\tan\frac{3\theta}{2} = 1$ বা, $\frac{\theta}{2} = n\pi$

বা, $\tan\frac{3\theta}{2} = \tan\frac{\pi}{4}$ বা, $\theta = 2n\pi$

বা, $\frac{3\theta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{6}, 0$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{6}, 2\pi$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{2}, 4\pi$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধান বিদ্যমান এবং $\theta = 0, \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, \sin\theta = \frac{4}{5}$. [কু. বো. ১৭]

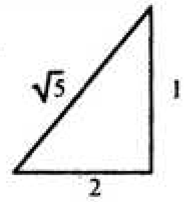
ক. $\text{cosec}^{-1}\sqrt{5} + \sec^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

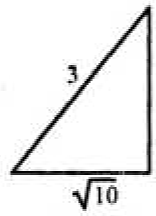
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,
$\sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\theta - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}2$. ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে সমাধান কর: $\sqrt{3}\,g(x) + f(x) = \sqrt{3}$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\text{cosec}^{-1}\sqrt{5} + \sec^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$



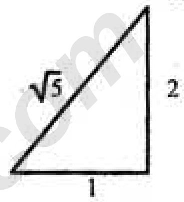


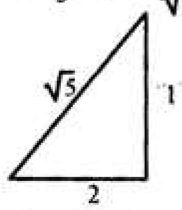
এখানে, $\sec^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$ কে পর্যালোচনা করে দেখা যায় ভূমি $\sqrt{10}$ ও অতিভুজ 3। কিন্তু ভূমি কখনো অতিভুজের চেয়ে বড় হতে পারে না। তাই প্রদত্ত রাশির মান নির্ণয়যোগ্য নয়।

খ দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ $\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{4}{5}$

বামপক্ষ $= \sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\theta - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= \sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$





$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$ [চিত্র হতে]

$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$

$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{\frac{5}{4}}$

$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}$

$= \tan^{-1}2 =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$
$g(x) = \cos x$

প্রদত্ত রাশি,

$\sqrt{3}\,g(x) + f(x) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \sin x.\sin\frac{\pi}{6} + \cos x\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$

$\therefore x = 2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{3}$, যখন, $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $f(x) = \cot^{-1} y - \tan^{-1} x$ .... (i) [চ. বো. ১৭]

$\cos\theta - \cos 9\theta = \sin 5\theta$ .... (ii)

ক. $\sin\frac{x}{3}$ এর পর্যায়কাল কত? ২

খ. $f(x) = \frac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x + y + \sqrt{3}xy = \sqrt{3}$ ৪

গ. উদ্দীপক-২ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin x$ এর পর্যায়কাল 2π

এখন $\sin\frac{x}{3}$ এর পর্যায়কাল $= \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ **(Ans.)**

খ $f(x) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \cot^{-1}y - \tan^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

বা, $\tan^{-1}\frac{1}{y} - \tan^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

বা, $\tan^{-1}\frac{\frac{1}{y} - x}{1 + \frac{1}{y}.x} = \frac{\pi}{6}$

বা, $\frac{\frac{1 - xy}{y}}{\frac{y + x}{y}} = \tan\frac{\pi}{6}$

বা, $\frac{1 - xy}{x + y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $x + y = \sqrt{3} - \sqrt{3}xy$

$\therefore x + y + \sqrt{3}xy = \sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

গ $\cos\theta - \cos9\theta = \sin5\theta$

বা, $2\sin5\theta\sin4\theta = \sin5\theta$

বা, $\sin5\theta(2\sin4\theta - 1) = 0$

$\therefore \sin5\theta = 0$ অথবা, $2\sin4\theta - 1 = 0$

বা, $5\theta = n\pi$ বা, $2\sin4\theta = 1$

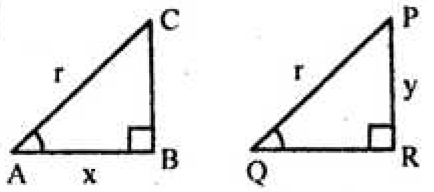
$\therefore \theta = \frac{n\pi}{5}$ বা, $\sin4\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

বা, $4\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{24}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{24}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণসংখ্যা। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ [সি. বো. ১৭]



ক. দেখাও যে, $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ২

খ. উদ্দীপকে $A + P = \varphi$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 - 2xy\cos\varphi + y^2 = r^2\sin^2\varphi$ ৪

গ. $f(\theta) = \frac{r}{x}$ হলে $-\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $f(2\theta) - f(\theta) = 2$ সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$

$= \cos\cos^{-1}\frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ $[\because 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1 - x^2}{1 + x^2}]$

$= \frac{\frac{x^2 - y^2}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} =$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

খ উদ্দীপকের চিত্র হতে, $\cos A = \frac{x}{r}$

$\therefore A = \cos^{-1}\frac{x}{r}$

$\cos P = \frac{y}{r}$

$\therefore P = \cos^{-1}\frac{y}{r}$

প্রশ্নমতে, $\cos^{-1}\frac{x}{r} + \cos^{-1}\frac{y}{r} = \phi$

বা, $\cos^{-1}\left\{\frac{xy}{r^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)}\right\} = \phi$

বা, $\frac{xy}{r^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)} = \cos\phi$

বা, $\left(\frac{xy}{r^2} - \cos\phi\right)^2 = \left(\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)}\right)^2$

বা, $\frac{x^2y^2}{r^4} - 2.\frac{xy}{r^2}\cos\phi + \cos^2\phi = \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)$

বা, $\frac{x^2y^2}{r^4} - 2.\frac{xy}{r^2}\cos\phi + \cos^2\phi = 1 - \frac{y^2}{r^2} - \frac{x^2}{r^2} + \frac{x^2y^2}{r^4}$

বা, $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 2\frac{xy}{r^2}\cos\phi = 1 - \cos^2\phi$

বা, $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 2.\frac{xy}{r^2}\cos\phi = \sin^2\phi$

$\therefore x^2 + y^2 - 2xy\cos\phi = r^2\sin^2\phi$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $f(\theta) = \frac{r}{x} = \sec\theta$

$\therefore f(2\theta) = \sec2\theta$

প্রশ্নমতে, $f(2\theta) - f(\theta) = 2$

বা, $\sec2\theta - \sec\theta = 2$

বা, $\frac{1}{\cos2\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = 2$

বা, $\frac{\cos\theta - \cos2\theta}{\cos2\theta.\cos\theta} = 2$

বা, $\cos\theta - \cos2\theta = 2\cos2\theta.\cos\theta$

বা, $\cos\theta - \cos2\theta = \cos\theta + \cos(2\theta + \theta)$

বা, $\cos3\theta + \cos2\theta = 0$

বা, $2\cos\frac{3\theta + 2\theta}{2}\cos\frac{3\theta - 2\theta}{2} = 0$

বা, $\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0$

এখন, $\cos\frac{5\theta}{2} = 0$ আবার, $\cos\frac{\theta}{2} = 0$

বা, $\frac{5\theta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ বা, $\frac{\theta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{1}{5}(2n\pi + \pi)$ $\therefore \theta = 2n\pi + \pi$

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{5}, \pi$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{5}, 3\pi$

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{\pi}{5}, -\pi$

$n = -2$ হলে, $\theta = -\frac{3\pi}{5}, -3\pi$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$\theta = \frac{\pi}{5}, \pi, -\frac{\pi}{5}, -\frac{3\pi}{5}, -\pi, \frac{3\pi}{5}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ দৃশ্যকল্প-১ : $\cot\theta - \tan\theta = \frac{6}{5}$ *[ঢা. বো. ১৭]*

দৃশ্যকল্প-২ : $2\sin 2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$

ক. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x) = 2x$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $\tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x)$

$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

$= \frac{\pi}{2} - 3x - \frac{\pi}{2} + 5x = 2x$

$\therefore \tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x) = 2x$ **(প্রমাণিত)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

$\cot\theta - \tan\theta = \frac{6}{5}$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{6}{5}$

বা, $\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{6}{5}$

বা, $5(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 6\sin\theta\cos\theta$

বা, $5\cos 2\theta = 3\sin 2\theta$ বা, $\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{5}{3}$

বা, $\tan 2\theta = \frac{5}{3}$ বা, $\sin 2\theta = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ **(প্রমাণিত)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,

$2\sin 2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$

বা, $2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(2\cos\theta + 1) + 1(2\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(2\sin\theta + 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

হয় $2\sin\theta + 1 = 0$ অথবা $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\sin\theta = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$ বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}$ $\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $g(x) = p\sin^{-1}x$; $h(x) = \cos x$. *[ঢা. বো. ১৭]*

ক. প্রমাণ কর যে, $\sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \cot^{-1}\frac{3}{4}$ ২

খ. $g(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর, যখন $p = \frac{1}{2}, -1 \le x \le 1$. ৪

গ. $2\{h(x)\}^2 + \{h(2x)\}^2 = 2$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক L.H.S. $= \sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= 2\tan^{-1}\frac{1}{2}$

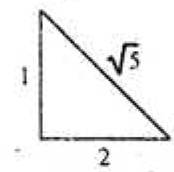
$= \tan^{-1}\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{\frac{3}{4}}$

$= \cot^{-1}\frac{3}{4}$

= R.H.S. **(প্রমাণিত)**



$\therefore \sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

খ দেওয়া আছে, $p = \frac{1}{2}$

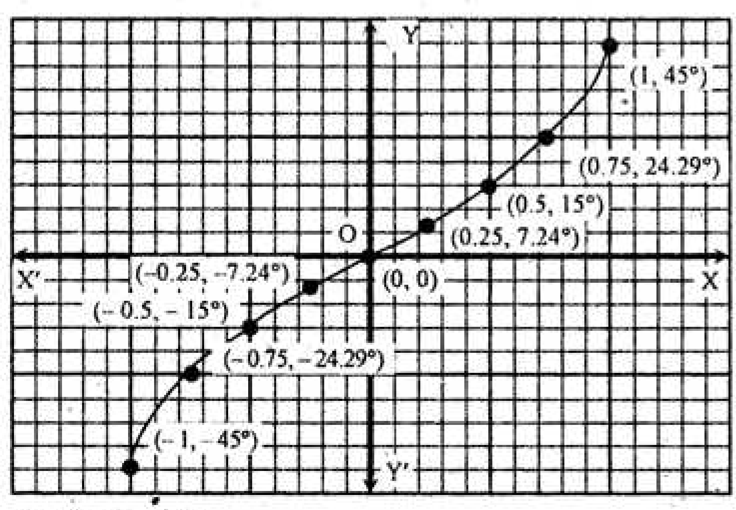
এবং $g(x) = p\sin^{-1}x = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ যেখানে $-1 \le x \le 1$

ধরি, $y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$.

x এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রতিসঙ্গী y এর মানগুলো নির্ণয় করি।

x	−1	−0.75	−0.5	−0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$	−45°	−24.29°	−15°	−7.24°	0°	7.24°	15°	24.29°	45°

ছক কাগজের x অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর 1 ক্ষুদ্রতম ঘর = 5° একক ধরে প্রাপ্ত x ও y এর মানগুলি বসিয়ে $y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।



গ দেওয়া আছে, $h(x) = \cos x$

$\therefore h(2x) = \cos 2x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $2\{h(x)\}^2 + \{h(2x)\}^2 = 2$

বা, $2\cos^2 x + \cos^2 2x = 2$

বা, $1 + \cos 2x + \cos^2 2x - 2 = 0$

বা, $\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$

বা, $\cos 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

কিন্তু, $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কেননা তা -1 অপেক্ষা ছোট মান এবং $\cos\theta$ এর সীমা -1 হতে 1 পর্যন্ত।

$\therefore \cos 2x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

বা, $\cos 2x = \cos\alpha$

ধরি, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

বা, $2x = 2n\pi \pm \alpha$.

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\alpha}{2}$ যেখানে $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

এবং $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \cos^{-1} x$ *[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]*

ক. সমাধান কর : $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$ — ২

খ. সমাধান কর : $4f(x).f(2x).f(3x) = 1, 0 < x < \pi$ — ৪

গ. যদি $g\left(\frac{x}{a}\right) + g\left(\frac{y}{b}\right) = \theta$ হয়, তবে দেখাও যে,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$ — ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

বা, $x - \frac{\pi}{6} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (4n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$\therefore f(2x) = \cos 2x$

এবং $f(3x) = \cos 3x$

$\therefore 4f(x).f(2x).f(3x) = 1$

বা, $4\cos x \cos 2x \cos 3x = 1$

বা, $(2\cos 3x \cos x)(2\cos 2x) = 1$

বা, $(\cos 4x + \cos 2x)(2\cos 2x) = 1$

বা, $2\cos 4x \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$

বা, $2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0$

বা, $\cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos 4x = 0$

বা, $4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $2\cos 2x + 1 = 0$

বা, $2\cos 2x = -1$

বা, $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

বা, $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

যখন, n এর মান শূন্য বা যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন $n = 0$, তখন, $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$

যখন $n = 1$, তখন, $x = \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

যখন $n = 2$, তখন, $x = \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

যখন, $n = 3$, তখন, $x = \frac{7\pi}{8}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর মানসমূহ: $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \cos^{-1} x$

$\therefore g\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\frac{x}{a}$

এবং $g\left(\frac{y}{b}\right) = \cos^{-1}\frac{y}{b}$

$\therefore g\left(\frac{x}{a}\right) + g\left(\frac{y}{b}\right) = \theta$

বা, $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \theta$

বা, $\cos^{-1}\left\{\frac{x}{a}.\frac{y}{b} - \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right\} = \theta$

বা, $\frac{xy}{ab} - \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = \cos\theta$

বা, $\frac{xy}{ab} - \cos\theta = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$

বা, $\frac{x^2y^2}{a^2b^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} + \cos^2\theta = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$

বা, $\frac{x^2y^2}{a^2b^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} + \cos^2\theta = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$

বা, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১০ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^{-1}x$, $g(x) = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ এবং $h(x) = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. দেখাও যে, $f(x) = g(x)$ । — ২

খ. প্রমাণ কর যে, $f(x).g(x).h(x) = \{f(x)\}^3$ — ৪

গ. $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 + \{h(x)\}^2 = \frac{3}{16}\pi^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ — ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

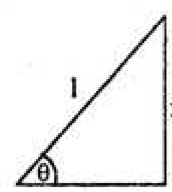
ক দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^{-1}x$

$= \cos^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$ [চিত্র-১ হতে]

$= \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$= g(x)$ $[\because g(x) = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}]$

$\therefore f(x) = g(x)$ **(দেখানো হলো)**



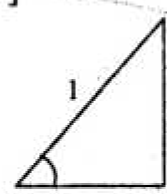
চিত্র-১

খ বামপক্ষ $= f(x).g(x).h(x)$

$= \sin^{-1}x.\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}.\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \sin^{-1}x.\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}.\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ [চিত্র-১ হতে]

$= \sin^{-1}x.(\cos^{-1}\sqrt{1-x^2})^2$



চিত্র-১

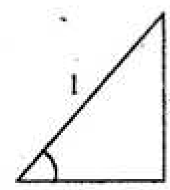
$= \sin^{-1}x.(\sin^{-1}x)^2$ [চিত্র-২ হতে]

$= (\sin^{-1}x)^3$

$= \{f(x)\}^3$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**



চিত্র-২

গ দেওয়া আছে, $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 + \{h(x)\}^2 = \frac{3}{16}\pi^2$

বা, $(\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}\sqrt{1-x^2})^2 + \left(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 = \frac{3}{16}\pi^2$

বা, $(\sin^{-1}x)^2 + (\sin^{-1}x)^2 + (\sin^{-1}x)^2 = \frac{3}{16}\pi^2$ ['খ' হতে পাই]

বা, $3(\sin^{-1}x)^2 = \frac{3}{16}\pi^2$

বা, $(\sin^{-1}x)^2 = \frac{\pi^2}{16}$

বা, $\sin^{-1}x = \pm\frac{\pi}{4}$

বা, $x = \pm \sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ১১ $f(x) = \text{cosec}x,\ g(x) = \tan x$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. যদি $x = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$ হয় তাহলে, প্রমাণ কর যে, $\tan x = \frac{1}{2}$. ২

খ. $2\tan^{-1}\{f(x)\} = \cot^{-1}\left(\frac{\cos x}{2}\right)$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে,

$\tan^{-1}\{f(\cos^{-1}x)\} - \tan^{-1}\{g(\sin^{-1}x)\} = \tan^{-1}\frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{1+x-x^2}$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$

বা, $2x = \cos^{-1}\frac{3}{5}$

বা, $\cos 2x = \frac{3}{5}$

এখন, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \frac{2\sin x \cdot \cos x}{2\cos^2 x}$

$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1}$

$= \frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}}{\cos 2x + 1}$

$= \frac{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{\frac{3}{5}+1}$

$= \frac{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{8}{5}} = \frac{4}{5}\times\frac{5}{8} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\tan x = \frac{1}{2}$ (প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \text{cosec}x$

এখন, $2\tan^{-1}\{f(x)\} = \cot^{-1}\left(\frac{\cos x}{2}\right)$

বা, $2\tan^{-1}(\text{cosec}x) = \cot^{-1}\left(\frac{\cos x}{2}\right)$

বা, $\tan^{-1}\left(\frac{2\,\text{cosec}x}{1-\text{cosec}^2x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\cos x}\right)$

বা, $\frac{2\,\text{cosec}x}{1-\text{cosec}^2x} = \frac{2}{\cos x}$

বা, $2\cos x.\ \text{cosec}x = 2 - 2\,\text{cosec}^2x$

বা, $\cot x = 1 - \text{cosec}^2x$

বা, $\cot x = -\cot^2x$

বা, $\cot^2x + \cot x = 0$

বা, $\cot x(\cot x + 1) = 0$

$\therefore$ $\cot x = 0$ অথবা, $\cot x + 1 = 0$

বা, $\tan x = 0$ বা, $\cot x = -1$

বা, $\tan x = -1$

$\therefore$ $x = (2n+1).\frac{\pi}{2}$ বা, $\tan x = \tan\alpha$

; $n \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ $x = n\pi + \alpha;\ \alpha = \tan^{-1}(-1)$ এবং $n \in \mathbb{Z}$

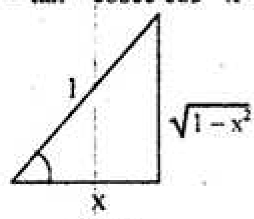
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\pi + \alpha;\ \alpha = \tan^{-1}(-1)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \text{cosec}x$

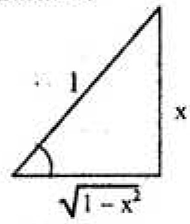
$g(x) = \tan x$

এখন $\tan^{-1}\{f(\cos^{-1}x)\} - \tan^{-1}\{g(\sin^{-1}x)\}$

$= \tan^{-1}\text{cosec}\cos^{-1}x - \tan^{-1}\tan\sin^{-1}x$



চিত্র-১



চিত্র-২

বামপক্ষ $= \tan^{-1}\text{cosec}\cos^{-1}x - \tan^{-1}\tan\sin^{-1}x$

$= \tan^{-1}\text{cosec}\,\text{cosec}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \tan^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

[চিত্র ব্যবহার করে]

$= \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)}}{\frac{(1-x^2)+x}{(1-x^2)}}$

$= \tan^{-1}\frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{1+x-x^2}$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ১২ $f(x) = \cos^{-1}x$

[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

ক. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ । ২

খ. $f(x) + f(y) + f(z) = \pi$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ ৪

গ. $f(x) = \theta$ হলে $4(1 - x^2 + x) = 5$ এর সমাধান নির্ণয় কর;
যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$. ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$f(x) = \cos^{-1}x$

$\therefore f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

বামপক্ষ $= \tan^{-1}\sqrt{x}$

$= \frac{1}{2}(2\tan^{-1}\sqrt{x})$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

$= \frac{1}{2}f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$\therefore$ $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ (প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos^{-1}x$

এবং $f(x) + f(y) + f(z) = \pi$

$\therefore \quad \cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$

বা, $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \pi - \cos^{-1}z$

বা, $\cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) = \pi - \cos^{-1}z$

বা, $xy - \sqrt{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2} = \cos(\pi - \cos^{-1}z)$

বা, $xy - \sqrt{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2} = -\cos\cos^{-1}z = -z$

বা, $xy + z = \sqrt{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2}$

বা, $x^2y^2 + 2xyz + z^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$ [বর্গ করে]

$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos^{-1}x$

এখন, $f(x) = \theta$ হলে

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}x$

বা, $\cos\theta = x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $4(1 - x^2 + x) = 5$

বা, $4(1 - \cos^2\theta + \cos\theta) = 5$

বা, $4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta = 5$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

সুতরাং $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$

$n = 0$ হলে $\theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে $\theta = \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে $\theta = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ দৃশ্যকল্প-১: $\cos^{-1}\frac{y}{a} + \cos^{-1}\frac{z}{b} = \theta$

দৃশ্যকল্প-২: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

ক. প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে,
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{2yz\cos\theta}{ab} + \frac{z^2}{b^2} = \sin^2\theta$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{3} \times \frac{9}{8}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}\right)$

$= \tan^{-1}(1)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4}$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(গ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৮

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

বা, $\sin 3x + \sin x + \sin 2x = 1 + \cos 2x + \cos x$

বা, $2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x$

বা, $\sin 2x\,(2\cos x + 1) - \cos x\,(2\cos x + 1) = 0$

বা, $(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$

হয়, $\sin 2x - \cos x = 0$

বা, $\sin 2x - \cos x = 0$

বা, $2\sin x\cos x - \cos x = 0$

বা, $\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos x = 0$

$\therefore \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $2\sin x = 1$

বা, $\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ অথবা, $2\cos x + 1 = 0$

বা, $2\cos x = -1$

বা, $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \quad x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ দৃশ্যকল্প-১: $\sin^{-1}\frac{2a}{1 + a^2} - \cos^{-1}\frac{1 - b^2}{1 + b^2} = 2\tan^{-1}x$

দৃশ্যকল্প-২: $2\sin\theta\sin 3\theta = 1, 0 \le \theta \le \pi$ *[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]*

ক. দেখাও যে, $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে প্রমাণ কর যে, $x = \frac{a - b}{1 + ab}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে, সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় এবং প্রদত্ত সীমার মধ্যে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

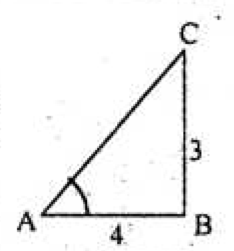
ক $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= \cot\cos^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{3}{5}$

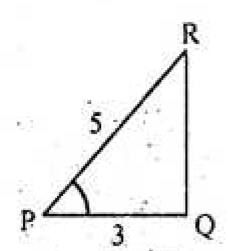
$= \cot\cos^{-1}\frac{3}{5}$

$= \cot\cot^{-1}\frac{3}{4}$

$= \frac{3}{4}$ **(দেখানো হলো)**



$AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$



$RQ = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

খ দেওয়া আছে, $\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2} = 2\tan^{-1}x$

বা, $2\tan^{-1}a - 2\tan^{-1}b = 2\tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}a - \tan^{-1}b = \tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab} = \tan^{-1}x$

বা, $\dfrac{a-b}{1+ab} = x$

$\therefore x = \dfrac{a-b}{1+ab}$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $2\sin\theta.\sin3\theta = 1, 0 \le \theta \le \pi$

$\Rightarrow \cos2\theta - \cos4\theta = 1$

$\Rightarrow \cos2\theta - (1+\cos4\theta) = 0 \Rightarrow \cos2\theta - 2\cos^2 2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos2\theta\,(1 - 2\cos2\theta) = 0$

হয়, $\cos2\theta = 0$ অথবা, $1 - 2\cos2\theta = 0$

$\therefore 2\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \cos2\theta = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$ $\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ $\therefore \theta = n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$

সুতরাং $\theta = n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}, (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\theta = \pm\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}$; $n = 1$ হলে, $\theta = \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{4}$; $n = 3$ হলে, $\theta = \dfrac{17\pi}{6}, \dfrac{19\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{4}$

প্রদত্ত সীমার মধ্যে মান সমূহ :

$\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ $f(x) = \cos x$, যেখানে $x \in \mathbb{R}$. [রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. পরম মানের সাহায্যে প্রকাশ কর : $-2 < 3 - x < 8$ ২

খ. $f^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + f^{-1}\left(\dfrac{y}{b}\right) = \theta$ হলে দেখাও যে,

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2xy}{ab}.f(\theta) + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \{f(\theta)\}^2$ ৪

গ. সমাধান কর : $4f(\theta).f(2\theta).f(3\theta) = 1$, যেখানে $0 \le \theta \le \pi$. ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $-\dfrac{-2+8}{2} = -3$

$\therefore -2 < 3 - x < 8$

বা, $-2 - 3 < 3 - x - 3 < 8 - 3$ [প্রত্যেক পক্ষে (–3) যোগ করে]

বা, $-5 < -x < 5$

বা, $5 > x > -5$

বা, $-5 < x < 5$

$\therefore |x| < 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = \cos x$

বা, $f\{f^{-1}(x)\} = \cos\{f^{-1}(x)\}$

বা, $x = \cos\{f^{-1}(x)\}$

$\therefore f^{-1}(x) = \cos^{-1}x$

এবং $f^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + f^{-1}\left(\dfrac{y}{b}\right) = \theta$

বা, $\cos^{-1}\dfrac{x}{a} + \cos^{-1}\dfrac{y}{b} = \theta$

বা, $\cos^{-1}\left\{\dfrac{x}{a}.\dfrac{y}{b} - \sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{b}\right)^2}\right\} = \theta$

বা, $\dfrac{xy}{ab} - \sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{b}\right)^2} = \cos\theta$

বা, $\dfrac{xy}{ab} - \cos\theta = \sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{b}\right)^2}$

উভয়পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই,

$\dfrac{x^2y^2}{a^2b^2} - 2\dfrac{xy}{ab}\cos\theta + \cos^2\theta = \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$

বা, $\dfrac{x^2y^2}{a^2b^2} - 2\dfrac{xy}{ab}\cos\theta = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2y^2}{a^2b^2} - \cos^2\theta$

বা, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2xy\cos\theta}{ab} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2xy}{ab}f(\theta) + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \{f(\theta)\}^2$ (দেখানো হলো)

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৮

প্রশ্ন ▶ ১৬ $f(x) = \sin x$; ABC ত্রিভুজে $\cot^{-1}\dfrac{1}{2} = B, \cot^{-1}\dfrac{1}{3} = C$

[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]

ক. প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}\sin^{-1}\tan\sec^{-1}\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. ২

খ. $2 + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}f(x); -2\pi < x < 2\pi$ সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

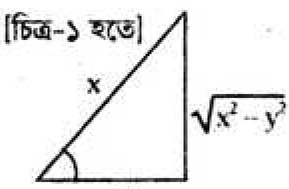
গ. $\angle A$ নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \text{cosec}\sin^{-1}\tan\sec^{-1}\dfrac{x}{y}$

$= \text{cosec}\sin^{-1}\tan\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$ [চিত্র-১ হতে]

$= \text{cosec}\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$



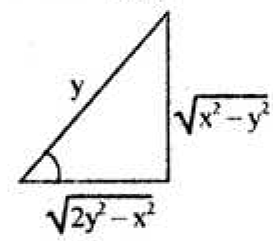
চিত্র-১

$= \text{cosec}\,\text{cosec}^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$ [চিত্র-২ হতে]

$= \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \text{cosec}\sin^{-1}\tan\sec^{-1}\dfrac{x}{y}$

$= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (প্রমাণিত)



চিত্র-২

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore 2 + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}f(x)$

বা, $2 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}\sin x$

বা, $2 + \cos x = \sqrt{3}\sin x$

বা, $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$

বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x = 1$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin x\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos x\sin\dfrac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$

বা, $x - \dfrac{\pi}{6} = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore x = (4n+1)\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}$, যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, $n = 0$, তখন $x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$

যখন, $n = -1$, তখন $x = -\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{-4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = \cot^{-1}\frac{1}{2}$; $C = \cot^{-1}\frac{1}{3}$

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180° বা π

$\therefore \quad A + B + C = \pi$

বা, $B + C = \pi - A$

বা, $\cot^{-1}\frac{1}{2} + \cot^{-1}\frac{1}{3} = \pi - A$

বা, $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = \pi - A$

বা, $\tan^{-1}\frac{2+3}{1-2.3} = \pi - A$

বা, $\tan^{-1}\frac{5}{1-6} = \pi - A$

বা, $\tan^{-1}\frac{5}{-5} = \pi - A$

বা, $\tan^{-1}(-1) = \pi - A$

বা, $-1 = \tan(\pi - A)$

বা, $-1 = -\tan A$

বা, $\tan A = 1$

বা, $\tan A = \tan\frac{\pi}{4}$

বা, $A = \frac{\pi}{4}$ $[\because A = \angle A]$

$\therefore \angle A = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $f(x) = \tan x$, $g(x) = \sin^{-1}x$

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. প্রমাণ কর যে, $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $4g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 4g\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \pi$ ৪

গ. সমাধান কর : $f(\theta) + f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\sqrt{1 + \{f(\theta)\}^2}$ যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$. ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $x = \sin\theta$

বামপক্ষ $= 3\sin^{-1}x = 3\sin^{-1}\sin\theta$

$= 3\theta$

ডানপক্ষ $= \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

$= \sin^{-1}\{3\sin\theta - 4\sin^3\theta\}$

$= \sin^{-1}(\sin 3\theta)$

$= 3\theta$

$3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \sin^{-1}x$

বামপক্ষ $= 4g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 4g\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$= 4\left[\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}\right]$

$= 4\sin^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}\right]$

$= 4\sin^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{9}{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{4}{5}}\right]$

$= 4\sin^{-1}\left[\frac{3}{\sqrt{50}} + \frac{2}{\sqrt{50}}\right]$

$= 4\sin^{-1}\left[\frac{3+2}{\sqrt{25 \times 2}}\right]$

$= 4\sin^{-1}\left[\frac{5}{5\sqrt{2}}\right]$

$= 4 \times \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi =$ ডানপক্ষ

$\therefore 4g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 4g\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \pi$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(\theta) + f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\sqrt{1 + \{f(\theta)\}^2}$

বা, $\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\sqrt{1 + \tan^2\theta}$

বা, $\tan\theta + \cot\theta = 2\sqrt{\sec^2\theta}$

বা, $\tan\theta + \cot\theta = 2\sec\theta$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

বা, $\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{2}{\cos\theta} = 0$

বা, $\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} - 2\right) = 0$

কিন্তু $\frac{1}{\cos\theta} \neq 0$

অথবা, $\frac{1}{\sin\theta} - 2 = 0$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in Z$

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{7\pi}{6}$

$n = -2$ হলে, $\theta = -\frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধান : $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ দৃশ্যকল্প-১: $p = \cos^{-1}\sin 2\tan^{-1}\cot\,\mathrm{cosec}^{-1}\sqrt{1 + x^2 - y^2}$

দৃশ্যকল্প-২: $3\cos 2\theta - \cos 4\theta = 0$.

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1}x = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$. ২

খ. $p = 0$ হলে, দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $x^2 - y^2 = 1$. ৪

গ. $0° < \theta < 360°$ ব্যবধিতে দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\cos^{-1}x = \theta$, তাহলে $\cos\theta = x$

বা, $1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = x$ বা, $2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - x$

বা, $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-x}{2}$ বা, $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$

বা, $\frac{\theta}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ বা, $\theta = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$

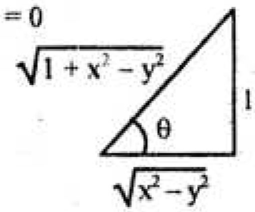
$\therefore \quad \cos^{-1}x = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ **(প্রমাণিত)**

খ $p = 0$ হলে দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

$\cos^{-1}\sin(2\tan^{-1}\cot\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{1+x^2-y^2}) = 0$

বা, $\cos^{-1}\sin(2\tan^{-1}\cot\cot^{-1}\sqrt{x^2-y^2}) = 0$

বা, $\cos^{-1}\sin(2\tan^{-1}\sqrt{x^2-y^2}) = 0$



বা, $\cos^{-1}\sin.\sin^{-1}\frac{2\sqrt{x^2-y^2}}{1+x^2-y^2} = 0$

বা, $\cos^{-1}\frac{2\sqrt{x^2-y^2}}{1+x^2-y^2} = 0$

বা, $\frac{2\sqrt{x^2-y^2}}{1+x^2-y^2} = \cos 0 = 1$

বা, $(x^2-y^2) - 2\sqrt{x^2-y^2} + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{x^2-y^2} - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{x^2-y^2} - 1 = 0$

$\therefore$ $x^2 - y^2 = 1$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $3\cos 2\theta - \cos 4\theta = 0$

বা, $3\cos 2\theta - (2\cos^2 2\theta - 1) = 0$

বা, $2\cos^2 2\theta - 3\cos 2\theta - 1 = 0$

বা, $\cos 2\theta = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{4}$

কিন্তু $\cos 2\theta \neq \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ $[\because -1 \leq \cos x \leq 1]$

$\therefore$ $\cos 2\theta = \frac{3-\sqrt{17}}{4} = \cos(106.3°)$

বা, $2\theta = 2n \times 180° \pm 106.3°$

বা, $\theta = n \times 180° \pm 53.15°$

$n = 0$ হলে, $\theta = -53.15°, 53.15°$

$n = 1$ হলে, $\theta = 233.15°, 126.85°$

$n = 2$ হলে, $\theta = 413.15°, 306.85°$

$\therefore$ $0 < \theta < 360°$ ব্যবধিতে, $\theta = 53.15°, 126.85°, 233.15°, 306.85°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৯ $R(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং $f(a) = \tan^{-1}a^2$ একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।

[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]

ক. প্রমাণ কর যে, $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x - x = 0$. ২

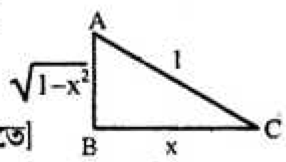
খ. দেখাও যে, $\tan\{2f(a)\} = 2\tan\{f(a) + f(a^3)\}$. ৪

গ. $R(x) - 1 = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান -2π থেকে 2π এর মধ্যে নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x - x$

$= \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - x$ [চিত্র-1 হতে]



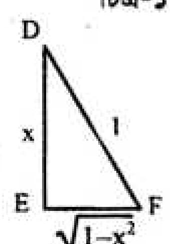
চিত্র-১

$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - x$

$= \sin\sin^{-1}x - x$ [চিত্র-2 হতে]

$= x - x$

$= 0$



চিত্র-২

সুতরাং $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x - x = 0$ (প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $f(a) = \tan^{-1}a^2$

$\therefore f(a^3) = \tan^{-1}a^6$

বামপক্ষ $= \tan\{2f(a)\}$

$= \tan\{2\tan^{-1}a^2\}$

$= \tan\tan^{-1}\frac{2a^2}{1-(a^2)^2}$

$= \frac{2a^2}{1-a^4}$

ডানপক্ষ $= 2\tan\{f(a) + f(a^3)\}$

$= 2\tan(\tan^{-1}a^2 + \tan^{-1}a^6)$

$= 2\tan\tan^{-1}\frac{a^2+a^6}{1-a^2.a^6}$

$= 2\frac{a^2(1+a^4)}{1-a^8}$

$= 2\frac{a^2(1+a^4)}{(1-a^4)(1+a^4)}$

$= \frac{2a^2}{1-a^4}$

$\therefore$ $\tan\{2f(a)\} = 2\tan\{f(a) + f(a^3)\}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $R(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

আবার, $R(x) - 1 = 0$

বা, $\sqrt{3}\cos x + \sin x - 1 = 0$

বা, $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা

যখন, $n = 0$ তখন,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}$

যখন, $n = 1$ তখন, $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= 2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

যখন, $n = -1$ তখন, $x = -2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= -2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, -2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= -\frac{3\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২০ $f(x) = \cos^{-1}x$ এবং $g(x) = 4\cos x\cos 2x\cos 3x$

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. দেখাও যে, $f(x) = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ ২

খ. $f\left(\frac{x}{a}\right) + f\left(\frac{y}{b}\right) = \theta$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\theta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$ ৪

গ. $g(x) = 1$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর যেখানে $0 < x < \pi$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $f(x) = \cos^{-1}x = \theta$ বা, $\cos\theta = x$

এখন, ডানপক্ষ $= 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$

$= 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$= 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2}}$

$= 2\sin^{-1}\sin\frac{\theta}{2}$

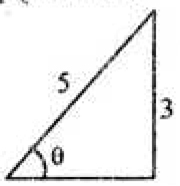
$= \theta = \cos^{-1}x = f(x) =$ বামপক্ষ

$\therefore f(x) = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(গ) নং দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(খ) নং দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ২১ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:
$f(x) = \cos x$

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]

ক. মান নির্ণয় কর : $\cos \tan^{-1} \cot \sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$ । ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\theta - \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}2$ । ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $f(\alpha) - f(9\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right)$ সমীকরণটি সমাধান কর যখন $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ । ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

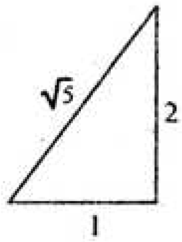
ক $\cos \tan^{-1} \cot \sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$

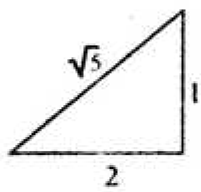
$= \cos \tan^{-1} \cot \cot^{-1} \frac{1}{2}$

$= \cos \tan^{-1} \frac{1}{2}$

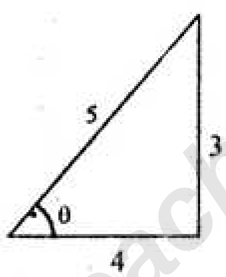
$= \cos \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**





খ পার্শ্বের চিত্র থেকে পাই, $\cos\theta = \frac{4}{5}$



বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

বা, $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

ধরি, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \alpha$

বা, $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 2\alpha$

বা, $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$

বা, $\frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{4}{5}$

বা, $4 + 4\tan^2\alpha = 5 - 5\tan^2\alpha$

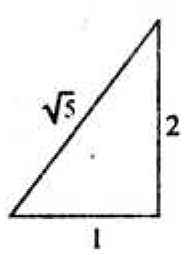
বা, $9\tan^2\alpha = 1$

বা, $\tan^2\alpha = \frac{1}{9}$

বা, $\tan\alpha = \frac{1}{3}$

$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

এখন, $\sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\theta - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$



$= \sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \sec^{-1}\sqrt{5} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \sec^{-1}\sqrt{5}$

$= \tan^{-1}2$

$\therefore \sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\theta - \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}2$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$\therefore f(\alpha) = \cos\alpha$

$f(9\alpha) = \cos 9\alpha$

$f\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) = \sin 5\alpha$

$\therefore f(\alpha) - f(9\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right)$

বা, $\cos\alpha - \cos 9\alpha = \sin 5\alpha$

বা, $2\sin\frac{\alpha + 9\alpha}{2}\sin\frac{9\alpha - \alpha}{2} = \sin 5\alpha$

বা, $2\sin\frac{10\alpha}{2}\sin\frac{8\alpha}{2} - \sin 5\alpha = 0$

বা, $2\sin 5\alpha \sin 4\alpha - \sin 5\alpha = 0$

বা, $\sin 5\alpha (2\sin 4\alpha - 1) = 0$

$\therefore \sin 5\alpha = 0$ বা, $2\sin 4\alpha - 1 = 0$

বা, $5\alpha = n\pi$ বা, $2\sin 4\alpha = 1$

$\therefore \alpha = \frac{n\pi}{5}; n \in \mathbb{Z}$ বা, $\sin 4\alpha = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$n = 0$ হলে, $\alpha = 0$ বা, $4\alpha = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $\alpha = \frac{\pi}{5}$ $\therefore \alpha = \frac{1}{4}\left\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

$n = 2$ হলে, $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ $n = 0$ হলে, $\alpha = \frac{\pi}{24}$

$n = 1$ হলে, $\alpha = \frac{5\pi}{24}$

$\therefore 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধির মাঝে নির্ণেয় সমাধান,

$0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ $A = \frac{1}{5}$ এবং $f(y) = \tan y$ *[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]*

ক. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)$ হলে, $\theta = ?$ ২

খ. দেখাও যে, $\tan^{-1}4A - \frac{1}{2}\sin^{-1}4A + \tan^{-1}\frac{70A}{3} = \frac{\pi}{2}$ ৪

গ. $f(y)f(2y) = 1$ হলে, $0 \le y \le \pi$ ব্যবধিতে y এর মান নির্ণয় করো? ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)$

বা, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\sin\theta\right)$

বা, $\frac{\pi}{2}\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\sin\theta$

বা, $\cos\theta = 1 \pm \sin\theta$

বা, $\cos\theta \pm \sin\theta = 1$

বা, $\cos^2\theta \pm 2\sin\theta.\cos\theta + \sin^2\theta = 1$

বা, $\pm 2\sin\theta.\cos\theta = 0$

বা, $\sin 2\theta = 0$

বা, $2\theta = n\pi$

$\therefore \theta = \frac{1}{2}n\pi$ **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে, $A = \frac{1}{5}$

বামপক্ষ $= \tan^{-1}4A - \frac{1}{2}\sin^{-1}4A + \tan^{-1}\frac{70A}{3}$

$= \tan^{-1}4.\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}4.\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{70}{3}.\frac{1}{5}$

$= \tan^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{14}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{14}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{14}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{4}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{14}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{5}.\frac{1}{2}} + \tan^{-1}\frac{14}{3} = \tan^{-1}\frac{3}{14} + \tan^{-1}\frac{14}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{14}+\frac{14}{3}}{1-\frac{3}{14}.\frac{14}{3}} = \tan^{-1}\frac{\frac{3}{14}+\frac{14}{3}}{0}$

$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan^{-1}4A - \frac{1}{2}\sin^{-1}4A + \tan^{-1}\frac{70A}{3} = \frac{\pi}{2}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $f(y) = \tan y$

$\therefore f(x) = \tan x$

এখন, $f(y).f(2y) = 1$

বা, $\tan y.\tan 2y = 1$

বা, $\tan y.\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y} = 1$

বা, $2\tan^2 y = 1 - \tan^2 y$

বা, $3\tan^2 y = 1$ বা, $\tan^2 y = \frac{1}{3}$

বা, $\tan y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]

$\therefore \tan y = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore y = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, যখন n এর মান শূন্য অথবা, যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $y = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $y = \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$n = -1$ হলে, $y = -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$

$n = 2$ হলে, $y = \frac{13\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$n = -2$ হলে, $y = -\frac{11\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে y এর মান সমূহ: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৩ $f(x) = \sin x$ একটি ফাংশন। *[ন্যাশনাল আইডিয়াল কলেজ, খিলগাঁও, ঢাকা]*

ক. দেখাও যে, $\sin\cot^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{1}{x} = x$ ২

খ. $f(x) = \frac{3}{5}$ এবং $f'(y) = \frac{5}{13}$ হলে, দেখাও যে, $x + \frac{1}{2}y - \cot^{-1}2 = \tan^{-1}\frac{28}{29}$ ৪

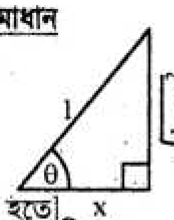
গ. সমাধান কর : $f(x) + f'(x) = f(2x) + \frac{1}{2}f'(2x); -\pi \le x \le \pi$ ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

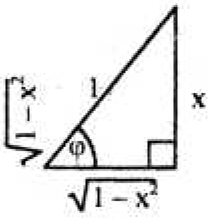
ক বামপক্ষ $= \sin\cot^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{1}{x}$

$= \sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$

$= \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ [চিত্র-১ হতে]



চিত্র-১



চিত্র-২

$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \sin\sin^{-1}x$ [চিত্র-২ হতে]

$= x$

সুতরাং $\sin\cot^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{1}{x} = x$ (দেখানো হলো)

খ $f(x) = \sin x$

বা, $\sin x = \frac{3}{5}$ [$\because f(x) = \frac{3}{5}$]

$\therefore x = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$f(y) = \sin y$

$\therefore f'(y) = \cos y$

বা, $\frac{5}{13} = \cos y$ [$\because f'(y) = \frac{5}{13}$]

বা, $y = \cos^{-1}\frac{5}{13}$

এখন, বামপক্ষ $= x + \frac{1}{2}y - \cot^{-1}2$

$= \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2$

ধরি, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} = \theta$ ... ... (i)

বা, $\cos^{-1}\frac{5}{13} = 2\theta$ বা, $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$

বা, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{5}{13}$

বা, $5 + 5\tan^2\theta = 13 - 13\tan^2\theta$

বা, $18\tan^2\theta = 8$

বা, $\tan^2\theta = \frac{8}{18}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{4}{9}$

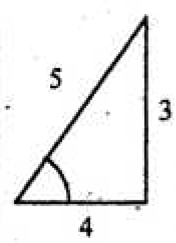
বা, $\tan\theta = \frac{2}{3}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

বা, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ [(i) নং হতে]

$\therefore$ বামপক্ষ $= \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2$

$= \left(\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{3}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{2}$



$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}.\frac{2}{3}}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{17}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{\frac{17}{6}-\frac{1}{2}}{1+\frac{17}{6}.\frac{1}{2}}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{7}{3}}{\frac{29}{12}}\right) = \tan^{-1}\frac{28}{29} =$ ডানপক্ষ

$\therefore x + \frac{1}{2}y - \cot^{-1}2 = \tan^{-1}\frac{28}{29}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = \sin x$

$\therefore f'(x) = \cos x$

$f(2x) = \sin 2x$

$f'(2x) = 2\cos 2x$

এখন, $f(x) + f'(x) = f(2x) + \frac{1}{2}f'(2x)$

বা, $\sin x + \cos x = \sin 2x + \frac{1}{2} \times 2\cos 2x$

বা, $\sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x$

বা, $\cos x - \cos 2x - (\sin 2x - \sin x) = 0$

বা, $2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$

হয়, $\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$ অথবা, $2\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$ বা, $\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $\sin\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2}$ বা, $x = 2n\pi$ [$\because \frac{x}{2} = n\pi$]

বা, $\tan\frac{3x}{2} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$\therefore x = \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi, \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, যখন n এর মান শূন্য বা অন্য কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

n = 0 হলে, $x = 0, \frac{\pi}{6}$

n = −1 হলে, $x = -2\pi, \frac{-\pi}{2}$

n = 1 হলে, $x = 2\pi, \frac{5\pi}{2}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $x = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৪ *[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা]*

ক. প্রমাণ কর : $\sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 15$ ২

খ. সমাধান কর : $\tan\theta + \tan2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan2\theta = \sqrt{3}$ ৪

গ. $-2\pi < \theta < 2\pi$ সীমার মধ্যে $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$ সমীকরণের মান নির্ণয় কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1}3)$

$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}2)\}^2 + 1 + \{\cot(\cot^{-1}3)\}^2$

$= 1 + 4 + 1 + 9$

$= 15$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 15$ **(প্রমাণিত)**

খ $\tan\theta + \tan2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan2\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta + \tan2\theta = \sqrt{3}(1 - \tan\theta\tan2\theta)$

বা, $\frac{\tan\theta + \tan2\theta}{1 - \tan\theta\tan2\theta} = \sqrt{3}$ বা, $\tan(\theta + 2\theta) = \sqrt{3}$

বা, $\tan3\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ বা, $3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$

সুতরাং, $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা। **(Ans.)**

গ $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 1$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin\theta\left(\theta - \frac{\theta}{6}\right) = 1$

বা, $\theta - \frac{\pi}{6} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

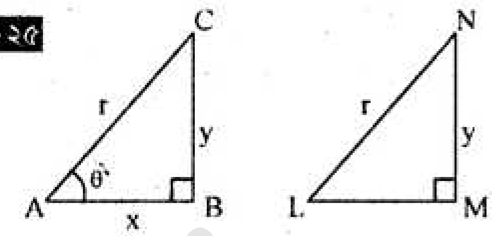
$\therefore \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, n = 0, তখন $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

যখন, n = −1, তখন $\theta = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{-4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান, $\theta = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৫



$f(\theta) = \sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta$ *[নারায়ণগঞ্জ সরকারি মহিলা কলেজ, নারায়ণগঞ্জ]*

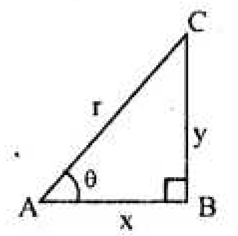
ক. $\theta = \text{cosec}^{-1}\left(\frac{x^2}{y^2} + p\right)$ হলে, p এর মান কত? ২

খ. $f(\theta) = 0$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর। ৪

গ. $A + N = \varphi$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 - 2xy\cos\varphi + y^2 = r^2\sin^2\varphi$ ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\theta = \text{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + p}$



বা, $\text{cosec}\theta = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + p}$

বা, $\text{cosec}^2\theta = \frac{x^2}{y^2} + p$

বা, $p = \text{cosec}^2\theta - \frac{x^2}{y^2}$

$= \text{cosec}^2\theta - \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$

$= \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

$\therefore p = 1$ **(Ans.)**

খ $f(\theta) = 0$

বা, $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $\cos^2\theta(4\sin^2\theta - 3) = 0$

$\therefore \cos^2\theta = 0$

বা, $\cos\theta = 0$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $4\sin^2\theta - 3 = 0$

বা, $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = n\pi \pm \frac{\pi}{3};\ n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-৬(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৬

প্রশ্ন ▶২৬ $f(x) = \cos x$ একটি ফাংশন।

[রাজেন্দ্রপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, গাজীপুর]

ক. দেখাও যে, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\} = \cos^{-1}\frac{b+a\,f(x)}{a+b\,f(x)}$ ৪

গ. সমাধান কর : $f(x)\,f(2x)\,f(3x) = \frac{1}{4}$; যখন $0 < x < \pi$ ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\sin^{-1}x = \theta$

$\therefore \sin\theta = x$

এখন, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

বা, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

বা, $\cos^{-1}x = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

বা, $\theta + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

সুতরাং $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\}$

$= \cos^{-1}\frac{1 - \frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}{1 + \frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}$

$= \cos^{-1}\frac{1 - \frac{(a-b)}{(a+b)}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1 + \frac{(a-b)}{(a+b)}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$

$= \cos^{-1}\frac{(a+b)\cos^2\frac{x}{2} - (a-b)\sin^2\frac{x}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2} + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}}$

$= \cos^{-1}\frac{a\cos^2\frac{x}{2} + b\cos^2\frac{x}{2} - a\sin^2\frac{x}{2} + b\sin^2\frac{x}{2}}{a\cos^2\frac{x}{2} + b\cos^2\frac{x}{2} + a\sin^2\frac{x}{2} - b\sin^2\frac{x}{2}}$

$= \cos^{-1}\frac{a\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)}{a\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)}$

$= \cos^{-1}\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ $[\because \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x]$

$= \cos^{-1}\frac{b + a\,f(x)}{a + b\,f(x)}$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৮

প্রশ্ন ▶২৭ $f(x) = \cos x$ এবং $g(\theta) = \sin(\pi\cos\theta) - \cos(\pi\sin\theta)$.

[আবদুল কাদির মোল্লা সিটি কলেজ, নরসিংদী]

ক. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $g(\theta) = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$। ৪

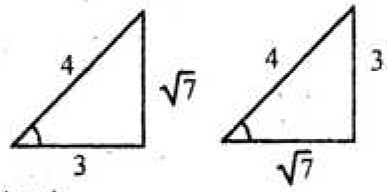
গ. $4\,f(x)\,f(2x)\,f(3x) = 1$ হলে, $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4}$

$= \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}$

$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3} = \sin\sin^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**



খ দেওয়া আছে, $g(\theta) = \sin(\pi\cos\theta) - \cos(\pi\sin\theta)$

$\therefore g(\theta) = 0$

বা, $\sin(\pi\cos\theta) - \cos(\pi\sin\theta) = 0$

বা, $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$

বা, $\sin(\pi\cos\theta) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right\}$

বা, $\pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta$

বা, $\cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $(\cos\theta \pm \sin\theta)^2 = \frac{1}{4}$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta \pm 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $1 \pm \sin 2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\pm\sin 2\theta = -\frac{3}{4}$

বা, $\sin 2\theta = \pm\frac{3}{4}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\left(\pm\frac{3}{4}\right)$

$\therefore \theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৮

প্রশ্ন ▶২৮ $A = \cos^{-1}\frac{x}{a}$, $B = \cos^{-1}\frac{y}{b}$

$P = \sin\theta$, $Q = \cos\theta$ *[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]*

ক. দেখাও যে, $\sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 15$। ২

খ. $A + B = \theta$ হলে দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta + \frac{2xy}{ab}\cos\theta$ ৪

গ. সমাধান কর : $4PQ = 1 - 2p + 2Q$ যখন $0 < \theta < \pi$. ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1}3)$

$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}2)\}^2 + 1 + \{\cot(\cot^{-1}3)\}^2$

$= 1 + 4 + 1 + 9$

$= 15$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(গ) নং দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $P = \sin\theta$

$Q = \cos\theta$

$\therefore\ 4\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta + 2\cos\theta;\ 0 < \theta < \pi$

বা, $4\sin\theta\cos\theta - 2\cos\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(2\sin\theta - 1) + 1(2\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(2\sin\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

হয়, $2\sin\theta - 1 = 0$ .... (i)

অথবা, $2\cos\theta + 1 = 0$ .... (ii)

(i) নং হতে পাই, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) নং হতে পাই, $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6},\ 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

যখন, n = 0, তখন, $\theta = \frac{\pi}{6}, \pm\frac{2\pi}{3}$

যখন, n = 1, তখন, $\theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ইত্যাদি

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৯ $\cos\theta - \cos7\theta = \sin4\theta$ এবং $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \theta$ দুইটি সমীকরণ।

[সরকারি সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ, ফরিদপুর]

ক. $\sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3)$ এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} = \sin^2\theta$ ৪

গ. প্রথম সমীকরণটিকে $-\pi < \theta < \pi$ ব্যবধিতে সমাধান করো। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1}3)$

$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}2)\}^2 + 1 + \{\cot(\cot^{-1}3)\}^2$

$= 1 + 4 + 1 + 9$

$= 15$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(গ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৮

গ $\cos\theta - \cos7\theta = \sin4\theta$

বা, $2\sin4\theta\sin3\theta - \sin4\theta = 0$

বা, $\sin4\theta(2\sin3\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin4\theta = 0$ অথবা, $2\sin3\theta - 1 = 0$

বা, $4\theta = n\pi$ বা, $2\sin3\theta = 1$

$\therefore\ \theta = \frac{n\pi}{4}$ বা, $\sin3\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

বা, $3\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18}; n \in \mathbb{Z}$

যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

n = 0 হলে, $\theta = 0$ বা, $\theta = \frac{\pi}{18}$

n = −1 হলে, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ বা, $\theta = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18} = \frac{-7\pi}{18}$

n = 1 হলে, $\theta = \frac{\pi}{4}$ বা, $\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18} = \frac{5\pi}{18}$

n = −2 হলে, $\theta = \frac{-\pi}{2}$ বা, $\theta = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18} = -\frac{11\pi}{18}$

n = 2 হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$ বা, $\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18} = \frac{13\pi}{18}$

n = −3 হলে, $\theta = \frac{-3\pi}{4}$ বা, $\theta = -\pi - \frac{\pi}{18} = -\frac{19\pi}{18}$

n = 3 হলে, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ বা, $\theta = \pi - \frac{\pi}{18} = \frac{17\pi}{18}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 0, \frac{\pi}{18}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-7\pi}{18}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-11\pi}{18}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{18}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{17\pi}{18}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩০ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) - \cot^{-1}2$,

$\cot x + \tan x = 2\sec x,\ -180° < x < 180°$

[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]

ক. $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রথম উদ্দীপক হতে দেখাও যে, এর মান $= \tan^{-1}\left(\frac{28}{29}\right)$। ৪

গ. দ্বিতীয় উদ্দীপক হতে সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}4) + \sec^2(\sec^{-1}3) - 1$

$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}4)\}^2 + \{\sec(\sec^{-1}3)\}^2 - 1$

$= 1 + 4^2 + 3^2 - 1$

$= 16 + 9$

$= 25$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-২৩ (খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৩৫

গ $\cot x + \tan x = 2\sec x$

বা, $\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\cos x}$

বা, $\frac{\sin^2x + \cos^2x}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\cos x}$

বা, $\frac{1}{\sin x\cos x} - \frac{2}{\cos x} = 0$

বা, $\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{\sin x} - 2\right) = 0$

কিন্তু $\frac{1}{\cos x} \neq 0$

সুতরাং $\frac{1}{\sin x} - 2 = 0$

বা, $\frac{1}{\sin x} = 2$

বা, $\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ [যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$]

যখন, n = 0, $x = \frac{\pi}{6} = 30°$

যখন, n = 1, $x = \frac{5\pi}{6} = 150°$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $x = 30°, 150°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩১ $A + B + C = \pi$ এবং $g(x) = 4\cos\theta \cos 2\theta \cos 3\theta - 1$

[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]

ক. দেখাও যে, $\sin \cot^{-1} \tan \cos^{-1}x = x$ ২

খ. যদি $\tan^{-1}2 = A$ এবং $\tan^{-1}3 = B$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sec C = \sqrt{2}$ ৪

গ. $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ব্যবধিতে $g(x) = 0$ সমীকরণের সমাধান কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ

$= \sin \cot^{-1} \tan \cos^{-1}x$

$= \sin \cot^{-1} \tan \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \sin \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

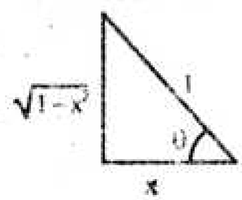
$= \sin \sin^{-1}\frac{x}{1}$

$= x$

$=$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

মনে করি, $\cos^{-1}x = \theta$

$\Rightarrow \cos\theta = x$



$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\therefore \cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

খ এখানে, $A + B + C = \pi$

বা, $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 + C = \pi$

বা, $C = \pi - \tan^{-1}2 - \tan^{-1}3$

$\because \tan\pi = 0$

$\therefore \pi = \tan^{-1}(0)$

বা, $C = \tan^{-1}0 - \tan^{-1}2 - \tan^{-1}3$

বা, $C = \tan^{-1}0 - (\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3)$

বা, $C = \tan^{-1}0 - \tan^{-1}\frac{2+3}{1-2\times3}$

বা, $C = \tan^{-1}0 - \tan^{-1}\frac{5}{-5}$

বা, $C = \tan^{-1}0 - \tan^{-1}(-1)$

বা, $C = \tan^{-1}\frac{0-(-1)}{1+0(-1)}$

বা, $C = \tan^{-1}\frac{1}{1}$

বা, $\sec C = \sec(\tan^{-1}1)$

$= \sqrt{1+\tan^2(\tan^{-1}1)}$

$= \sqrt{1+1}$

$\therefore \sec C = \sqrt{2}$ **(দেখানো হলো)**

গ এখানে, $g(x) = 4\cos\theta \cos 2\theta \cos 3\theta - 1 = 0$

$\therefore \quad 4\cos\theta \cos 2\theta \cos 3\theta - 1 = 0$

বা, $(2\cos 3\theta \cos\theta)\, 2\cos 2\theta = 1$

বা, $(\cos 4\theta + \cos 2\theta)\, 2\cos 2\theta = 1$

বা, $2\cos 4\theta \cos 2\theta + 2\cos^2 2\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos 4\theta \cos 2\theta + \cos 4\theta = 0$

বা, $\cos 4\theta\, (2\cos 2\theta + 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos 4\theta = 0$

বা, $4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $2\cos 2\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos 2\theta = -1$

বা, $\cos 2\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

বা, $2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

যখন, n এর মান শূন্য কিংবা যে কোন পূর্ণ সংখ্যা।

যখন $n = 0$, তখন, $\theta = \frac{\pi}{8}, \pm\frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$n = 3$ হলে, $\theta = \frac{7\pi}{8}$

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{\pi}{8}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}$

$n = -2$ হলে, $\theta = -\frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মানসমূহ :

$\pm\frac{\pi}{8}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$

প্রশ্ন ▶ ৩২ $f(x) = \sin x$ এবং $m = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

[রাজশাহী সরকারি সিটি কলেজ, রাজশাহী]

ক. দেখাও যে, $\tan^{-1}\sqrt{p} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-p}{1+p}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\tan m = 2$ ৪

গ. সমাধান কর : $f(x) + \sqrt{3}\, f'(x) = 2$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-p}{1+p} = \theta$ .... (i)

বা, $\cos^{-1}\frac{1-p}{1+p} = 2\theta$

বা, $\frac{1-p}{1+p} = \cos 2\theta$

বা, $\frac{1-p}{1+p} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

বা, $\frac{1+p}{1-p} = \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

বা, $\frac{1+p+1-p}{1+p-1+p} = \frac{1+\tan^2\theta+1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta-1+\tan^2\theta}$

বা, $\frac{1}{p} = \frac{2}{2\tan^2\theta}$

বা, $\tan^2\theta = p$

বা, $\tan\theta = \sqrt{p}$

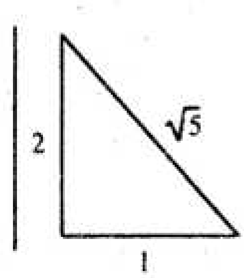
$\therefore \theta = \tan^{-1}\sqrt{p}$ .... (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\tan^{-1}\sqrt{p} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-p}{1+p}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $m = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}.\, 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$



$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\right)$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

বা, $m = \tan^{-1}2$

$\therefore \tan m = 2$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = \sin x$

$\therefore f'(x) = \cos x$

$\therefore f(x) + \sqrt{3}\, f'(x) = 2$

বা, $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

বা, $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\frac{\pi}{6}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x = 1$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

বা, $x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi$

$\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$

যেখানে n এর মান শূন্য বা পূর্ণসংখ্যা।

প্রশ্ন ▶ ৩৩ $f(x) = \cos^{-1}x,\ g(x) = \tan x$ *[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]*

ক. প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ২

খ. $f\left(\frac{x}{a}\right) + f\left(\frac{y}{b}\right) = 0$ হলে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x) + g(2x) + g(3x) = 0$ এর সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\tan^{-1}x = \theta \quad \therefore \tan\theta = x$

এখন, $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow 2\theta = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ...... (i)

আবার, $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 2\theta = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos^{-1}x$

$\therefore f\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

এবং $f\left(\frac{y}{b}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)$

এখন, $f\left(\frac{x}{a}\right) + f\left(\frac{y}{b}\right) = 0$

বা, $\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = 0$

বা, $\cos^{-1}\left[\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b} - \sqrt{\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right\}}\right] = 0$

বা, $\cos^{-1}\left[\frac{xy}{ab} - \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}\right] = 0$

বা, $\frac{xy}{ab} - \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} = \cos 0$

বা, $\frac{xy}{ab} - \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} = 1$

বা, $\frac{xy}{ab} - 1 = \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$

বা, $\left(\frac{xy}{ab} - 1\right)^2 = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$

বা, $\frac{x^2y^2}{a^2b^2} - 2\frac{xy}{ab} + 1 = 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$

বা, $\frac{x^2y^2}{a^2b^2} - 2\frac{xy}{ab} + 1 - 1 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2y^2}{a^2b^2} = 0$

বা, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} = 0$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{xy}{ab}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \tan x$

$\therefore g(2x) = \tan 2x$

এবং $g(3x) = \tan 3x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $g(x) + g(2x) + g(3x) = 0$

বা, $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

বা, $\tan x + \tan 2x + \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x\tan 2x} = 0$

বা, $(\tan x + \tan 2x)\left(1 + \frac{1}{1 - \tan x \tan 2x}\right) = 0$

বা, $(\tan x + \tan 2x)\left(\frac{1 - \tan 2x\tan 2x + 1}{1 - \tan x\tan 2x}\right) = 0$

বা, $\left(\frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x\tan 2x}\right)(2 - \tan x\tan 2x) = 0$

বা, $\tan 3x(2 - \tan x\tan 2x) = 0$

হয়, $\tan 3x = 0$

বা, $3x = n\pi \quad \therefore x = \frac{n\pi}{3}$

অথবা, $2 - \tan x\tan 2x = 0$

বা, $2 - \frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = 0$

বা, $2 - 2\tan^2 x - 2\tan^2 x = 0$

বা, $4\tan^2 x = 2$

বা, $2\tan^2 x = 1$

বা, $\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \tan\alpha$ [যেখানে $\tan\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$]

বা, $x = n\pi + \alpha$

$\therefore x = n\pi \pm \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{n\pi}{3},\ n\pi \pm \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণসংখ্যা। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৪ যদি $f(A) = \cos A$ এবং $x = py$ হয়।

[রাণীভবানী সরকারী মহিলা কলেজ, নাটোর]

ক. $a = \sin(\cos^{-1}b)$ হলে $a^2 + b^2$ এর মান বের কর। ২

খ. $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}p$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. সমাধান কর: $\sqrt{3}f(A) + f\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = 1$, যখন $-2\pi < A < 2\pi$. ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$a = \sin(\cos^{-1}b)$

বা, $a^2 = \{\sin(\cos^{-1}b)\}^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $a^2 = 1 - \{\cos(\cos^{-1}b)\}^2$

বা, $a^2 = 1 - b^2$

$\therefore a^2 + b^2 = 1$ **(Ans.)**

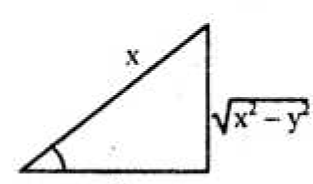
খ দেওয়া আছে,

$x = py$

$\therefore p = \frac{x}{y}$

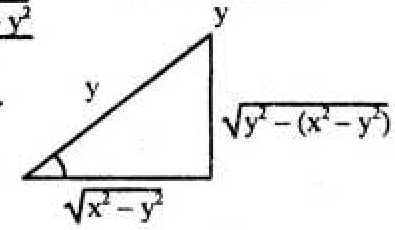
$\therefore \sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}p$

$= \sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$



$= \sin\cos^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

$= \sin\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$



$= \sin\sin^{-1}\frac{\sqrt{y^2-(x^2-y^2)}}{y} = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

গ দেওয়া আছে, $f(A) = \cos A$

$\sqrt{3}f(A) + f\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = 1$

বা, $\sqrt{3}\cos A + \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = 1$

বা, $\sqrt{3}\cos A + \sin A = 1$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{1}{2}\sin A = \frac{1}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos A \cos\frac{\pi}{6} + \sin A \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $A - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

$\therefore A = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, n = 0 তখন,

$A = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}$

যখন, n = 1 তখন, $A = 2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= 2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ 2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

যখন, n = –1 তখন, $x = -2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= -2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ -2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= -\frac{3\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $A = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}$

প্রশ্ন ▶ ৩৫ $f(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x}$, $g(x) = \tan x$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর]

ক. $\tan^{-1}\frac{2}{3} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\cos\{2f(7)\} = \sin\{4f(2)\}$ ৪

গ. $g(x) + g(2x) + g(3x) = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan^{-1}\frac{2}{3} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$

$= \tan^{-1}\frac{2}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{2}{3} + \cot^{-1}\frac{2}{3}$

$= \frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

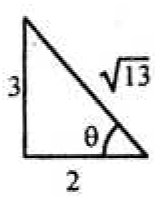
ধরি, $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}} = \theta$

বা, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore \tan\theta = \frac{3}{2}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

$\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$



খ দেওয়া আছে, $f(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x}$

$\therefore f(7) = \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$\therefore f(2) = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

বামপক্ষ $= \cos\{2f(7)\} = \cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$

$= \cos\left\{\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right\}$ [সূত্র: $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$]

$= \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}} = \frac{48}{49} \times \frac{49}{50} = \frac{24}{25}$

ডানপক্ষ $= \sin\{4f(2)\} = \sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$= \sin\left(2 \times 2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\left(1 \times \frac{4}{3}\right)\right\}$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\frac{4}{3}\right\}$

$= \sin\left\{\sin^{-1}\frac{2.\frac{4}{3}}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\right\}$

$= \frac{\frac{8}{3}}{1+\frac{16}{9}} = \frac{8}{3} \times \frac{9}{25}$

$= \frac{24}{25}$

$\therefore \cos\{2f(7)\} = \sin\{4f(2)\}$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-৩৩ (গ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪০

প্রশ্ন ▶ ৩৬ উদ্দীপকদ্বয়: $f(x) = 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\sec x + 7$

$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = p$ *[কারমাইকেল কলেজ, রংপুর]*

ক. প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3}) = 1$ ২

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের সমাধান কর। যেখানে $0 < x < 2\pi$। ৪

গ. $p = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$

$= 1 + \cot^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 3\{1 + \tan^2(\cot^{-1}\sqrt{3})\}$

$= 1 + \cot^2(\cot^{-1}2) - 3 - 3\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 1 + (2)^2 - 3 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= 1 + 4 - 3 - 3.\frac{1}{3} = 2 - 1 = 1$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\sec x + 7$

বা, $0 = 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\sec x + 7$

বা, $3(\sec^2 x - 1) - 4\sqrt{3}\sec x + 7 = 0$

বা, $3\sec^2 x - 3 - 4\sqrt{3}\sec x + 7 = 0$

বা, $3\sec^2 x - 4\sqrt{3}\sec x + 4 = 0$

বা, $(\sqrt{3}\sec x)^2 - 2.\sqrt{3}\sec x.2 + (2)^2 = 0$

বা, $(\sqrt{3}\sec x - 2)^2 = 0$

বা, $\sqrt{3}\sec x - 2 = 0$

বা, $\sec x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\sec x = \sec\frac{\pi}{6} = \sec\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sec\frac{11\pi}{6}$

∴ $x = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

∴ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে x এর মানসমূহ: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

∴ $x = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

গ $P = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z$

মনে করি, $\sin^{-1}x = A$ বা, $\sin A = x$

$\sin^{-1}y = B$ বা, $\sin B = y$

এবং $\sin^{-1}z = C$ বা, $\sin C = z$

∴ $A + B + C = P$ বা, $A + B + C = \pi$

এখন, বামপক্ষ $= x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2}$

$= \sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C$

$= \frac{1}{2}(2\sin A \cos A + 2\sin B \cos B + 2\sin C \cos C)$

$= \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B + 2\sin C \cos C)$

$= \frac{1}{2}\{2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C \cos C\}$

$= \frac{1}{2}\{2\sin C \cos(A-B) + 2\sin C \cos C\}$

$[\because \sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C]$

$= \frac{1}{2}.2\sin C\{\cos(A-B) + \cos C\}$

$= \frac{1}{2}.2\sin C\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$

$[\because \cos C = \cos\{\pi - (A+B)\} = -\cos(A+B)]$

$= \sin C.2\sin A \sin B = 2xyz =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৩৭ $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হলে

[আহমদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]

ক. $\sin 2(\cot^{-1}x + \tan^{-1}x)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = 1$ ৪

গ. যদি $x = \sqrt{2}\sin\theta$ এবং $y = \sqrt{\cos 2\theta}$ হয় তাহলে উদ্দীপকের সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

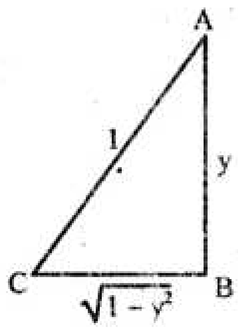
ক $\sin 2(\cot^{-1}x + \tan^{-1}x)$

$= \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \left[\because \cot^{-1}x + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

$= \sin\pi$

$= 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$



বা, $\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y$

বা, $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y\right)$

বা, $x = \cos(\sin^{-1}y)$

বা, $x = \cos\cos^{-1}\sqrt{1-y^2}$

বা, $x = \sqrt{1-y^2}$

বা, $x^2 = 1 - y^2$

∴ $x^2 + y^2 = 1$ (প্রমাণিত)

গ বামপক্ষ $= \sin^{-1}x + \sin^{-1}y$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \sin^{-1}\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1-\cos 2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}.\sqrt{1-2\sin^2\theta}\}$

$= \sin^{-1}\{\sqrt{2}\sin\theta \times \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\sqrt{\cos 2\theta}\}$

$= \sin^{-1}\{2\sin^2\theta + \cos 2\theta\}$

$= \sin^{-1}\{2\sin^2\theta + 1 - 2\sin^2\theta\}$

$= \sin^{-1}1 = \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{2} =$ ডানপক্ষ (সত্যতা যাচাই করা হলো)

প্রশ্ন ▶ ৩৮ ত্রিকোণমিতিক ফাংশন $f_1(x) = \cos x$

$f_2(x) = \cos 2x$

$f_3(x) = \cos 3x$

[বুড়িচং শহীদ স্মৃতি সরকারি কলেজ, কুমিল্লা]

ক. $\tan 2\theta \tan\theta = 1$ এর সাধারণ সমাধান কি? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে সমাধান কর $4f_1(x)f_2(x)f_3(x) = 1$ যখন $0 < x < \pi$ ৪

গ. উদ্দীপক ব্যবহার করে সমাধান কর $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 0$ যখন $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan 2\theta \tan\theta = 1$

বা, $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\tan\theta = 1$

বা, $2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

বা, $3\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

∴ $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\tan\frac{\pi}{6}$

(+ve) এর জন্য $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

∴ $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$

(−ve) এর জন্য $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{5\pi}{6}$

∴ $\theta = n\pi + \frac{5\pi}{6}$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}$; যখন, n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৮

গ $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 0$

বা, $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

বা, $(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0$

বা, $2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0$

বা, $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$

∴ হয় $\cos 2x = 0$

বা, $2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

∴ $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

অথবা, $2\cos x + 1 = 0$

বা, $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

∴ $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$x = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}$

$x = 1$ হলে, $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$

∴ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $x = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৯ $\alpha = \sin\theta$ এবং $\beta = \cos\theta$ *[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]*

ক. দেখাও যে, $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3) = 25$ — ২

খ. $\sin(\pi\beta) = \cos(\pi\alpha)$ হলে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$। — ৪

গ. $4(\alpha^2 + \beta) = 5$ হলে সমাধান কর যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$. — ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}4) + \sec^2(\sec^{-1}3) - 1$

$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}4)\}^2 + \{\sec(\sec^{-1}3)\}^2 - 1$

$= 1 + 4^2 + 3^2 - 1$

$= 16 + 9$

$= 25 =$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-২৭(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৩৭

গ দেওয়া আছে, $4(\alpha^2 + \beta) = 5$

যেহেতু $\alpha = \sin\theta$ এবং $\beta = \cos\theta$ তাই

$4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$

বা, $4\sin^2\theta + 4\cos\theta - 5 = 0$

বা, $4(1 - \cos^2\theta) + 4\cos\theta - 5 = 0$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 5 - 4 = 0$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

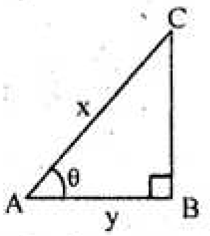
যখন, $n = 0$, তখন, $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

যখন, $n = 1$, তখন, $\theta = \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$

যখন, $n = -1$, তখন, $\theta = -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে θ এর মানসমূহ: $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$

প্রশ্ন ▶ ৪০ $f(x) = \cos x$, $g(x) = \tan^{-1}x$.



[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]

ক. প্রমাণ কর যে, $\cot^{-1}(\tan 2x) + \cot^{-1}(-\tan 3x) = x$ — ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর : $2g\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{b + af(\theta)}{a + bf(\theta)}$ — ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে $f(\theta) = \frac{x}{y}$ হলে $0° < \theta < 180°$ ব্যবধিতে $f(4\theta) - f(2\theta) = 2$ সমীকরণটির সমাধান কর। — ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \cot^{-1}(\tan 2x) + \cot^{-1}(-\tan 3x)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan 2x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\tan 3x}\right)$

$= \tan^{-1}(\cot 2x) + \tan^{-1}(-\cot 3x)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\cot 2x - \cot 3x}{1 + \cot 2x.\cot 3x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin 3x\cos 2x - \sin 2x\cos 3x}{\cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x}\right)$

$= \tan^{-1}\left\{\frac{\sin(3x - 2x)}{\cos(3x - 2x)}\right\}$

$= \tan^{-1}(\tan x) = x$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$\therefore$ $f(\theta) = \cos\theta$

এবং $g(x) = \tan^{-1}x$

$\therefore$ $g\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$

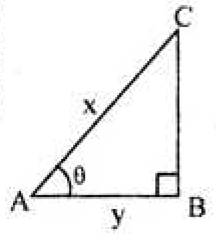
বামপক্ষ $= 2g\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right\}$

$$= \cos^{-1}\frac{1 - \frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1 - \frac{(a-b)}{(a+b)}\cdot\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1 + \frac{(a-b)}{(a+b)}\cdot\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2} - (a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2} + (a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{a\cos^2\frac{\theta}{2} + b\cos^2\frac{\theta}{2} - a\sin^2\frac{\theta}{2} + b\sin^2\frac{\theta}{2}}{a\cos^2\frac{\theta}{2} + b\cos^2\frac{\theta}{2} + a\sin^2\frac{\theta}{2} - b\sin^2\frac{\theta}{2}}$$



$$= \cos^{-1}\frac{a\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{a\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$= \cos^{-1}\frac{b + a\cos\theta}{a + b\cos\theta}$ $[\because \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta]$

$= \cos^{-1}\frac{b + a f(\theta)}{a + b f(\theta)}$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $f(\theta) = \frac{x}{y}$

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\sec\theta = \frac{x}{y}$

$\therefore$ $f(\theta) = \sec\theta$

$\therefore$ $f(4\theta) = \sec 4\theta$

এবং $f(2\theta) = \sec 2\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(4\theta) - f(2\theta) = 2$

বা, $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$

বা, $\frac{1}{\cos 4\theta} - \frac{1}{\cos 2\theta} = 2$

বা, $\frac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{\cos 4\theta\cos 2\theta} = 2$

বা, $\cos 2\theta - \cos 4\theta = 2\cos 4\theta\cos 2\theta$

বা, $\cos 2\theta - \cos 4\theta = \cos 6\theta + \cos 2\theta$

বা, $\cos 6\theta + \cos 4\theta = 0$

বা, $2\cos 5\theta\cos\theta = 0$

হয়, $\cos 5\theta = 0$ — অথবা, $\cos\theta = 0$

বা, $5\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ — বা, $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{10}$

সুতরাং $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{10}, (2n+1)\frac{\pi}{2}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

n = 0 হলে, $\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}$ বা, $\theta = 18°, 90°$; n = 1 হলে, $\theta = \frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = 54°, 270°$

n = 2 হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ বা, $\theta = 90°, 450°$; n = 3 হলে, $\theta = \frac{7\pi}{10}, \frac{7\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = 126°, 630°$

n = 4 হলে, $\theta = \frac{9\pi}{10}, \frac{9\pi}{2}$ বা, $\theta = 162°, 810°$

সুতরাং প্রদত্ত সীমার মধ্যে মানসমূহ : $\theta = 18°, 54°, 90°, 126°, 162°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪১ $f(\alpha) = \cos\alpha$ এবং $g(\alpha) = \tan^{-1}\alpha$।

[চাঁদপুর সরকারি মহিলা কলেজ, চাঁদপুর]

ক. $\sin^{-1}x = g(a)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $2g\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)}$ ৪

গ. $\sqrt{3}f(\theta) + f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 1$ কে $-2\pi \le \theta \le 2\pi$ সীমার মধ্যে সমাধান কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

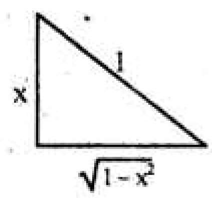
ক দেওয়া আছে, $g(\alpha) = \tan^{-1}\alpha$

$\therefore g(a) = \tan^{-1}a$

এখানে, $\sin^{-1}x = g(a)$

বা, $\sin^{-1}x = \tan^{-1}a$

বা, $a = \tan(\sin^{-1}x)$



বা, $a = \tan\left(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ [চিত্র হতে]

$\therefore a = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(\alpha) = \cos\alpha$

$g(\alpha) = \tan^{-1}\alpha$

দেখাতে হবে যে, $2g\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)}$

বামপক্ষ $= 2g\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$

$$= \cos^{-1}\frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1-\frac{(a-b)}{(a+b)}\cdot\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{(a-b)}{(a+b)}\cdot\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}-(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{a\cos^2\frac{\theta}{2}+b\cos^2\frac{\theta}{2}-a\sin^2\frac{\theta}{2}+b\sin^2\frac{\theta}{2}}{a\cos^2\frac{\theta}{2}+b\cos^2\frac{\theta}{2}+a\sin^2\frac{\theta}{2}-b\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{a\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{a\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$= \cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$ [$\because \cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$]

$= \cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)} =$ ডানপক্ষ

$2g\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)}$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ৩৪(গ) নং এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-৩৪১

প্রশ্ন ▶৪২ (i) $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$

[চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ল্যাবরেটরী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. দেখাও যে, $\tan^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}$ ২

খ. উদ্দীপক (i) $-\pi < \theta < \pi$ এর মধ্যে সমাধান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপক (ii) দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

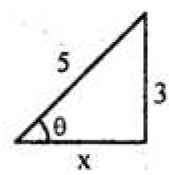
$= \tan^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{12+15}{20}}{\frac{20-9}{20}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{27}{20}}{\frac{11}{20}}$

$= \tan^{-1}\frac{27}{11}$ **(দেখানো হলো)**



$x = \sqrt{5^2-3^2}$

$= \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

$\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{x}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4}$

খ $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2}$ [উভয়পক্ষকে $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = (24n+1)\frac{\pi}{12}$ এবং $(24n-7)\frac{\pi}{12}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0, \pm1, \pm2 \ldots\ldots$ বসিয়ে,

n = 0 হলে, $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}$

n = 1 হলে, $\theta = \frac{25\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$

n = – 1 হলে, $\theta = \frac{-23\pi}{12}, \frac{-31\pi}{12}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মানসমূহ: $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-২৭ (খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৩৭

প্রশ্ন ▶৪৩ $g(x) = \cos x + \sin x$

$f(x) = \sin x$ *[বাংলাদেশ নৌবাহিনী কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $f(\pi\cos\theta) = f\left\{\frac{\pi}{2} \pm (\pi\sin\theta)\right\}$ হলে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ । ৪

গ. $g(x) = g(2x)$ সমাধান কর যখন $[-2\pi \le x \le 2\pi]$ ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$

$= \cos\left(\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right)$

$= \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}}$

$= \frac{\frac{49-1}{49}}{\frac{49+1}{49}} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

এখন, $f(\pi\cos\theta) = f\left\{\frac{\pi}{2} \pm (\pi\sin\theta)\right\}$

বা, $\sin(\pi\cos\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm (\pi\sin\theta)\right)$

বা, $\pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta$

বা, $\cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ [উভয় পক্ষে $\frac{1}{\sqrt{2}}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta \pm \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\theta \pm \frac{\pi}{4} = \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x + \sin x$

$\therefore$ $g(2x) = \cos 2x + \sin 2x$

এখন, $g(x) = g(2x)$

বা, $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$

বা, $\cos x - \cos 2x - (\sin 2x - \sin x) = 0$

বা, $2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$

হয়, $\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$ অথবা, $2\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$ বা $\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $\sin\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2}$ $\frac{x}{2} = n\pi$

বা, $\tan\frac{3x}{2} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ বা, $x = 2n\pi$

বা, $\frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $x = \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi, \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, যখন n এর মান শূন্য বা অন্য কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

এখন, $-2\pi \le x < 2\pi$ সীমার মধ্যে

$n = 0$ হলে, $x = 0, \frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $x = 2\pi, \frac{5\pi}{6}$

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi, -\frac{\pi}{2}$

$n = 2$ হলে, $x = \frac{3\pi}{2}$

$n = -2$ হলে, $x = -\frac{7\pi}{6}$

$n = -3$ হলে, $x = -\frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = -2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

প্রশ্ন ▶৪৪ $f(x) = \cos x$, $g(x) = \tan^{-1}x$ *[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. দেখাও যে, $g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $2g\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)}$ ৪

গ. সমাধান কর : $\sqrt{3}f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1, -2\pi < x < 2\pi$ ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $g(x) = \tan^{-1}x$

$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore g\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

বামপক্ষ $= g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3+2}{6}}{\frac{6-1}{6}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\times\frac{6}{5}\right)$

$= \tan^{-1}1$

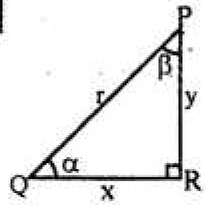
$= \frac{\pi}{4} =$ ডানপক্ষ

$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল ৪১(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৪

গ সৃজনশীল ৩৪(গ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪১

প্রশ্ন ▶ ৪৫



[বান্দরবান সরকারি কলেজ, বান্দরবান]

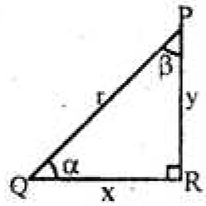
ক. $\cos^{-1}\alpha + \cos^{-1}\beta = \frac{\pi}{2}$ হলে $\alpha^2 + \beta^2$ এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{2y^2 - x^2}}{y}$ ৪

গ. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{2r}{x}$ হলে দেখাও যে, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ অথবা, $\frac{5\pi}{6}$ ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,



$\cos^{-1}\alpha + \cos^{-1}\beta = \frac{\pi}{2}$

বা, $\cos^{-1}\{\alpha\beta - \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\} = \frac{\pi}{2}$

বা, $\alpha\beta - \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} = \cos\frac{\pi}{2}$

বা, $\alpha\beta = \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}$ [$\because \cos\frac{\pi}{2} = 0$]

বা, $\alpha^2\beta^2 = (1 - \alpha^2 - \beta^2 + \alpha^2\beta^2)$

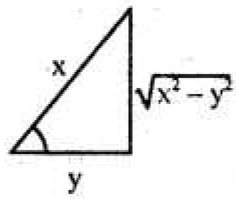
বা, $\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$

বা, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1$ **(Ans.)**

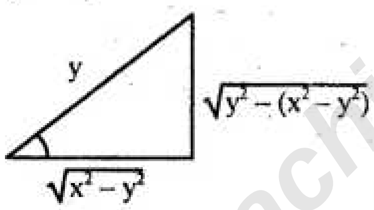
খ বামপক্ষ $= \sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{QR}{PR}$

$= \sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$



$= \sin\cos^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

$= \sin\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$



$= \sin\sin^{-1}\frac{\sqrt{y^2-(x^2-y^2)}}{y} = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{2r}{x}$

বা, $\cot\alpha + \tan\alpha = 2\sec\alpha$

বা, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$

বা, $\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} - \frac{2}{\cos\alpha} = 0$

বা, $\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 2\right) = 0$

কিন্তু $\frac{1}{\cos\alpha} \neq 0$ সুতরাং $\frac{1}{\sin\alpha} - 2 = 0$

বা, $\frac{1}{\sin\alpha} = 2$

বা, $\sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \alpha = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন $n = 0$, তখন, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

যখন $n = 1$, তখন, $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

যখন $n = -1$, তখন, $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$

যখন $n = -2$, তখন, $\alpha = -\frac{11\pi}{6}$

যে কোন ত্রিভুজের জন্য $0 < \alpha < \pi$

$\therefore$ উক্ত সীমার মধ্যে $\alpha = \frac{\pi}{6}$ অথবা $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪৬ $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ এবং $g^{-1}(x) = \cos^{-1}x$.

[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]

ক. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ ২

খ. $g^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + g^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \theta$ হলে দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$ ৪

গ. $f(x) = 1$ সমীকরণটির সমাধান কর যেখানে $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন-৪৪(ক) নং দ্রষ্টব্য।

খ সৃজনশীল ৯(গ) নং দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

$\therefore f(x) = 1$

বা, $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ বা, $x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ যেখানে, n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, $n = 0$ তখন, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}$

যখন, $n = 1$ তখন,

$x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

যখন, $n = -1$ তখন,

$x = -2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, -2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ দৃশ্যকল্প-১: $2P = \sin^{-1}Q - \cos^{-1}R$

দৃশ্যকল্প-২: $4\cos\theta\cos2\theta\cos3\theta = 1$

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. মান নির্ণয় কর : $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$. ২

খ. যদি $P = \tan^{-1}x$, $Q = \frac{2a}{1+a^2}$ এবং $R = \frac{1-b^2}{1+b^2}$ হয়, তবে দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $x = \frac{a-b}{1+ab}$। ৪

গ. $(0, \pi)$ ব্যবধিতে দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}4) + \sec^2(\sec^{-1}3) - 1$

$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}4)\}^2 + \{\sec(\sec^{-1}3)\}^2 - 1$

$= 1 + 4^2 + 3^2 - 1$

$= 16 + 9$

$= 25$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \tan^{-1}x$, $Q = \frac{2a}{1+a^2}$ এবং $R = \frac{1-b^2}{1+b^2}$

$\therefore 2P = \sin^{-1}Q - \cos^{-1}R$

বা, $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}$

বা, $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2\tan^{-1}x$

বা, $2\tan^{-1}a - 2\tan^{-1}b = 2\tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}a - \tan^{-1}b = \tan^{-1}x$

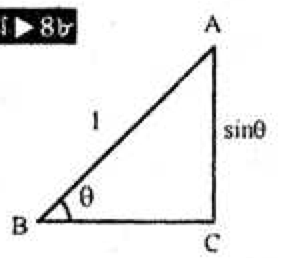
বা, $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} = \tan^{-1}x$

বা, $\frac{a-b}{1+ab} = x$

∴ $x = \frac{a-b}{1+ab}$ (দেখানো হলো)

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৮

প্রশ্ন ▶ ৪৮



[এস.সি একাডেমী (মডেল স্কুল ও কলেজ), গোলাপগঞ্জ, সিলেট]

ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং কী— ব্যাখ্যা কর। ২

খ. যদি $\sin(\pi.BC) = \cos(\pi.AC)$ হয় তবে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ ৪

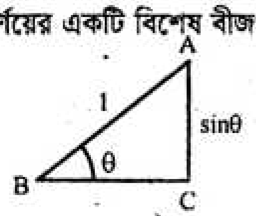
গ. যদি $\sqrt{3}.BC + AC = 1$ হয় তবে $-2\pi < \theta < 2\pi$ সীমার মধ্যে θ এর মানগুলো বের কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম :** সর্বনিম্ন বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জনের লক্ষ্যে কোনো পরিকল্পনাকে উদ্দেশ্য ফাংশন, সিদ্ধান্ত চলক ও শর্ত বা সীমাবদ্ধতা এই তিনটি তথ্যকে ক্যান্টোরোভিচের নিয়মে গাণিতিক মডেলে রূপদান করলে যে গাণিতিক সমস্যা পাওয়া যায় তাকে **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম** বলা হয়।

অন্যকথায়, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম হচ্ছে কোনো শর্তাধীনে ও সীমাবদ্ধতায় একাধিক স্বাধীন চলকের রৈখিক অসমতা ও অভীষ্ট ফাংশন গঠনের মাধ্যমে সবচেয়ে সুবিধাজনক মানের জন্য স্বাধীন চলকগুলির নির্দিষ্ট মান নির্ণয়ের একটি বিশেষ বীজগণিতীয় পদ্ধতি।

খ



ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $AC = \sin\theta$

$AB = 1$ এবং $\angle ABC = \theta$

∴ পিথাগোরাসের সূত্রানুরে,

$BC^2 = AB^2 - AC^2$

বা, $BC^2 = 1^2 - \sin^2\theta$

বা, $BC^2 = 1 - \sin^2\theta$

বা, $BC^2 = \cos^2\theta$

∴ $BC = \cos\theta$

∴ প্রদত্ত সমীকরণ,

$\sin(\pi . BC) = \cos(\pi . AC)$

বা, $\sin(\pi . \cos\theta) = \cos(\pi.\sin\theta)$

বা, $\sin(\pi\cos\theta) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right\}$

বা, $\pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta$

বা, $\cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $(\cos\theta \pm \sin\theta)^2 = \frac{1}{4}$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta \pm 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $1 \pm \sin 2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\pm\sin 2\theta = -\frac{3}{4}$

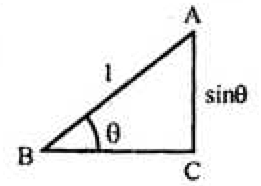
বা, $\sin 2\theta = \pm\frac{3}{4}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\left(\pm\frac{3}{4}\right)$

∴ $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ (দেখানো হলো)

গ এখানে, $AB = 1$, $AC = \sin\theta$

$BC = \cos\theta$



প্রদত্ত সমীকরণ,

$\sqrt{3} . BC + AC = 1$

বা, $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{6} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\theta - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

∴ $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা। যখন, $n = 0$ তখন,

$\theta = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}$

যখন, $n = 1$ তখন, $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= 2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

যখন, $n = -1$ তখন, $x = -2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= -2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, -2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= -\frac{3\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$

∴ নির্ণেয় সমাধান $\theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}$

প্রশ্ন ▶ ৪৯ $f(x) = \cos x$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং $g(x) = \cos^{-1}x$ একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন। *[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]*

ক. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(\varphi) + \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sqrt{2}$ হলে $0 < \varphi < \pi$ ব্যবধিতে φ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে $g\left(\frac{x}{a}\right) + g\left(\frac{y}{b}\right) = \varphi$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\varphi + 2\frac{xy}{ab}\cos\varphi$. ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন-৪৪ (ক) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৫

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$f(\varphi) = \cos\varphi$

∴ $f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(\varphi) + \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sqrt{2}$

বা, $\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi = \sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\varphi\cos\frac{\pi}{3} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

বা, $\varphi - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

বা $\varphi = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

বা, $\varphi = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}, 2n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

সুতরাং $\varphi = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\varphi = \frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$

$n = 1$ হলে, $\varphi = \frac{31\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}$

$\therefore\ 0 < \varphi < \pi$ ব্যবধির মধ্যে $\varphi = \frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-৯(গ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২৮

প্রশ্ন ▶ ৫০ $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ এবং $g(x) = \tan^{-1}x$ দুইটি সমীকরণ

[সরকারি বি এল কলেজ, খুলনা]

ক. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ এর মানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। ২

খ. $p = \text{cosec}(g(x)) - \tan\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$ হলে দেখাও যে, $2g(p) = g(x)$ ৪

গ. $-2\pi \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে $f(x) - 1 = 0$ এর সকল সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3+2}{6}}{\frac{6-1}{6}} = \tan^{-1}\frac{5}{5} = \tan^{-1}1 = 45°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \tan^{-1}x$

$p = \text{cosec}\,(g(x)) - \tan\left\{\frac{\pi}{2} - g(x)\right\}$

$= \text{cosec}\,(\tan^{-1}x) - \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right)$

$= \text{cosec}\,(\tan^{-1}x) - \cot(\tan^{-1}x)$

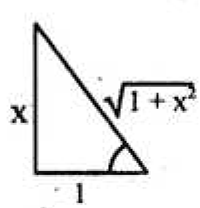
দেখাতে হবে, $2g(p) = g(x)$

বা, $2\tan^{-1}\{\text{cosec}\,(\tan^{-1}x) - \cot(\tan^{-1}x)\} = \tan^{-1}x$

বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\left\{\text{cosec}\left(\text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) - \cot\left(\cot^{-1}\frac{1}{x}\right)\right\}$ [নিচের চিত্র হতে]

$= 2\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right\}$

$= 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$



$= \tan^{-1}\frac{2\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}}{1-\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}^2}$

$= \tan^{-1}\frac{2\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}}{\frac{x^2-1-x^2+2\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}} = \tan^{-1}\frac{\frac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x}}{\frac{2\sqrt{1+x^2}-2}{x^2}}$

$= \tan^{-1}2\left\{\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)}{x} \times \frac{x^2}{2(\sqrt{1+x^2}-1)}\right\}$

$= \tan^{-1}x =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল-৪৬(গ) নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৬

প্রশ্ন ▶ ৫১ **দৃশ্যকল্প-১:** $f(\theta) = \text{cosec}\theta, \phi(\theta) = \sec\theta$,

দৃশ্যকল্প-২: $\cos P = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin R = \frac{3}{5}, \tan S = \frac{1}{3}$

[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]

ক. $\sec^2(\tan^{-1}3) + \text{cosec}^2(\cos^{-1}5)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-২ হতে $P - \frac{1}{2}R + S$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{\sqrt{3}}{f(\theta)} - \frac{1}{\phi(\theta)} = 2$ এর সমাধান কর; যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$. ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sec2(\tan^{-1}3) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}5)$
$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}3)\}^2 + 1 + \{\cot(\cot^{-1}5)\}^2$
$= 1 + (3)^2 + 1 + (5)^2$
$= 1 + 9 + 1 + 25$
$= 36$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\cos P = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ P = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin R = \frac{3}{5}$

$\therefore\ R = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

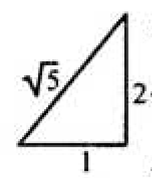
এবং $\tan S = \frac{1}{3}$

$\therefore\ S = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$\therefore\ P - \frac{1}{2}R + S = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$



ধরি, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \theta$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = \frac{2}{1}$ বা, $\theta = \tan^{-1}2$

বা, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}2$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\right)$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= \tan^{-1}2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(\theta) = \text{cosec}\theta, \phi(\theta) = \sec\theta$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{f(\theta)} - \frac{1}{\phi(\theta)} = 2$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{\text{cosec}\theta} - \frac{1}{\sec\theta} = 2$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 1$ [উভয়পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

বা, $\theta - \frac{\pi}{6} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, $n = 0$, তখন $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

যখন, $n = -1$, তখন $\theta = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{-4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান, $\theta = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

★ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মুখ্যমান

১. $\tan^{-1}(-1)$ এর মুখ্য মান নিচের কোনটি? (সহজ)

ⓚ $45°$ ⓚⓗ $135°$

ⓖ $-45°$ ⓖⓗ $-135°$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\tan^{-1}(-1)$ এর নূন্যতম সংখ্যা মান $-45°$

২. $\cos^{-1}x$ এর মূখ্যমানের সীমা কোনটি? (সহজ)

ক $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ খ $0 \le x \le \pi$

গ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ঘ $0 \le x \le \pi$ **খ**

৩. $\tan^{-1} 8$ ও $\tan^{-1}\frac{9}{7}$ এর মুখ্যমানের সমষ্টি নির্ণয় কর। (সহজ)

ক $-\frac{\pi}{4}$ খ $\frac{\pi}{4}$

গ $-\frac{3\pi}{4}$ ঘ $\frac{3\pi}{4}$ **ঘ**

৪. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ কে নিচের কোনটির সাহায্য প্রকাশ করা যায়? (সহজ)

ক $\sin^{-1}x$ খ $\cos^{-1}x$

গ $\tan^{-1}x$ ঘ $\cot^{-1}x$ **ক**

৫. $\tan^{-1}\left(-\frac{y}{x}\right)$ এর মুখ্যমান নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ খ $\pi - \tan^{-1}\frac{y}{x}$

গ $\tan^{-1}\frac{y}{x} - \pi$ ঘ $-\tan^{-1}\frac{y}{x}$ **খ**

৬. $4\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}3\right)$ এর মূখ্যমান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{\pi}{2}$ খ π

গ $\frac{3\pi}{2}$ ঘ 2π **খ**

৭. $\tan\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ = কত? (মধ্যম)

ক -1 খ 1

গ $-\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{1}{2}$ **খ**

৮. $\tan\theta = k$ হলে k এর সীমা কোনটি? (সহজ)

ক $-1 < k < 1$ খ $-1 \le k \le 1$

গ $-\infty < k < \infty$ ঘ $-\infty \le k \le \infty$ **ঘ**

৯. $x = \sqrt{3}$ হলে—

i. $\sin^{-1}x$ এর মান অসজ্ঞায়িত

ii. $\cos^{-1}x$ এর মান অসজ্ঞায়িত

iii. $\tan^{-1}x$ এর মান অসজ্ঞায়িত

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১০. $\tan^{-1}x$ এর মূখ্যমান–

i. প্রথম চতুষ্কোণে অবস্থিত

ii. দ্বিতীয় চতুষ্কোণে অবস্থিত

iii. তৃতীয় চতুষ্কোণে অবস্থিত

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

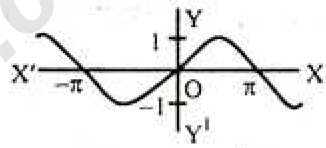
★★ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও লেখচিত্র

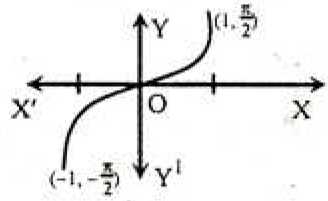
১১. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{1}{2}\right) = ?$ (মধ্যম)

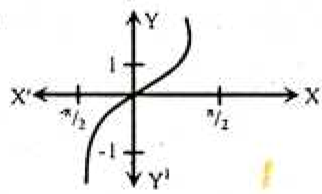
ক 0 খ $\frac{1}{2}$

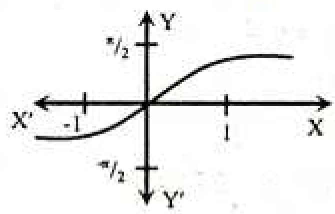
গ $-\infty$ ঘ অসংজ্ঞায়িত **ঘ**

১২. $y = \sin^{-1}x$ ফাংশনের লেখচিত্র নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক 

খ 

গ 

ঘ 

খ

১৩. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{5}{6}$ খ 0

গ 1 ঘ $\frac{6}{5}$ **গ**

১৪. $2\tan^{-1}2 = ?$ (মধ্যম)

ক $\tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$ খ $\tan^{-1}3$

গ $\cot^{-1}\frac{1}{3}$ ঘ $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $2\tan^{-1}2 = \tan^{-1}\frac{2.2}{1-(2)^2} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-3}\right)$

১৫. $\sin \cot^{-1} \tan \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{3}{4}$ (খ) $\frac{3}{5}$
(গ) $\frac{4}{3}$ (ঘ) $\frac{4}{5}$ **ক**

১৬. $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18} = ?$ (মধ্যম)

(ক) $\cot^{-1}\frac{1}{3}$ (খ) $\cos^{-1}3$
(গ) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ (ঘ) $\sin^{-1}3$ **গ**

১৭. $\tan(\tan^{-1}(\sqrt{3})) = ?$ (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) $\sqrt{3}$
(গ) 1 (ঘ) $1/\sqrt{3}$ **খ**

১৮. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}3\right) = ?$ (মধ্যম)

(ক) 1 (খ) 0
(গ) ∞ (ঘ) $\sqrt{3}$ **গ**

১৯. ΔABC এ $A = \tan^{-1} 2$; $B = \tan^{-1} 3$ হলে C কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{\pi}{4}$ (খ) $\frac{\pi}{2}$
(গ) $\frac{3\pi}{2}$ (ঘ) π **ক**

ব্যাখ্যা: $A + B = \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$

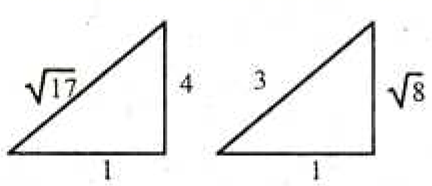
$= \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore C = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

২০. $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$ এর মান কত? (সহজ)

(ক) $\sqrt{7}$ (খ) 5
(গ) 12 (ঘ) 25 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$



$= \sec^2\left(\sec^{-1}\frac{\sqrt{17}}{1}\right) + \tan^2\left(\tan^{-1}\sqrt{8}\right)$

$= (\sqrt{17})^2 + (\sqrt{8})^2 = 25$

২১. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\left(A + \frac{9}{25}\right)$ হলে A এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{3}{5}$ (খ) $\frac{4}{5}$
(গ) $\frac{9}{25}$ (ঘ) $\frac{16}{25}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}\right)$

$= \sin^{-1} 1$

$\therefore A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

২২. $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2y^2 - 1)$ এ $x = \frac{1}{2}$ হলে y এর মান কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(গ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ঘ) 1 **ক**

ব্যাখ্যা: $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$

২৩. $n\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{nx - x^n}{1 - nx^2}$ হলে n এর মান কোনটি? (কঠিন)

(ক) 1 (খ) 2
(গ) 3 (ঘ) 4 **গ**

ব্যাখ্যা: $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

২৪. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{5/6}{x}$ হলে x এর মান কোনটি? (সহজ)

(ক) $\frac{5}{6}$ (খ) $\frac{1}{2}$
(গ) $\frac{1}{3}$ (ঘ) $\frac{1}{6}$ **ক**

২৫. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $x = \frac{1}{y}$ (খ) $xy = 0$
(গ) $\frac{x}{y} = \alpha$ (ঘ) $x = y$ **ঘ**

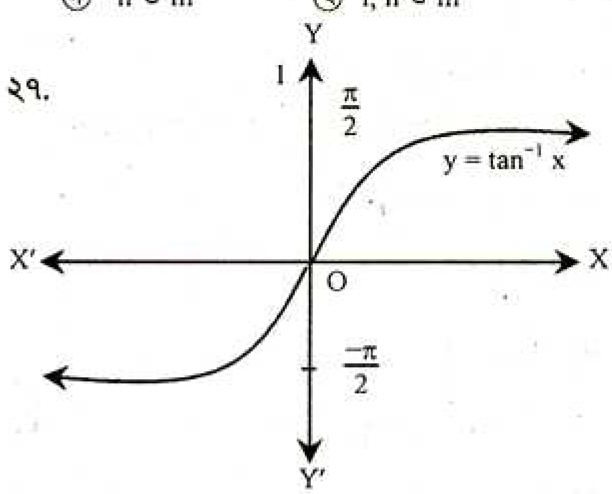
২৬. $\text{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ সম্পর্কটি সত্য হবে যখন–

i. $x \le -1$
ii. $x \ge 1$
iii. $-1 \le x \le 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

২৭.



চিত্রের —

i. ফাংশনের ডোমেন $(-\infty, \infty)$

ii. ফাংশনের রেঞ্জ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে অবস্থিত

iii. নির্দিষ্ট ব্যবধিতে y একটি বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

২৮. $f(x) = \cos^{-1}x$ হলে —

i. $f(x) = \sec^{-1}\frac{1}{x}$

ii. $f(x) = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

iii. $f(0) = \frac{\pi}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (২৯ ও ৩০) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$P(x, y) = \cos^{-1}x + \cos^{-1}y$ বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন

২৯. $P(x, y) = \frac{\pi}{2}$ হলে $x^2 + y^2$ এর মান কত? (সহজ)

ক 0 খ 1

গ −1 ঘ $\frac{3}{2}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}\right\} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2} = \cos\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (xy)^2 = (1-x^2)(1-y^2)$

$\Rightarrow x^2y^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

৩০. P(0, 0) এর মান কোনটি? (সহজ)

ক 0 খ $\frac{\pi}{3}$

গ $\frac{\pi}{2}$ ঘ π **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৩১ ও ৩২) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$p(r) = 2\sin^{-1}r$

৩১. $p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ এর মান কোনটি? (সহজ)

ক 0° খ 30°

গ 45° ঘ 90° **ঘ**

৩২. p(r) নিচের কোনটির সমান? (মধ্যম)

ক $\sin\left(2r\sqrt{1-r^2}\right)$ খ $\sin^{-1}\left(2\sqrt{1-r^2}\right)$

গ $\sin^{-1}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ ঘ $\sin^{-1}\sqrt{2r(1-r^2)}$ **ক**

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৩৩ ও ৩৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}(xy - A)$

৩৩. $x^2 + y^2 = 1$ হলে A এর মান কত? (কঠিন)

ক 0 খ 1

গ xy ঘ x + y **গ**

৩৪. $x = \frac{1}{3}$ এবং $y = \frac{1}{4}$ হলে A এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{12}$ খ $\frac{7}{12}$

গ $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ঘ $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{2}}{6}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\cos^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\frac{1}{4}$

$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{3.4} - \sqrt{1-\frac{1}{9}}.\sqrt{1-\frac{1}{16}}\right)$

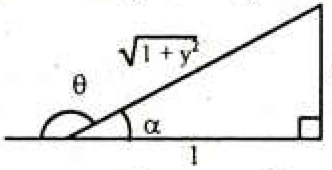
$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{8}}{3}.\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{30}}{6}\right)$

$= \cos^{-1}(xy - A)$

$\therefore A = \frac{\sqrt{30}}{6}$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৩৫ ও ৩৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৩৫. α–কোণের মান নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $\sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)$ খ $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

গ $\tan^{-1}y$ ঘ $\text{cosec}^{-1}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ **গ**

৩৬. θ-কোণের মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

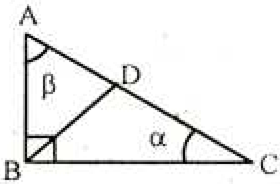
ক $\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)$

খ $\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

গ $\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}y$

ঘ $\frac{\pi}{2} + \text{cosec}^{-1}\sqrt{1+y^2}$ **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৩৭ ও ৩৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৩৭. $\beta = \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$ হলে α কত? (মধ্যম)

(ক) $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ (খ) $\tan^{-1}\frac{3}{2}$

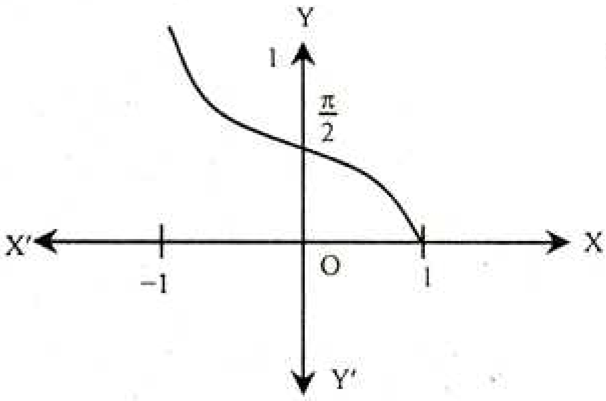
(গ) $\sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$ (ঘ) $\sec^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$ **ক**

৩৮. $\angle ABD = 2\tan^{-1}\frac{1}{2}$ হলে $\angle CBD$ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (খ) $\cos^{-1}\frac{3}{5}$

(গ) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}$ (ঘ) $2\tan^{-1}\frac{1}{2}$ **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৩৯ ও ৪০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৩৯. উপরের লেখচিত্রটি কোন ফাংশনের লেখচিত্র —— (সহজ)

(ক) $y = \sin^{-1}x$ (খ) $y = \cos^{-1}x$

(গ) $y = \tan^{-1}x$ (ঘ) $y = \sec^{-1}x$ **খ**

৪০. উপরের লেখচিত্রটির y এর মুখ্যমান কত? (সহজ)

(ক) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (খ) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(গ) $(0, \pi)$ (ঘ) $[0, \pi]$ **ঘ**

★★ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান

৪১. $\sin\theta = -1$ হলে θ এর সাধারণ মান কত? (সহজ)

(ক) $\frac{-\pi}{2}$ (খ) $\frac{\pi}{2}$

(গ) $(4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

(ঘ) $(4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ **ঘ**

৪২. $2(\cos x + \sec x) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান —— (কঠিন)

(ক) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (খ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(গ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (ঘ) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ **খ**

৪৩. $p(\theta) = \sec\theta$, $p(\theta) = p(\alpha)$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ হলে θ এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $2n\pi \pm \alpha$ (খ) $n\pi + \alpha$

(গ) $n\pi \pm \alpha$ (ঘ) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ **ক**

৪৪. $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত হলে θ এর সাধারণ মান —— (মধ্যম)

(ক) $2n\pi + \pi$

(খ) $(2n-1)\pi$

(গ) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$

(ঘ) $(2n-1)\frac{\pi}{2}$, সকল $n \in \mathbb{Z}$ **গ**

৪৫. $\cos 3x = -1$ হলে $x = ?$ (মধ্যম)

(ক) $(2n+1)\frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$

(খ) $(2n+1)\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

(গ) $(2n+1)\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

(ঘ) $(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\cos 3x = -1$

বা, $3x = (2n+1)\pi$ বা, $x = (2n+1)\frac{\pi}{3}$

৪৬. নিচের কোনটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ? (সহজ)

(ক) $x \sin 30° + 2 = 0$

(খ) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

(গ) $3\sin\theta + 2 = 0$

(ঘ) $2x + 3y = 9$ **গ**

৪৭. $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ সমীকরণের অবান্তর মূল কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\frac{7\pi}{12}$ (খ) $\frac{\pi}{12}$

(গ) $-\frac{7\pi}{12}$ (ঘ) $-\frac{17\pi}{12}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\theta = -\frac{7\pi}{12}$ হলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

৪৮. $\theta = (2n+1)\pi$ কোন ফাংশনের সমাধান? (সহজ)

(ক) $\cos\theta = 1$ (খ) $\cos\theta = -1$

(গ) $\cos\theta = 0$ (ঘ) $\cos\theta = k$ **খ**

৪৯. $f(\theta) = \sin\theta$–

i. একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

ii. ফাংশনটির ডোমেন $\mathbb{R}$

iii. θ এর মান $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $f(\theta)$ এর মুখ্যমান পাওয়া যায়

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৫০ ও ৫১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\sin\theta = k$ সমীকরণের সমাধান $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

৫০. $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে θ এর মান কোনটি? (সহজ)

ক) 0 খ) $\frac{\pi}{2}$

গ) $\frac{3\pi}{4}$ ঘ) $\frac{3\pi}{2}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $n = 1$ হলে $\theta = \frac{3\pi}{4}$

৫১. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ হলে k এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক) 0 খ) $-\frac{1}{2}$

গ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **গ**

★ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধান

৫২. $\sin x - \cos x = 0$ এবং $0° \le x \le 90°$ হলে x এর মান কত? (সহজ)

ক) $0°$ খ) $45°$

গ) $90°$ ঘ) $60°$ **খ**

৫৩. $\sin\theta - 2 = \cos 2\theta$ হলে $\theta = ?$ (কঠিন)

ক) $(4n + 1)\frac{\pi}{2}$ খ) $(4n - 1)\frac{\pi}{3}$

গ) $(2n + 1)\pi$ ঘ) $2n\pi$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\sin\theta - 2 = \cos 2\theta$

বা, $\sin\theta - 2 = 1 - 2\sin^2\theta$

বা, $2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) + 3(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$

$\therefore$ $\sin\theta - 1 = 0$ বা, $\sin\theta = 1$

$\therefore$ $\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.

৫৪. $\sec\theta = 2, \frac{-\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$, θ এর মান কত? (মধ্যম)

ক) $\frac{\pi}{3}$ খ) $\frac{-\pi}{3}$

গ) $\frac{\pm\pi}{3}$ ঘ) $\frac{\pi}{2}$ **ক**

৫৫. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)$ হলে α এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক) $0, \frac{\pi}{4}$ খ) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

গ) $0, \frac{\pi}{2}$ ঘ) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)$

বা, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)$

বা, $\frac{\pi}{2}\cos\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\sin\alpha$

বা, $\cos\alpha = 1 \pm \sin\alpha$

বা, $\cos^2\alpha \pm 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha = 1$

বা, $\pm\sin 2\alpha = 0$ বা, $2\alpha = n\pi$

$\therefore \alpha = \frac{n\pi}{2}$

$n = 0$ হলে, $\alpha = 0$; $n = 1$ হলে $\alpha = \frac{\pi}{2}$

৫৬. $\sin^{-1}x - \cos^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ হলে x এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

ক) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ খ) $-\frac{1}{2}$

গ) $\frac{1}{2}$ ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **ঘ**

৫৭. $2\cos^2x + \sin x = 2$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? যখন $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ (সহজ)

ক) $\frac{\pi}{6}$ খ) $\frac{13\pi}{6}$

গ) π ঘ) $\frac{3\pi}{2}$ **গ**

৫৮. কোন মানটি $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে? (সহজ)

ক) $\frac{\pi}{2}$ খ) $\frac{\pi}{3}$

গ) $\frac{\pi}{4}$ ঘ) $\frac{\pi}{6}$ **ক**

৫৯. $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি?
যখন $0 \le x \le 2\pi$ (মধ্যম)

ক $\frac{\pi}{4}$ খ π
গ $\frac{\pi}{2}$ ঘ 2π **গ**

৬০. $[0, \pi]$ ব্যবধিতে $\sec^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}$ হলে x কত? (সহজ)

ক $\frac{\pi}{4}$ খ $\frac{5\pi}{4}$
গ $\frac{7\pi}{4}$ ঘ $\frac{11\pi}{4}$ **ক**

৬১. $\sin\theta + \cos\theta = 0$ হলে —
i. θ এর মান $\frac{-\pi}{4}$
ii. সমীকরণের সাধারণ সমাধান $(4n-1)\frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$
iii. সমীকরণের কোনো গ্রহণযোগ্য সমাধান নেই
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: $\tan\theta = -1$
বা, $\tan\theta = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$
$\therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4n\pi - \pi}{4} = (4n-1)\frac{\pi}{4}$

৬২. ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ—
i. $\cos x + \sin x = -1$ এর একটি সমাধান π
ii. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ এর একটি সমাধান $\frac{\pi}{4}$
iii. $\cos x - \sin x = 1$ এর একটি সমাধান $\frac{\pi}{3}$
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৩ ও ৬৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
$f(x) = \cos x + 1$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।

৬৩. $f(x) = 0$ হলে সাধারণ সমাধান কোনটি? (মধ্যম)

ক $x = 0$ খ $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
গ $x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ঘ $x = (2n+1)\pi$ **ঘ**

৬৪. $f(x) = 1$ হলে নিচের কোনটি সত্য? (সহজ)

ক $x = \frac{\pi}{2}$ খ $x = (2n-1)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$
গ $x = 180°$ ঘ $x = 45°$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৫ ও ৬৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
$p(x) = \sin 3x$ একটি বৃত্তীয় ফাংশন।

৬৫. $p(x) = \frac{1}{2}$ হলে, সাধারণ সমাধান কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{3}n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$
খ $\frac{1}{3}n\pi + \frac{\pi}{6}$
গ $\frac{1}{3}n\pi - \frac{\pi}{18}$
ঘ $\frac{1}{3}n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{18}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\sin 3x = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}$
$\therefore 3x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$
$\therefore x = \frac{1}{3}n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{18}$

৬৬. $p\left(\frac{1}{3}x\right) = -1$ হলে x এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{-\pi}{2}$ খ $\frac{\pi}{2}$
গ π ঘ $-\frac{2\pi}{3}$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৭ ও ৬৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \tan x$ এবং $g(x) = \sin^{-1}x$

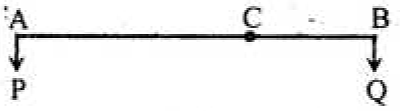
৬৭. $g(y) + g(\sqrt{1-y^2})$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{\pi}{6}$ খ $\frac{\pi}{4}$
গ $\frac{\pi}{3}$ ঘ $\frac{\pi}{2}$ **ঘ**

৬৮. $f(x)\,f(2x) = 1$ হলে x এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক $n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ খ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$
গ $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ ঘ $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ **ক**

অধ্যায়-৮: স্থিতিবিদ্যা

প্রশ্ন ▶ ১ 

/চা. বো. ১৭/

ক. 100N ও 70N মানের দুইটি বলের লব্ধি কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ 62° হলে বল দুইটির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। ২

খ. P কে (R + 3) পরিমাণে এবং Q কে (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, (R + 3) ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $R = S + \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} - 1$. ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত বলদ্বয়ের সমতলে x দূরত্বের ব্যবধানে R মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হলো। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি $\frac{xR}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, বলদ্বয় যথাক্রমে P ও Q, লব্ধি R এবং বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α.

তাহলে, P = 100N

Q = 70N

α = 62°

$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

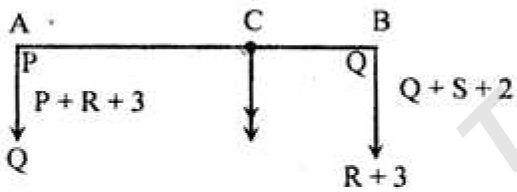
$= \sqrt{(100)^2 + (70)^2 + 2 \times 100 \times 70 \times \cos 62°}$

$= \sqrt{21472.60188} = 146.535$N **(Ans.)**

ধরি, বল P, লব্ধি R এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে।

$\therefore \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ বা, $\tan\theta = \frac{70\sin 62°}{100 + 70\cos 62°}$

বা, $\theta = \tan^{-1}(0.465)$ $\therefore \theta = 24.95°$ **(Ans.)**

খ 

মনে করি, P, Q সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় যথাক্রমে A, B বিন্দুতে ক্রিয়া করছে এবং লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। তাহলে, P.AC = Q.BC ... ... (i)

আবার, P কে (R + 3) পরিমাণে ও Q কে (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

∴ (P + R + 3).AC = (Q + S + 2).BC ... ... (ii)

আবার, P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, (R + 3) ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

∴ Q.AC = (R + 3) BC ... ... (iii)

এখন, (i) নং সমীকরণকে (iii) নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{R+3} = \frac{P-Q}{Q-R-3}$ ... ... (iv)

আবার, (ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

(R + 3) AC = (S + 2) BC ... ... (v)

এখন, (iii) নং সমীকরণকে (v) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{Q}{R+3} = \frac{R+3}{S+2} = \frac{Q-R-3}{R+3-S-2} = \frac{Q-R-3}{R-S+1}$ ... ... (vi)

এখন, (iv) ও (vi) নং হতে পাই,

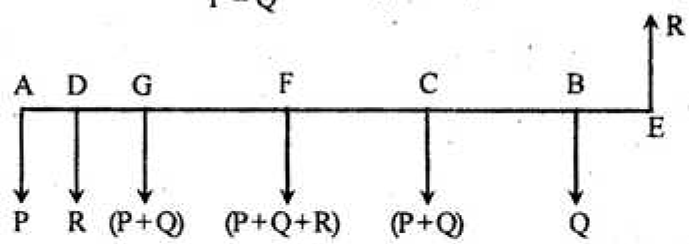
$\frac{P-Q}{Q-R-3} = \frac{Q-R-3}{R-S+1}$

বা, $(P-Q)(R-S+1) = (Q-R-3)^2$

বা, $R - S + 1 = \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q}$

বা, $R = \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} + S - 1$

$\therefore R = S + \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} - 1$ **(প্রমাণিত)**

গ 

মনে করি, AB রেখার A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি (P + Q), C বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

আবার, D ও E বিন্দুতে R মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত।

এখন, D বিন্দুতে R এবং C বিন্দুতে (P + Q) বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q + R), F বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

∴ (P + Q).CF = R.DF ... ... (i)

আবার, F বিন্দুতে (P + Q + R) এবং E বিন্দুতে R মানের অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q), G বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

∴ (P + Q + R).GF = R.EG

বা, (P + Q).GF = R.EG − R.GF = R(EG − GF)

বা, (P + Q).GF = R.EF ... ... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

(P + Q).CF + (P + Q).GF = R.DF + R.EF

বা, (P + Q) (CF + GF) = R.(DF + EF)

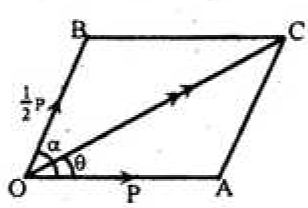
বা, (P + Q).CG = R.DE

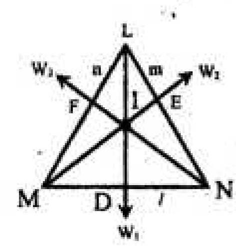
বা, (P + Q)CG = R.x [এখানে, DE = x]

বা, $CG = \frac{xR}{P+Q}$

সুতরাং লব্ধি $\frac{xR}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ২ দৃশ্যকল্প-১: /রা. বো. ১৭/



দৃশ্যকল্প-২: 

LD, ME ও NF যথাক্রমে MN, NL ও LM এর উপর লম্ব।

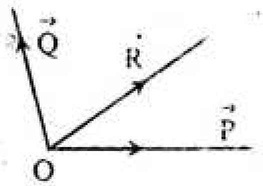
ক. বলের অংশক ও লব্ধি ব্যাখ্যা কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ $\frac{1}{2}\vec{P}$ বলকে কোন বাহু বরাবর স্থানান্তর করা যাবে? যদি বলদ্বয়ের লব্ধি P বলের $\frac{\sqrt{5}}{2}$ গুণ হয় তবে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ ও লব্ধির দিক নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত বলগুলির লব্ধি শূন্য হলে প্রমাণ কর যে, $W_1 = W_2 = W_3$ যখন $l = m = n$. ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক কোনো বস্তুকণার উপর একই সময়ে একাধিক বল কার্যরত হলে, এদের সম্মিলিত ক্রিয়াফল, যদি বস্তুকণার উপর নির্দিষ্ট দিকে একটি মাত্র বলের ক্রিয়াফলের সমান হয়, তবে ঐ একটিমাত্র বলকে উপরোক্ত একাধিক বলের লব্ধি বলে এবং একাধিক বলের প্রত্যেকটিকে লব্ধি বলের অংশক বা উপাংশ বলে। চিত্রে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ বল দুইটির সম্মিলিত ক্রিয়াফল একটি মাত্র $\vec{R}$ বলের ক্রিয়াফলের সমান হলে, $\vec{R}$ কে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি এবং $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ হল $\vec{R}$ এর অংশক বা উপাংশ।



ভেক্টর সংকেতে লব্ধি $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

খ দৃশ্যকল্প-১ এ $\frac{1}{2}\vec{P}$ বলকে AC বাহু বরাবর স্থানান্তর করা যাবে যেহেতু OACB একটি সামান্তরিক।

প্রশ্নমতে, লব্ধির মান $= \frac{\sqrt{5}P}{2}$

$\therefore$ P ও $\frac{1}{2}$P বল দুইটির লব্ধি $= \frac{\sqrt{5}P}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{5}P}{2}\right)^2 = P^2 + \left(\frac{1}{2}P\right)^2 + 2.P.\frac{1}{2}P\cos\alpha$

বা, $\frac{5P^2}{4} = P^2 + \frac{P^2}{4} + P^2\cos\alpha$

বা, $\frac{5P^2}{4} = \frac{5P^2}{4} + P^2\cos\alpha$

বা, $P^2\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = 0$

$\therefore \alpha = 90°$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = 90°$ **(Ans.)**

ধরি, লব্ধি, P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\theta = \frac{\frac{P}{2}\sin\alpha}{P + \frac{P}{2}\cos\alpha}$

বা, $\tan\theta = \frac{\frac{P}{2}\sin 90°}{P + \frac{P}{2}\cos 90°} = \frac{\frac{P}{2}}{P+0} = \frac{P}{2} \times \frac{1}{P}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6°$

$\therefore$ লব্ধি P বলের সাথে 26.6° কোণ উৎপন্ন করে। **(Ans.)**

গ LMN ত্রিভুজের L, M, N কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বভাবে ক্রিয়ারত তিনটি বল W_1, W_2, W_3 এর লব্ধি শূন্য।

লামির সূত্র থেকে পাই,

$\frac{W_1}{\sin FIE} = \frac{W_2}{\sin DIF} = \frac{W_3}{\sin EID}$

বা, $\frac{W_1}{\sin(\pi - L)} = \frac{W_2}{\sin(\pi - M)} = \frac{W_3}{\sin(\pi - N)}$

বা, $\frac{W_1}{\sin L} = \frac{W_2}{\sin M} = \frac{W_3}{\sin N}$ ……… (i)

ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে পাই,

$\frac{l}{\sin L} = \frac{m}{\sin M} = \frac{n}{\sin N}$ ……… (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\frac{W_1}{l} = \frac{W_2}{m} = \frac{W_3}{n}$

আবার, দেওয়া আছে, $l = m = n$

$\therefore W_1 = W_2 = W_3$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৩ [দি. বো. ১৭]



ক. 100N ও 70N মানের দুইটি বলের লব্ধি কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ 62° হলে বল দুইটির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। ২

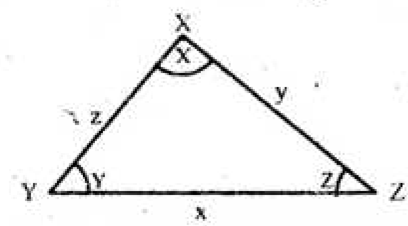
খ. P কে (R + 3) পরিমাণে এবং Q কে (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, (R + 3) ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $R = S + \frac{(Q - R - 3)^2}{P - Q} - 1$. ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত বলদ্বয়ের সমতলে x দূরত্বের ব্যবধানে R মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হলো। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি $\frac{xR}{P + Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্নের ১ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৯

প্রশ্ন ▶ ৪ [কু. বো. ১৭]



P, Q, R বলত্রয় ΔXYZ এর লম্ব কেন্দ্র হতে যথাক্রমে YZ, ZX ও XY বাহুর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় থাকে। আবার বলত্রয় যথাক্রমে X, Y, Z বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়া করে।

ক. "দুইটি সমান বলের লব্ধি তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে"—উক্তিটির সত্যতা যাচাই কর। ২

খ. উদ্দীপকের বলত্রয়ের সাম্যাবস্থায় থাকার ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, P ঃ Q ঃ R = x ঃ y ঃ z ৪

গ. উদ্দীপকের বলত্রয় সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করার ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, P ঃ Q ঃ R = x ঃ y ঃ z ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বল $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি $\vec{R}$, $\vec{P}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে আমরা পাই,

লব্ধির দিক, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}\right)$

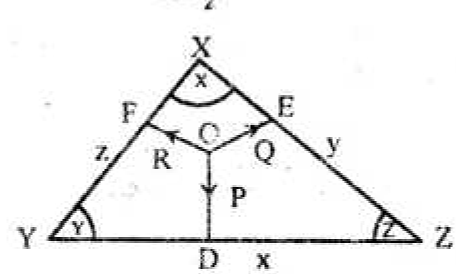
ধরি, P = Q = x

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{x\sin\alpha}{x + x\cos\alpha} = \tan^{-1}\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$= \tan^{-1}\frac{\sin\left(2.\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(2.\frac{\alpha}{2}\right)} = \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ (প্রমাণিত)

খ



ΔXYZ-এর লম্বকেন্দ্র O বিন্দু থেকে YZ, ZX, XY বাহুর উপর OD, OE, OF লম্ব তিনটি বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল যথাক্রমে P, Q, R। বলত্রয় সাম্যবস্থায় থাকলে লামির সূত্র থেকে আমরা পাই,

$\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin EOD}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - X)} = \frac{Q}{\sin(\pi - Y)} = \frac{R}{\sin(\pi - Z)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin X} = \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\sin Z} \;\ldots\ldots (i)$$

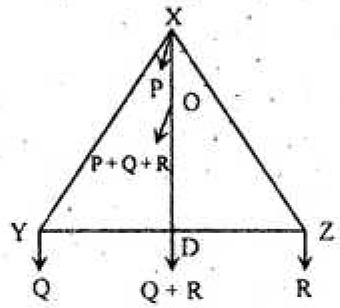
ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে, $\frac{x}{\sin X} = \frac{y}{\sin Y} = \frac{z}{\sin Z} = \frac{1}{k}$ (ধরি)

$$\Rightarrow \sin X = kx, \sin Y = ky, \sin Z = kz$$

(i) থেকে পাই, $\frac{P}{kx} = \frac{Q}{ky} = \frac{R}{kz}$

$\therefore$ P ঃ Q ঃ R = x ঃ y ঃ z (প্রমাণিত)

গ



মনে করি, ΔXYZ-এর অন্তঃকেন্দ্র O এবং বর্ধিত XO রেখা YZ কে D বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং $\angle X$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক XD। অর্থাৎ

$\angle YXD = \angle ZXD = \frac{1}{2}\angle X$

এখন, Y ও Z বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R এর লব্ধি (Q + R), YZ রেখাস্থ কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার বলত্রয়ের লব্ধি O বিন্দুতে এবং P বলটি X বিন্দুতে ক্রিয়া করে। কাজেই (Q + R) বলটি XD রেখার কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। সুতরাং Q ও R এর লব্ধি YZ ও XD এর ছেদবিন্দু D তে অবশ্যই কার্যকর হবে।

$\therefore$ $Q \times YD = R \times ZD \Rightarrow \frac{YD}{ZD} = \frac{R}{Q} \;\ldots\ldots (i)$

আবার, ΔXYD থেকে,

$$\frac{YD}{\sin YXD} = \frac{XD}{\sin XYD} \Rightarrow \frac{YD}{\sin\frac{1}{2}X} = \frac{XD}{\sin Y} \;\ldots\ldots (ii)$$

তদ্রূপ ΔXZD হতে,

$$\frac{ZD}{\sin ZXD} = \frac{XD}{\sin XZD} \Rightarrow \frac{ZD}{\sin\frac{1}{2}X} = \frac{XD}{\sin Z} \;\ldots\ldots (iii)$$

(ii) ÷ (iii) হতে, $\frac{YD}{ZD} = \frac{\sin Z}{\sin Y} \;\ldots\ldots (iv)$

(i) ও (iv) হতে, $\frac{R}{Q} = \frac{\sin Z}{\sin Y} \Rightarrow \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\sin Z}$

অনুরূপভাবে, $\frac{P}{\sin X} = \frac{R}{\sin Z}$

সুতরাং, $\frac{P}{\sin X} = \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\sin Z}$

অর্থাৎ, P ঃ Q ঃ R = sinX ঃ sinY ঃ sinZ

ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে আমরা জানি,

$$\frac{X}{\sin X} = \frac{Y}{\sin Y} = \frac{Z}{\sin Z} = \frac{1}{k} \text{ (ধরি)}$$

$\Rightarrow \sin X = kx, \sin Y = ky, \sin Z = kz$

অতএব, $\frac{P}{\sin X} = \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\sin Z} \Rightarrow \frac{P}{kx} = \frac{Q}{ky} = \frac{r}{kz}$

$\therefore$ P ঃ Q ঃ R = x ঃ y ঃ z (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৫ দৃশ্যকল্প-১ : /চ. বো. ১৭/

ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 5, 7, 9 একক মানের তিনটি বল ক্রিয়ারত।

দৃশ্যকল্প-২ :

8 মিটার দীর্ঘ 12kg ওজনের একটি সুষম তক্তা দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি খুঁটি A প্রান্ত এবং অন্যটি B প্রান্ত হতে 1 মিটার ভিতরে অবস্থিত।

ক. 8N ও 5N মানের দুইটি বল 60° কোণে ক্রিয়ারত। বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে বলত্রয়ের লব্ধি নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে একজন বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌছালে বালকের ওজন কত? ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, 8N ও 5N মানের বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ 60°।

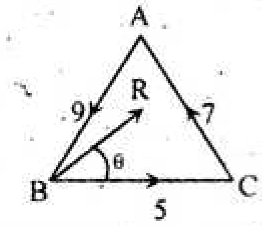
বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে, $R = \sqrt{8^2 + 5^2 + 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ}$

$$= \sqrt{64 + 25 + 80 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{64 + 25 + 40}$$

$$= \sqrt{129}\text{N } \textbf{(Ans.)}$$

খ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর BC, CA ও AB বাহুর সমান্তরালে ক্রিয়ারত যথাক্রমে 5, 7 ও 9 একক মানের বল তিনটির লব্ধি R বল 5 একক মানের বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



এখন 5 একক মানের বল বরাবর এবং এর উপর লম্বরেখা বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 5\cos 0^\circ + 7\cos(180^\circ - 60^\circ) + 9\cos(180^\circ + 60^\circ)$

$= 5 - 7\cos 60^\circ - 9\cos 60^\circ$

$= 5 - 7 \cdot \frac{1}{2} - 9 \cdot \frac{1}{2} = -3 \;\ldots\ldots (i)$

এবং $R\sin\theta = 5\sin 0^\circ + 7\sin(180^\circ - 60^\circ) + 9\sin(180^\circ + 60^\circ) = 7\sin 60^\circ - 9\sin 60^\circ$

$$= 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \;\ldots\ldots (ii)$$

এখন, $(i)^2 + (ii)^2$ থেকে পাই,

$R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = (-3)^2 + (-\sqrt{3})^2$

বা, $R^2 = 9 + 3$

বা, $R^2 = 12$

$\therefore R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

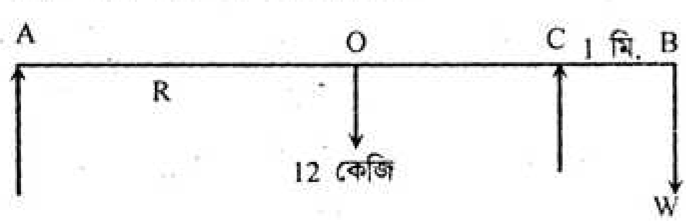
$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি, $R = 2\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

গ মনে করি, 12 কেজি ওজনের AB সমরূপ তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। একটি অবলম্বন A বিন্দুতে এবং অপর অবলম্বন B বিন্দু থেকে 1 মিটার ভিতরে C বিন্দুতে অবস্থিত।

$\therefore$ AB = 8 মিটার, $AO = BO = \frac{8}{2} = 4$ মিটার

BC = 1 মিটার।

OC = OB − BC = 4 − 1 = 3 মিটার।



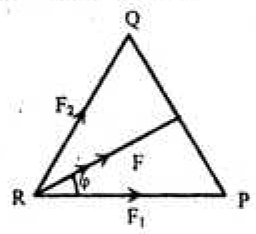
ধরি, বালকটির ওজন W, যা B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

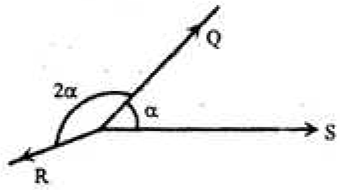
যেহেতু বালকটি তক্তাটিকে না উল্টিয়ে B বিন্দুতে পৌছাতে সক্ষম। তক্তাটি সুস্থিত থাকবে যদি 12 কেজি ও W ওজনদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore$ 12.OC = W.BC বা, 12 × 3 = W.1 বা, W = 36 কেজি

$\therefore$ বালকটির ওজন 36 কেজি। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ দৃশ্যকল্প-১: দৃশ্যকল্প-২: [সি. বো. ১৭]





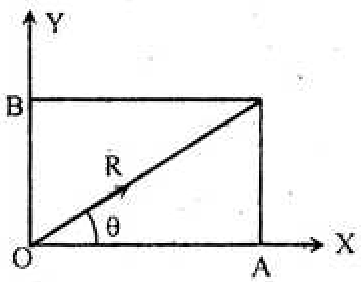
ক. বলের লম্বাংশ কী ব্যাখ্যা কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ $F_1 \propto \cos P$, $F_2 \propto \cos Q$ এবং F_1, F_2 এর লব্ধি F হলে দেখাও যে, $R - \varphi = \frac{1}{2}(R + Q - P)$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ Q, R, S বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $S^2 = R(R - Q)$ ৪

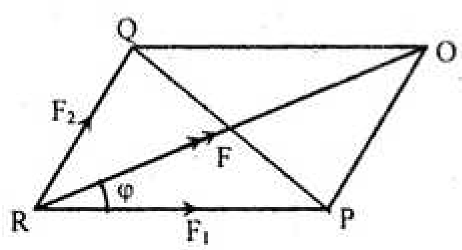
৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি প্রদত্ত বলকে এর উভয় পার্শ্বে α, β দুইটি নির্দিষ্ট কোণে আনত রেখা বরাবর দুইটি অংশক বলে বিভাজন করা যায়। α ও β এর মান পরিবর্তন করে প্রত্যেকবার এক জোড়া অংশক বল নির্ণয় করা যায়, যখন $(\alpha + \beta) < 180°$. যদি $\alpha + \beta = 90°$ হয়, অর্থাৎ অংশক বল দুইটি যখন পরস্পর লম্ব হয় তখন ঐ অংশকদ্বয়কে প্রদত্ত বলের লম্বাংশ বলে। সুতরাং লম্বাংশ হল অংশকের একটি বিশেষ অবস্থা অর্থাৎ সকল লম্বাংশই অংশক কিন্তু সকল অংশক লম্বাংশ নয়।



মনে করি, পরস্পর লম্বরেখা OX ও OY বরাবর প্রদত্ত বল R এর লম্বাংশ নির্ণয় করতে হবে। R বলটিকে $\overrightarrow{OC}$ রেখাংশ দ্বারা সূচিত করি। OC রেখা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। এখন θ থেকে CA ⊥ OX ও CB ⊥ OY অঙ্কন করি। তাহলে OACB একটি আয়ত এবং OA ও OB হল R বলের লম্বাংশ।

খ দৃশ্যকল্প-১ এ OPRQ সামান্তরিকটি পূর্ণ করি।



ধরি, $F_1 = K\cos P$

$F_2 = K\cos Q$

F_1 ও F_2 এর মধ্যবর্তী কোণ R এবং লব্ধি F.

$\therefore F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos R$

$= K^2\cos^2P + K^2\cos^2Q + 2K\cos P.K\cos Q.\cos R$

$= K^2\cos^2P + K^2\cos^2Q + 2K^2\cos P.\cos Q.\cos R$

$= K^2(\cos^2P + \cos^2Q + \cos^2R + 2\cos P.\cos Q.\cos R - \cos^2R)$

$= K^2(1 - \cos^2R)$ [∵ $P + Q + R = \pi$ হলে, $\cos^2P + \cos^2Q + \cos^2R + 2\cos P.\cos Q.\cos R = 1$]

$= K^2\sin^2R$

$\therefore \quad F = K\sin R$

এখন, $\tan\varphi = \frac{F_2\sin R}{F_1 + F_2\cos R}$

বা, $\tan\varphi = \frac{K\cos Q.\sin R}{K\cos P + K\cos Q\cos R}$

$= \frac{\cos Q.\sin R}{\cos P + \cos Q.\cos R}$

$= \frac{\cos Q.\sin R}{\cos\{180° - (Q + R)\} + \cos Q\cos R}$

[দৃশ্যকল্প-১ এ, $P + Q + R = 180°$]

$= \frac{\cos Q.\sin R}{-\cos(Q + R) + \cos Q\cos R}$

$= \frac{-\cos Q\sin R}{(\cos Q\cos R - \sin Q\sin R) + \cos Q.\cos R}$

$= \frac{\cos Q\sin R}{-\cos Q\cos R + \sin Q\sin R + \cos Q\cos R}$

$= \frac{\cos Q\sin R}{\sin Q\sin R}$

$\therefore \tan\varphi = \cot Q = \tan\left(\frac{\pi}{2} - Q\right)$

বা, $\varphi = \frac{\pi}{2} - Q$

বা, $\varphi = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2} + \frac{R}{2} - Q$

$\therefore \varphi = \frac{P}{2} + \frac{R}{2} - \frac{Q}{2}$

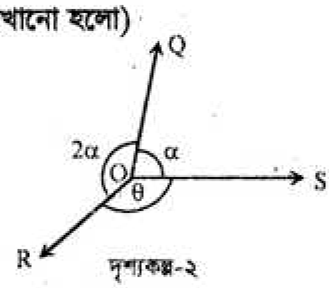
$\therefore R - \varphi = R - \left(\frac{P}{2} + \frac{R}{2} - \frac{Q}{2}\right)$

$= R - \frac{P}{2} - \frac{R}{2} + \frac{Q}{2}$

$= \frac{R}{2} + \frac{Q}{2} - \frac{P}{2}$

$= \frac{1}{2}(R + Q - P)$ **(দেখানো হলো)**

গ



$\angle QOS = \alpha$

$\angle QOR = 2\alpha$

$\angle ROS = \theta$

এখানে, $\theta + \alpha + 2\alpha = 2\pi$

বা, $\theta = 2\pi - 3\alpha$

যেহেতু Q, R, S বলত্রয় O বিন্দুতে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে, সেহেতু লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$\frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin 2\alpha}$

বা, $\frac{Q}{\sin(2\pi - 3\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin 2\alpha}$

বা, $\frac{Q}{-\sin 3\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin 2\alpha}$

বা, $\frac{Q}{-(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin 2\alpha}$

বা, $\frac{Q}{\sin\alpha(4\sin^2\alpha - 3)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\frac{Q}{4\sin^2\alpha - 3} = \frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha}$

বা, $\frac{Q}{4(1 - \cos^2\alpha) - 3} = \frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha}$

বা, $\frac{Q}{4 - 4\cos^2\alpha - 3} = \frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha}$

বা, $\frac{Q}{1 - 4\cos^2\alpha} = \frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha}$ .... (i)

(i) হতে $\frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha}$

বা, $\cos\alpha = \frac{S}{2R}$ .... (ii)

এবং $\frac{Q}{1 - 4\cos^2\alpha} = \frac{R}{1}$

বা, $1 - 4\cos^2\alpha = \frac{Q}{R}$

বা, $1 - 4.\left(\frac{S}{2R}\right)^2 = \frac{Q}{R}$

বা, $1 - 4.\frac{S^2}{4.R^2} = \frac{Q}{R}$

বা, $1 - \frac{S^2}{R^2} = \frac{Q}{R}$

বা, $\frac{R^2 - S^2}{R^2} = \frac{Q}{R}$

বা, $\frac{R^2 - S^2}{R} = Q$

বা, $R^2 - S^2 = RQ$

বা, $S^2 = R^2 - RQ = R(R - Q)$

$\therefore S^2 = R(R - Q)$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৭ দৃশ্যকল্প-১ : L, M, N মানের সুস্থিত তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 25, 60, 65 সে.মি.। L ও M মানের বলদ্বয়ের সমষ্টি 51 গ্রাম ওজন। [ব. বো. ১৭]

দৃশ্যকল্প-২ : 20 সে.মি. ব্যবধানে একটি সুষম হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে 8N ও 4N মানের বিপরীতমুখী দুইটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে।

ক. 4N ও $2\sqrt{3}$N মানের বলদ্বয় 30° কোণে ক্রিয়া করে। 4N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে বলগুলির মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ প্রত্যেক বলের মান 4N করে বৃদ্ধি করা হলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরত্বে সরে যাবে? ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক 4N মানের বল বরাবর $2\sqrt{3}$N বলের লম্বাংশ

$F_1 = 2\sqrt{3}\cos 30 = 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3N$

∴ 4N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি

$= 4N + 3N = 7N$ **(Ans.)**

খ L ও M মানের বলদ্বয়ের সমষ্টি 51 গ্রাম ওজন

যেহেতু ABC ত্রিভুজে $BC^2 + CA^2 = AB^2$

বা, $25^2 + 60^2 = 65^2$

$\therefore \triangle ABC$ এর $\angle C = 90°$

যেহেতু বলগুলি সুস্থিত এবং $\triangle ABC$ এর বাহুগুলির সমান্তরাল কাজেই বলত্রয়কে অনুসঙ্গী বাহুত্রয় দ্বারা সূচিত করা যায়।

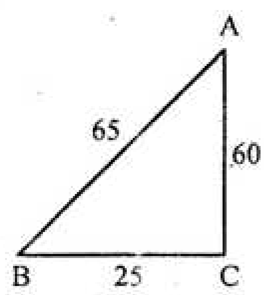
$\therefore \frac{L}{25} = \frac{M}{60} = \frac{N}{65}$

বা, $\frac{L}{5} = \frac{M}{12} = \frac{N}{13} = \frac{L+M}{5+12} = \frac{51}{17} = 3$

$\therefore L = 15$ গ্রাম ওজন

$M = 36$ গ্রাম ওজন

এবং $N = 39$ গ্রাম ওজন **(Ans.)**



গ মনে করি একটি 20 সে.মি. সুষম হালকা দণ্ডের A ও B প্রান্তে 8N ও 4N মানের বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করা হলো।

A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি $(8-4)N = 4N$ বর্ধিত BA এর উপরস্থ C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

তাহলে $8 \times AC = 4 \times BC$

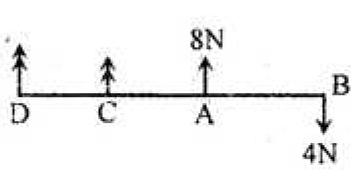
বা, $8AC = 4(AB + AC)$

বা, $8AC = 4(20 + AC)$

বা, $8AC = 80 + 4AC$

বা, $4AC = 80$

$AC = \frac{80}{4} = 20$ cm



এখন A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলের মান 4N বৃদ্ধি করা হলে মনে করি লব্ধি D বিন্দুতে সরে যায়।

$\therefore (8+4)AD = (4+4)BD$ বা, $12AD = 8(AB + AD)$

বা, $12AD = 8(20 + AD)$ বা, $12AD = 160 + 8AD$

বা, $4AD = 160$ $\therefore AD = \frac{160}{4} = 40$ cm

∴ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু সরে যাবে DC দূরত্বের সমান

$\therefore DC = AD - AC = 40 - 20 = 20$ cm **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ দৃশ্যকল্প-১: কোনো বিন্দুতে P এবং 3P দুইটি বল ক্রিয়াশীল।

দৃশ্যকল্প-২: P_1 এবং P_2 দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। [ব. বো. ১৭]

ক. একটি বিন্দুর উপর ক্রিয়ারত বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং শেষ বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে বল তিনটির মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ, প্রথমটিকে চারগুণ ও দ্বিতীয়টির মান 18 একক বৃদ্ধি করলে উভয়ক্ষেত্রে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ, $P_1 = 4$, $P_2 = 6$ হলে এবং বল দুইটির প্রত্যেককে 2 একক পরিমাণে বৃদ্ধি করলে লব্ধির সরণ নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল R, P, Q। P, Q এর মধ্যবর্তী কোন 45°। বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে R হবে P ও Q বলের লব্ধির সমান এবং এর দিক হবে P ও Q বলের লব্ধির বিপরীত দিক।

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos45°$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ.\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + \sqrt{2}PQ$

ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক। **(Ans.)**

খ মনে করি, P এবং 3P বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\theta = \frac{3P\sin\alpha}{P + 3P\cos\alpha}$

আবার, বলদ্বয় 4P এবং 3P + 18 হলে,

$\tan\theta = \frac{(3P+18)\sin\alpha}{4P + (3P+18)\cos\alpha}$

শর্তমতে,

$$\frac{3P\sin\alpha}{P + 3P\cos\alpha} = \frac{(3P+18)\sin\alpha}{4P + (3P+18)\cos\alpha}$$

বা, $\frac{3P}{P + 3P\cos\alpha} = \frac{3P+18}{4P + 18\cos\alpha + 3P\cos\alpha}$

বা, $\frac{4P + 18\cos\alpha + 3P\cos\alpha}{P + 3P\cos\alpha} = \frac{3P+18}{3P}$

বা, $\frac{4P + 18\cos\alpha + 3P\cos\alpha - P - 3P\cos\alpha}{P + 3P\cos\alpha}$

$= \frac{3P + 18 - 3P}{3P}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{3P + 18\cos\alpha}{P + 3P\cos\alpha} = \frac{18}{3P}$

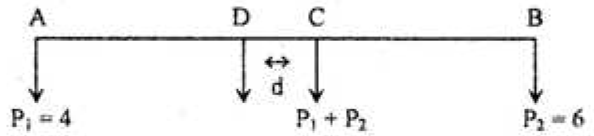
বা, $\frac{3P + 18\cos\alpha}{P(1 + 3\cos\alpha)} = \frac{18}{3P}$

বা, $\frac{3P + 18\cos\alpha}{1 + 3\cos\alpha} = 6$

বা, $3P + 18\cos\alpha = 6 + 18\cos\alpha$

বা, $3P = 6$

$\therefore P = 2$ **(Ans.)**

গ 

A বিন্দুতে $P_1 = 4$ একক ও B বিন্দুতে $P_2 = 6$ একক বল ক্রিয়া করছে। ধরি, তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত যার মান $P_1 + P_2$

$\therefore P_1 AC = P_2 BC.$

বা, $4AC = 6BC.$

$\therefore 2AC = 3BC$ ... ... (i)

আবার, P_1 ও P_2 বলদ্বয়ের সাথে 2 একক বল যোগ করা হলে নতুন বলদ্বয় হবে, 6 একক ও ৪ একক। ধরি, এর ফলে বল দুইটির লব্ধি C বিন্দু হতে d দূরত্বে D বিন্দুতে সরে যায়।

$\therefore CD = d$

$\therefore 6AD = 8BD.$

বা, $6(AC - CD) = 8(BC + CD)$

বা, $6(AC - d) = 8(BC + d)$

বা, $6AC - 6d = 8BC + 8d$

বা, $6AC - 8BC = 8d + 6d$

বা, $3.\ 2AC - 8BC = 14d$

বা, $3.\ 3BC - 8BC = 14d.$ [(i) নং হতে]

বা, $9BC - 8BC = 14d$

বা, $BC = 14d$

$\therefore d = \frac{BC}{14}$ ... ... (ii)

আবার, (i) হতে পাই,

$2AC = 3BC$

বা, $2(AB - BC) = 3BC$

বা, $2AB - 2BC = 3BC$

বা, $2AB = 5BC$

$\therefore BC = \frac{2}{5} AB.$

এই মান (ii) এ বসিয়ে,

$d = \frac{BC}{14} = \frac{1}{14} \times \frac{2}{5} AB = \frac{AB}{35}$

$= \frac{\text{বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব}}{35}$

$\therefore$ লব্ধির সরণ $= \frac{\text{বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব}}{35}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল P, Q (P > Q) যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধি R, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত। যদি P এবং Q এর প্রত্যেককে R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হয় তবে তাদের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়। AB = y এবং CD = x। *[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]*

ক. P = Q = R = 25 এবং P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে, α বের কর। ২

খ. দেখাও যে, $x = \frac{R}{P - Q} . y$ ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত বলদ্বয় θ কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে লব্ধি R, θ কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে, দেখাও যে,

$\theta = 3\cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$ এবং $R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, P = Q = R = 25

P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $25^2 = 25^2 + 25^2 + 2.25.25.\cos\alpha$

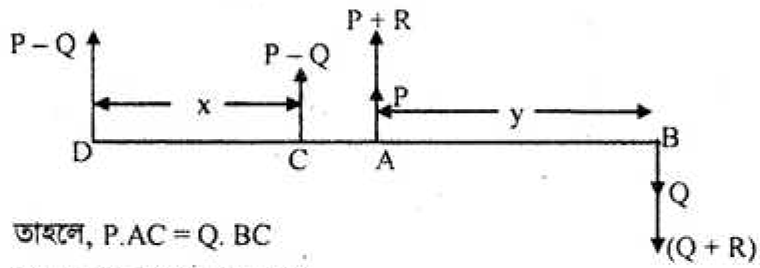
বা, $-625 = 1250\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \frac{-1}{2}$

বা, $\cos\alpha = \cos 120°$

$\therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

খ মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি (P – Q) বলটি বর্ধিত BA এর ওপরস্থ C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



তাহলে, $P.AC = Q.BC$

বা, $P.AC = Q.(AB + AC)$

বা, $(P - Q).AC = Q.AB$

$\therefore AC = \frac{Q}{P - Q}.AB$ ... ... (i)

এখন, P ও Q এর প্রত্যেকে R পরিমাণে বৃদ্ধি করলে, A বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল হবে (P + R) এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল হবে (Q + R) এবং তাদের লব্ধি (P + R) – (Q + R) বা (P – Q) বলটি বর্ধিত BA এর ওপরস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, $(P + R)AD = (Q + R)BD$

বা, $(P + R)AD = (Q + R)(AB + AD)$

বা, $(P - Q)AD = (Q + R)AB$

$\therefore AD = \frac{Q + R}{P - Q}.AB$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $x = CD = AD - AC = \frac{Q + R}{P - Q}.AB - \frac{Q}{P - Q}.AB$

$= \frac{1}{P - Q}(Q + R - Q).AB$ [∵ CD = x এবং AB = y]

$\therefore x = \frac{R}{P - Q}.y$ **(দেখানো হলো)**

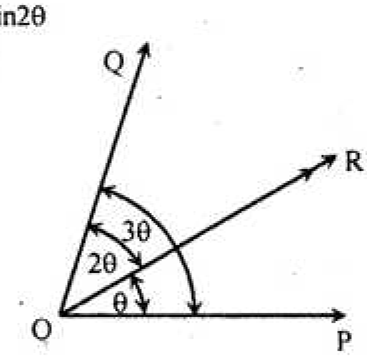
গ মনে করি, 3θ কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের সহিত θ কোণে নত। তাহলে লব্ধি বল R, Q বলের সহিত 2θ কোণে ক্রিয়ারত।

$\therefore$ বলগুলিকে R বরাবর বিভাজন করে পাই,

$R\cos 0° = P\cos(-\theta) + Q.\cos 2\theta$

বা, $R = P\cos\theta + Q(2\cos^2\theta - 1)$ .... (i)

আবার, $R\sin 0° = P\sin(-\theta) + Q\sin 2\theta$



বা, $0 = -P\sin\theta + Q.2\sin\theta.\cos\theta$

বা, $0 = (-P + 2Q\cos\theta)\sin\theta$

বা, $0 = -P + 2Q\cos\theta$

বা, $2Q\cos\theta = P$

বা, $\cos\theta = \frac{P}{2Q}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

সুতরাং $3\theta = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

এখন, (i) নং সমীকরণে cosθ এর মান বসিয়ে পাই,

$R = P\left(\frac{P}{2Q}\right) + Q.\left\{2.\frac{P^2}{4Q^2} - 1\right\}$

বা, $R = \frac{P^2}{2Q} + \frac{P^2}{2Q} - Q$

বা, $R = \frac{2P^2}{2Q} - Q$

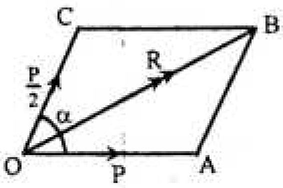
বা, $R = \frac{2P^2 - 2Q^2}{2Q}$

$\therefore R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$

সুতরাং বলদ্বয়ের লব্ধি $= \frac{P^2 - Q^2}{Q}$ এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$।

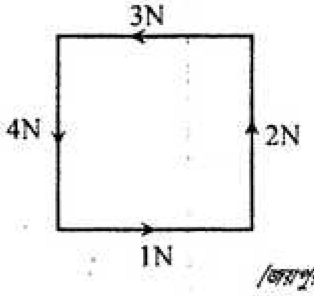
(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ১০ চিত্র-১:



OACB একটি সামান্তরিক।

চিত্র-২:



[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. চিত্র-১ হতে P এবং cosα এর সাপেক্ষে লব্ধি 'R' বের কর। ২

খ. চিত্র-১ এ OC বরাবর 4P বল ক্রিয়ারত হলে প্রমাণ কর যে,

$\alpha = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ যেখানে, P বরাবর R এর লম্বাংশ 4P। ৪

গ. চিত্র-২ এ চারটি বল একটি বর্গের বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল। তাদের লব্ধির মান, দিক ও অবস্থান নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, OACB একটি সামান্তরিক যার OA = P, OB = $\frac{P}{2}$

এবং OA ও OB এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + \left(\frac{P}{2}\right)^2 + 2.P.\frac{P}{2}.\cos\alpha}$

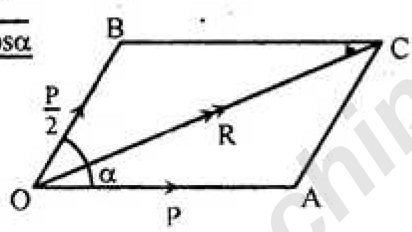
$= \sqrt{P^2 + \frac{P^2}{4} + P^2\cos\alpha}$

$= \sqrt{\frac{4P^2 + P^2 + 4P^2\cos\alpha}{4}}$

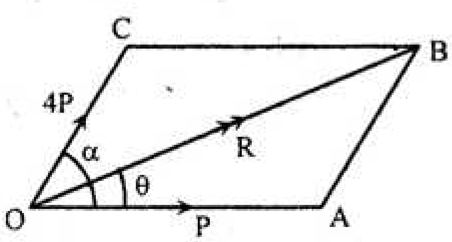
$= \sqrt{\frac{5P^2 + 4P^2\cos\alpha}{4}}$

$= \sqrt{\frac{P^2(5 + 4\cos\alpha)}{4}}$

$= \frac{P}{2}\sqrt{5 + 4\cos\alpha}$ **(Ans.)**



খ



দেওয়া আছে, OABC সামান্তরিকের O বিন্দুতে OA বরাবর P মানের বল OC বরাবর 4P মানের বল ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি R, OB বরাবর ক্রিয়ারত।

ধরি, P ও 4P এর অন্তর্গত কোণ α এবং P এর দিক ও R এর দিকের অন্তর্গত কোণ θ।

P এর দিকে R এর লম্বাংশ 4P

∴ Rcosθ = 4P

তাহলে P এর দিক বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

Rcosθ = Pcos0° + 4P cosα

বা, 4P = P + 4P cosα

বা, P + 4P cosα = 4P

বা, P + 4P cosα = 4P

বা, P = 4P(1 − cosα) = $4P.2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

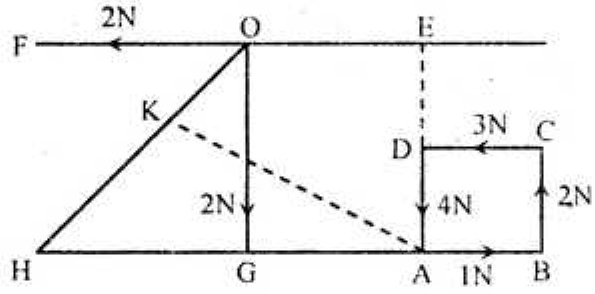
বা, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}$

বা, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha = 2\sin^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (প্রমাণিত)

গ মনে করি, 1N, 2N, 3N, 4N মানের বলগুলো যথাক্রমে ABCD বর্গক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA বাহু বরাবর ক্রিয়া করছে। মনেকরি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a.



AB বরাবর 1N এবং CD বরাবর 3N মানের সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি 2N বলটিও তাদের সমান্তরাল এবং OF বরাবর ক্রিয়া করে ও তার ক্রিয়ারেখা বর্ধিত AD কে E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে,

3N.DE = 1N.AE = 1N(a + DE)

$\therefore DE = \frac{1}{2}a$

আবার, BC বরাবর 2N এবং DA বরাবর 4N বলদ্বয়ের লব্ধি 2N বলটি ও তাদের সমান্তরাল এবং OG বরাবর ক্রিয়া করে ও তার ক্রিয়ারেখা বর্ধিত BA কে G বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে,

4N.AG = 2N.BG = 2N(a + AG)

∴ AG = a

মনে করি, EF এবং OG রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে OF এবং OG বরাবর সমকোণে ক্রিয়ারত 2N এবং 2N মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{(2N)^2 + (2N)^2} = 2\sqrt{2}N$ এবং তা FOG কোণের সমদ্বিখণ্ডক OH বরাবর অর্থাৎ CA রেখার সমান্তরালে ক্রিয়া করবে। তাহলে ∠HOG = 45° = ∠OHG.

মনে করি, CA এবং OH সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব AK এবং বর্ধিত AG রেখা OH কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $GH = OG = AE = \frac{3a}{2}$

∴ $AH = AG + GH = a + \frac{3}{2}a = \frac{5}{2}a$

∴ $AK = AH\sin 45° = \frac{5\sqrt{2}}{4}a$

সুতরাং লব্ধির মান $2\sqrt{2}N$ এবং তা 2N ও 3N মানের বলদ্বয়ের ক্রিয়া রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে অংকিত কর্ণ হতে ঐ বর্গক্ষেত্রের বাহুর $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ গুণ দূরত্বে ঐ কর্ণের সমান্তরাল সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ তিনটি বল P, Q এবং R একটি বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় আছে এবং P এবং Q এর অন্তর্ভুক্ত কোণ, P এবং R এর অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিগুণ।

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]

ক. বলের সামান্তরিক সূত্রটি কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ = Q^2 - R^2$. ৪

গ. লামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যদি কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান ও দিক সূচিত হয় তবে তাদের লব্ধির মান ও দিক সামান্তরিকের উক্ত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা সূচিত হবে।

খ O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। P ও R এর অন্তর্গত কোণ মনে করি α; তাহলে শর্তানুসারে P ও Q এর অন্তর্গত কোণ 2α.

যেহেতু বলত্রয় ভারসাম্য আছে,

তাই লামির সূত্রানুসারে, $\frac{P}{\sin(360^\circ - 3\alpha)} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$

বা, $\frac{P}{-\sin 3\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\frac{P}{4\sin^3\theta - 3\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\frac{P}{4\sin^2\alpha - 3} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2\cos\alpha}$

বা, $\frac{P}{4(1-\cos^2\alpha) - 3} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{Q-P}{4\cos^2\alpha}$

বা, $\frac{Q.(Q-P)}{4\cos^2\alpha} = \left(\frac{R}{2\cos\alpha}\right)^2$

বা, $R^2 = Q(Q-P)$

বা, $R^2 = Q^2 - PQ$

$\therefore$ $PQ = Q^2 - R^2$ **(প্রমাণিত)**

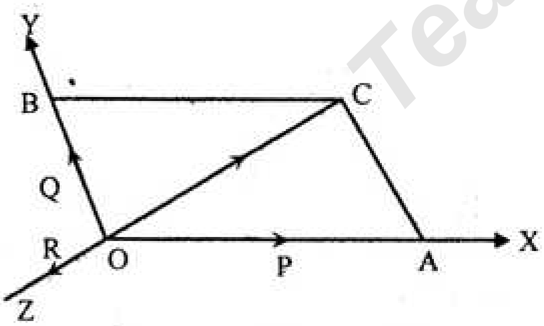
গ **বর্ণনা:** কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বলের প্রত্যেকটির মান অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হলে এবং কোনটিই অপর দুইটির লব্ধির সমান না হলে, বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

প্রমাণ: মনে করি, P, Q ও R তিনটি সমতলীয় বল O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY এবং OZ বরাবর ক্রিয়া করে যেন

$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$ ……… (i)

প্রমাণ করতে হবে যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

এখন নির্দিষ্ট পরিমাপে, OX হতে OA অংশ কেটে নিই যেন OA দ্বারা মানে ও দিকে P বলটি সূচিত হয়। ZO কে এরূপে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন AC কে C তে ছেদ করে এবং AC ∥ OB হয়। OACB সামান্তরিক গঠন করি।



ΔOAC হতে পাই, $\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin COA} = \frac{CO}{\sin OAC}$

বা, $\frac{OA}{\sin COY} = \frac{AC}{\sin(\pi - ZOX)} = \frac{CO}{\sin(\pi - CAX)}$

বা, $\frac{OA}{\sin(\pi - YOZ)} = \frac{AC}{\sin ZOX} = \frac{CO}{\sin CAX}$

বা, $\frac{OA}{\sin YOZ} = \frac{AC}{\sin ZOX} = \frac{CO}{\sin XOY}$ ……… (ii)

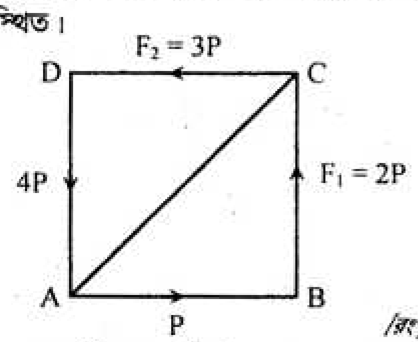
(i) ও (ii) হতে পাই $\frac{P}{OA} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{CO}$ ……… (iii)

কিন্তু OA রেখাংশ মান ও দিকে P বল সূচিত করে, অর্থাৎ P = OA

তাহলে, (iii) হতে পাই, Q = AC এবং R = CO

সুতরাং একই বিন্দু O তে ক্রিয়ারত তিনটি বল মানে ও দিকে OAC ত্রিভুজের একই ক্রমের OA, AC এবং CO বাহু দ্বারা সূচিত হয়েছে। অতএব, বলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১২ চিত্রে, ABCD বর্গের AB বাহু আনুভূমিক বরাবর এবং BC বাহু উলম্ব বরাবর অবস্থিত।



[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. F_1 ও F_2 বলদ্বয়ের লব্ধির মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB ও AC বরাবর যথাক্রমে F_1 ও F_2 বলদ্বয় প্রত্যেকে এককভাবে একটি বস্তুকে AC বরাবর অবস্থিত একটি তলের উপর স্থির রাখতে পারে। তলের উপর প্রতিক্রিয়াদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রদত্ত বলগুলির লব্ধি BA বাহুকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $F_1 = 2P$

$F_2 = 3P$

বলদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল।

$\therefore$ লব্ধি $= \sqrt{(2P)^2 + (3P)^2}$

$= \sqrt{4P^2 + 9P^2}$

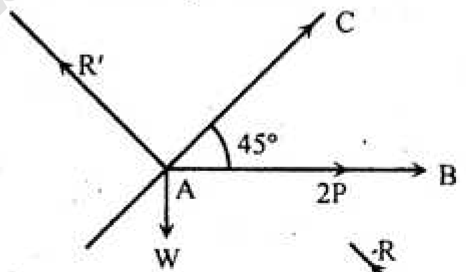
$= \sqrt{13P^2}$

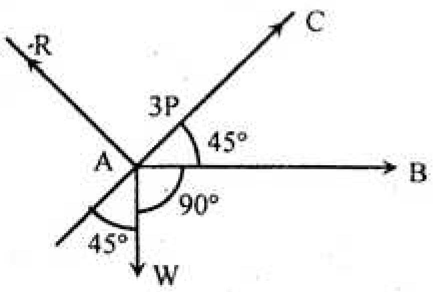
$= \sqrt{13}$ P **(Ans.)**

খ AC তল AB এর সাথে 45° কোণে আনত।

[∵ ABCD একটি বর্গ এবং AC কর্ণ]

মনে করি, W ওজনের একটি বস্তুকে স্থির রাখতে AC বরাবর F_2 = 3P বলটি ক্রিয়াশীল। প্রতিক্রিয়া বল R′ হলে, W, 3P ও R′ বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করে।





$\therefore \frac{W}{\sin 90^\circ} = \frac{3P}{\sin(180^\circ - 45^\circ)} = \frac{R'}{\sin(90^\circ + 45^\circ)}$

বা, $W = \frac{3P}{\sin 135^\circ} = \frac{R'}{\sin 135^\circ}$

$\therefore W = 3\sqrt{2}P = \sqrt{2}R'$

$\therefore R' = 3P$ ……… (i)

আবার, W ওজনের বস্তুকে স্থির রাখার জন্য AB বরাবর F_1 = 2P বলটি ক্রিয়াশীল। প্রতিক্রিয়া বল R হলে, R, 2P ও W বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore \frac{W}{\sin 135^\circ} = \frac{2P}{\sin 135^\circ} = \frac{R}{\sin 90^\circ}$

বা, $\sqrt{2}W = 2\sqrt{2}P = R$

$\therefore R = 2\sqrt{2}$ P ……… (ii)

(ii) ÷ (i) হতে পাই,

$\frac{R}{R'} = \frac{2\sqrt{2}P}{3P}$

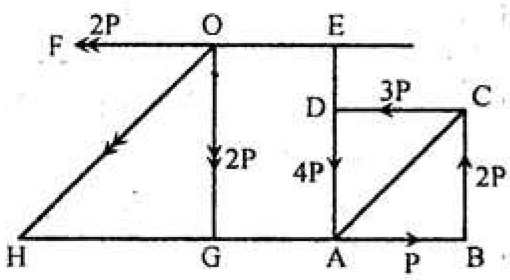
$\therefore R : R' = 2\sqrt{2} : 3$ **(Ans.)**

গ মনে করি, ABCD বর্গক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA বরাবর যথাক্রমে P, 2P, 3P, 4P মানের বলগুলি ক্রিয়া করছে।

AB ও CD বরাবর দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(3P - P) = 2P$, যা $EF \parallel CD$ বরাবর ক্রিয়াশীল এবং তার ক্রিয়ারেখা বর্ধিত AD কে E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে,

$P.AE = 3P.DE \Rightarrow AD + DE = 3DE$

$\Rightarrow DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$, যেখানে বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = a



আবার, BC ও DA বরাবর দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি, $(4P - 2P) = 2P$ যা $OG \parallel DA$ বরাবর ক্রিয়াশীল এবং তার ক্রিয়ারেখা বর্ধিত BA কে G বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে,

$2P.BG = 4P.AG \Rightarrow AB + AG = 2AG \Rightarrow AG = AB = a$

ধরি, EF ও OG রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, OF ও OG বরাবর সমকোণে ক্রিয়ারত 2P, 2P মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{(2P)^2 + (2P)^2} = 2\sqrt{2}P$, যা $\angle GOF$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক OH বরাবর অর্থাৎ CA কর্ণের সমান্তরালে ক্রিয়া করবে। OH বর্ধিত BA কে H বিন্দুতে ছেদ করলে,

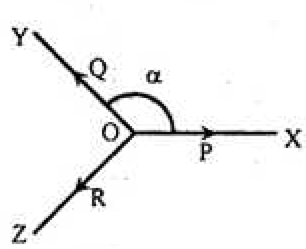
$AH = AG + GH = a + OG = a + AE = a + a + \frac{1}{2}a = \frac{5}{2}a$

এবং $BH = AH + AB = \frac{5}{2}a + a = \frac{7}{2}a$

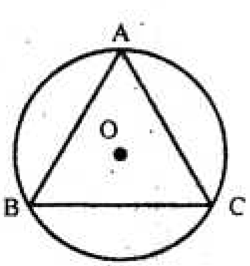
$\therefore BH : AH = \frac{7}{2}a : \frac{5}{2}a = 7 : 5$

$\therefore$ প্রদত্ত বলগুলির লব্ধির মান $2\sqrt{2}P$, যার ক্রিয়ারেখা 2P ও 3P মানের বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার ছেদবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কর্ণের সমান্তরাল রেখা বরাবর ক্রিয়া করে এবং P মানের বল বর্গের যে বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল সে বাহুকে বিপরীত দিকে 7 : 5 অনুপাতে বহিঃর্বিভক্ত করে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩



চিত্র-১



চিত্র-২

[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

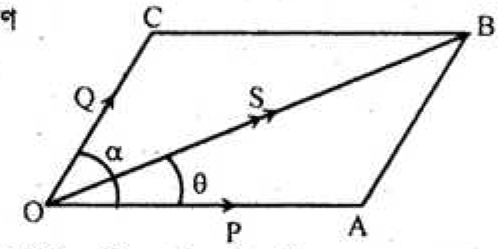
ক. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি S (চিত্র-১) এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ Q হলে, প্রমাণ কর যে, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right)$. ২

খ. চিত্র-১ এর P, Q ও R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOK} = \frac{R}{\sin XOY}$ ৪

গ. চিত্র-২ এ O বিন্দুটি ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং AO বরাবর P মানের বলটি ক্রিয়া করছে। দেখাও যে, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P বলের সমান্তরাল অংশকদ্বয়ের অনুপাত = sin 2B : sin 2C। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, OABC সামান্তরিকের O বিন্দুতে OA বরাবর P মানের বল, OC বরাবর Q মানের বল ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি S, OB বরাবর ক্রিয়ারত। ধরি, P ও Q এর অন্তর্গত কোণ α এবং P এর দিক ও S এর দিকের অন্তর্গত কোণ θ.



প্রশ্নমতে, P এর দিকে S এর লম্বাংশ = Q $\therefore S\cos\theta = Q$

তাহলে P এর দিক বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে,

$S\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos\alpha$

বা, $Q = P + Q\cos\alpha$ $[\because Q = S\cos\theta]$

বা, $P = Q(1 - \cos\alpha)$

বা, $P = 2Q\sin^2\frac{\alpha}{2}$

বা, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}$

বা, $\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$

$\therefore \alpha = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$

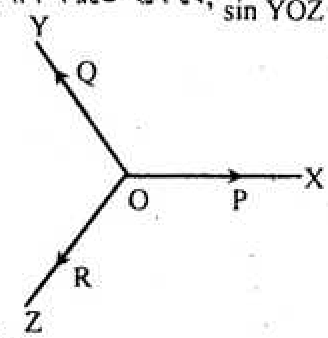
$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, $\alpha = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$

(i) হতে, $\therefore P + Q\cos\alpha = Q$

বা, $\cos\alpha = \frac{Q-P}{Q}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$ **(প্রমাণিত)**

খ মনে করি, O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়ারত P, Q ও R সমতলীয় বল তিনটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$



যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে, কাজেই–

$P + Q + R = 0$ ... ... (i)

বা, $R \times (P + Q + R) = 0$ [উভয় পক্ষে R দ্বারা ভেক্টর গুণন করে]

বা, $R \times P + R \times Q + R \times R = 0$

বা, $R \times P - Q \times R = 0$ $[\because R \times R = 0$ এবং $R \times Q = -Q \times R]$

বা, $|R \times P| = |Q \times R|$

বা, $|RP\sin ZOX\,\hat{n}| = |QR\sin YOZ\,\hat{n}|$ [এখানে $\hat{n}$ বলগুলির অবস্থানকারী সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর]

বা, $RP\sin ZOX = QR\sin YOZ$

বা, $P\sin ZOX = Q\sin YOZ$

$\therefore \frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX}$ ... ... (ii)

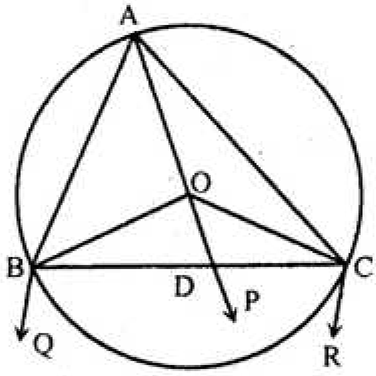
অনুরূপভাবে (i) নং কে P দ্বারা ভেক্টর গুণন করে পাওয়া যায়,

$\frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$ **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P বলের সমান্তরাল অংশকদ্বয় Q ও R.



এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Q ও R এর লব্ধি BC রেখার উপরস্থ কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার, লব্ধি বল AO বরাবর ক্রিয়া করে কাজেই Q এবং R এর লব্ধি (Q + R) বলটি AO অর্থাৎ AOD রেখার উপরস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

অতএব Q.BD = R.CD

বা, $\frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{CD/OD}{BD/OD}$ .... (1)

এখন, COD ত্রিভুজ হতে, $\frac{CD}{\sin COD} = \frac{OD}{\sin OCD}$

বা, $\frac{CD}{OD} = \frac{\sin COD}{\sin OCD}$

আবার, BOD ত্রিভুজ হতে, $\frac{BD}{\sin BOD} = \frac{OD}{\sin OBD}$

$\therefore$ $\frac{BD}{OD} = \frac{\sin BOD}{\sin OBD}$ .... (2)

(1) নং সমীকরণে উপরোক্ত মানগুলো বসিয়ে পাই,

$\frac{Q}{R} = \frac{CD/OD}{BD/OD} = \frac{\sin COD/\sin OCD}{\sin BOD/\sin OBD}$ .... (3)

যেহেতু OB = OC = পরিব্যাসার্ধ

সুতরাং $\angle OCD = \angle OBD$

$\therefore$ sinOCD = sinOBD হলে,

(3) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{Q}{R} = \frac{\sin COD}{\sin BOD} = \frac{\sin(\pi - AOC)}{\sin(\pi - AOB)} = \frac{\sin AOC}{\sin AOB}$

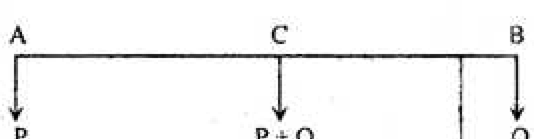
আবার, বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ বলে, $\angle AOC$ = 2B এবং $\angle AOB$ = 2C

$\therefore$ $\frac{Q}{R} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$

$\therefore$ Q : R = sin2B : sin2C **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১৪ দৃশ্যকল্প-১: একটি রশি ACB এর দুই প্রান্ত আনুভূমিক তলের A ও B বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। C বিন্দুতে W ওজনের বস্তু ঝুলন্ত আছে।

দৃশ্যকল্প-২:



[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

ক. দুইটি সমান বল কোনো একটি কণার উপর ক্রিয়ারত। এদের লব্ধির বর্গ বল দুইটির গুণফলের তিনগুণের সমান হলে বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। ২

খ. ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য a, b, c এবং তার ক্ষেত্রফল Δ হলে প্রমাণ কর যে, রশিটির CA অংশের টান = $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$ ৪

গ. P ও Q মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার, P, Q এর বদলে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেখাও যে, $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, P মানের দুইটি সমান বল O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত এবং বলদ্বয়ের লব্ধি R.

শর্তমতে, $R^2 = 3P.P = 3P^2$

তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$3P^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P.\cos\alpha$

বা, $3P^2 = 2P^2 + 2P^2.\cos\alpha$

বা, $3P^2 - 2P^2 = 2P^2.\cos\alpha$

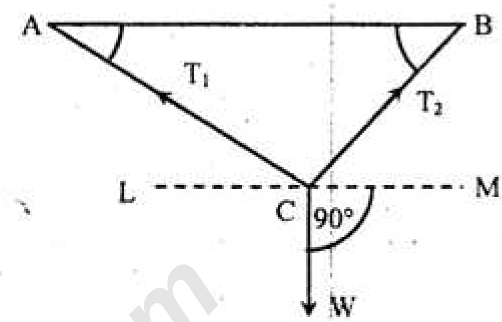
বা, $P^2 = 2P^2.\cos\alpha$

বা, $2\cos\alpha = 1$

বা, $\cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos 60°$ $\therefore$ $\alpha = 60°$

সুতরাং বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°. **(Ans.)**

খ ABC ত্রিভুজের AB বাহু ভূমির সমান্তরাল C বিন্দুতে W ওজনকে ঝুলানোর পর CA এবং CB বরাবর রশির টান T_1 ও T_2 প্রাপ্ত হল।



AB এর সমান্তরাল LCM আঁকি। W, T_1 ও T_2 বল তিনটি C বিন্দুতে কার্যরত থেকে সাম্যাবস্থায় বিরাজ করে। সুতরাং লামির উপপাদ্য অনুসারে আমরা পাই,

$\frac{T_1}{\sin(W \wedge T_2)} = \frac{T_2}{\sin(T_1 \wedge W)} = \frac{W}{\sin(T_1 \wedge T_2)}$

$\therefore \frac{T_1}{\sin(90° + \angle MCB)} = \frac{W}{\sin C}$

বা, $\frac{T_1}{\cos B} = \frac{W}{\sin C}$

বা, $\frac{T_1}{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}} = \frac{W}{\frac{2\Delta}{ab}}$

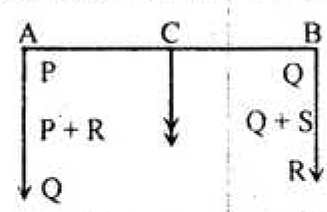
বা, $T_1 = \frac{Wab}{2\Delta}\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}\right)$

$\left(\begin{array}{l} \because \Delta ABC = \frac{1}{2}ab\sin C \\ \Rightarrow \sin C = \frac{2\Delta}{ab} \\ \text{এবং } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \end{array}\right)$

$\therefore$ $T_1 = \frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$

সুতরাং সুতাটির CA অংশের টান = $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ P, Q সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় যথাক্রমে A, B বিন্দুতে ক্রিয়া করছে এবং তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। তাহলে P.AC = Q.BC .... (1)



আবার, P কে R পরিমাণে ও Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore$ (P + R). AC = (Q + S). BC .... (2)

P, Q এর বদলে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore$ Q.AC = R.BC .... (3)

এখন, (1) নং সমীকরণকে (3) নং সমীকরণ দিয়ে ভাগ করে পাই,

$\frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} = \frac{P - Q}{Q - R}$ .... (4)

আবার, (2) নং সমীকরণ হতে (1) নং বিয়োগ করে পাই,

R.AC = S.BC .... (5)

তাহলে (3)নং সমীকরণকে (5) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{Q}{R} = \frac{R}{S} = \frac{Q-R}{R-S}$ ……… (6)

এখন, (4) এবং (6) নং হতে পাই, $\frac{P-Q}{Q-R} = \frac{Q-R}{R-S}$

বা, $(R-S)(P-Q) = (Q-R)^2$

বা, $R - S = \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$

$\therefore$ $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১৫ P ও Q দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল কোনো একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত এবং বলদ্বয়ের লব্ধি R। *[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]*

ক. বলের সামান্তরিক সূত্রটি বর্ণনা কর। ২

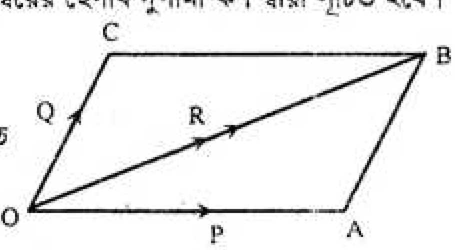
খ. প্রমাণ কর যে, R = P + Q ৪

গ. P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দু x দূরত্বে সরালে দেখাও যে, P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **বর্ণনা:** যদি কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান ও দিক সূচিত হয় তবে তাদের লব্ধির মান ও দিক সামান্তরিকের উক্ত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা সূচিত হবে।

ব্যাখ্যা: মনে করি, OABC সামান্তরিকের O বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বল P ও Q যথাক্রমে সন্নিহিত বাহু OA ও OC দ্বারা সূচিত।

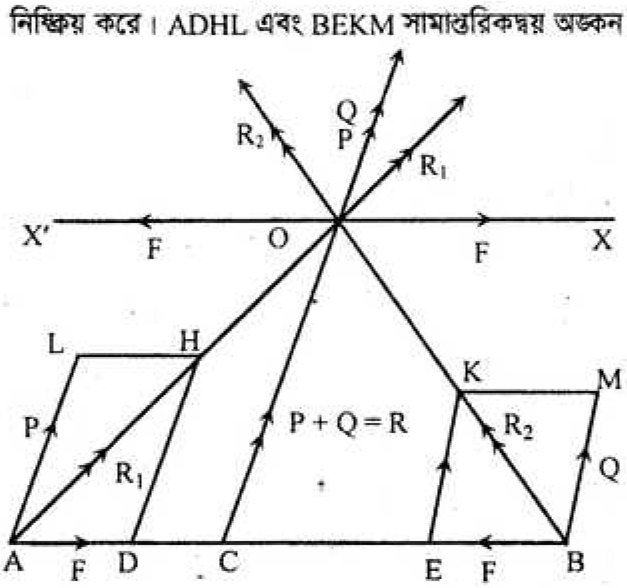


অর্থাৎ ভেক্টর সূচকে প্রকাশ করলে $\vec{OA} = P$ এবং $\vec{OC} = Q$

এখানে P ও Q উভয়েই ভেক্টর রাশি। সুতরাং ভেক্টর যোজনের সামান্তরিক বিধি অনুসারে তাদের যোগফল বা লব্ধি সামান্তরিক OABC এর কর্ণ OB দ্বারা সূচিত হবে। ধরি, P ও Q এর লব্ধি R; তাহলে R এর মান ও দিক কর্ণ OB দ্বারা সূচিত হবে।

খ মনে করি, কোনো জড়বস্তুর A ও B বিন্দুতে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q ক্রিয়ারত। AL ও BM সরলরেখা দ্বারা মানে ও দিকে P ও Q বল দুইটিকে সূচিত করা হলো।

AB যোগ করি এবং AB রেখাংশের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে AB ও BA বরাবর F মানের দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করি। এই বলদ্বয়কে মানে ও দিকে AD ও BE দ্বারা সূচিত করি। বল দুইটি পরস্পর সমান ও একই সরলরেখায় বিপরীতমুখী হওয়ায় পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে। ADHL এবং BEKM সামান্তরিকদ্বয় অঙ্কন করি।



ধরি, A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও F বলের লব্ধি R_1 এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও F বলের লব্ধি R_2.

তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, কর্ণ AH ও কর্ণ BK দ্বারা যথাক্রমে R_1 ও R_2 লব্ধিদ্বয় সূচিত হবে।

এখন AH ও BK বর্ধিত করি, ধরি তারা O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল XOX′ এবং AL বা BM এর সমান্তরাল করে OC রেখা অঙ্কন করি যেন তা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

R_1 ও R_2 লব্ধি বলদ্বয়ের ক্রিয়া বিন্দু A ও B হতে O বিন্দুতে স্থানান্তর করি। তাহলে O বিন্দুতে AO বরাবর ক্রিয়ারত R_1 বলকে AL এর সমান্তরাল CO বরাবর P বল এবং AD এর সমান্তরাল OX বরাবর F বলে বিভাজিত করা যায়।

অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে BO বরাবর ক্রিয়ারত R_2 বলকে BM এর সমান্তরাল CO বরাবর Q বল এবং BE এর সমান্তরাল OX′ বরাবর F বলে বিভাজিত করা যায়।

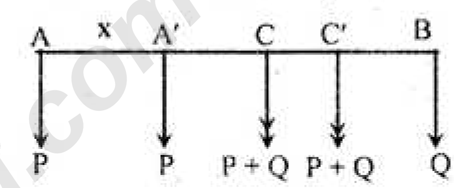
O বিন্দুতে একই XOX′ রেখার OX ও OX′ বরাবর F মানের দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বল ক্রিয়ারত হওয়ায় তারা পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে।

সুতরাং, কেবলমাত্র P ও Q বল দুইটির লব্ধি (P + Q), CO বরাবর অর্থাৎ P ও Q এর সমান্তরাল দিকে C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

সুতরাং লব্ধি R = P + Q **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, AB সরলরেখায় A ও B বিন্দুতে সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় P ও Q ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করলে

P.AC = Q.BC ……… (1)



আবার, P বলকে Q বলের দিকে x পরিমাণ দূরে সরালে ধরি A′ বিন্দুতে P বল এবং C′ বিন্দুতে লব্ধি (P + Q) বল ক্রিয়া করে।

$\therefore$ P.A′C′ = Q.BC′

বা, P.(A′C + CC′) = Q.(BC − CC′)

বা, P.A′C + P.CC′ = Q.BC − Q.CC′

বা, (P + Q).CC′ = Q.BC − P.A′C

= P.AC − P.(AC − AA′) [(1 নং হতে]

= P.AA′

বা, (P + Q).CC′ = Px [∵ AA′ = x]

বা, $CC' = \frac{Px}{P+Q}$

$\therefore$ $CC' = \frac{Px}{P+Q}$

সুতরাং লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১৬ P ও Q(P > Q) মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান R. *[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]*

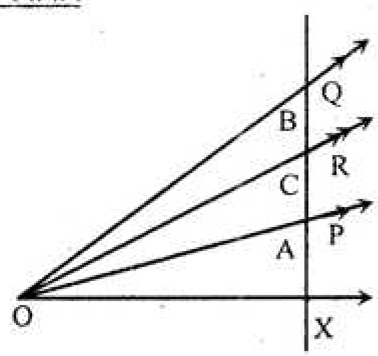
ক. যদি বলগুলি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং কোন ছেদক P, Q, R এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে দেখাও যে, $\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OC}$ ২

খ. P ও Q মানের বলদ্বয় যথাক্রমে একটি হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত থেকে প্রত্যেকে এককভাবে তলের উপরস্থ W ওজনের একটি বস্তুকে ধরে রাখে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$ ৪

গ. যদি বলদ্বয় সমমুখী সমান্তরাল হয় এবং P বলের ক্রিয়ারেখাকে সমান্তরাল রেখে এর ক্রিয়াবিন্দুকে d দূরত্বে সরালে প্রমাণ কর লব্ধি $\frac{Pd}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং উহারা যথাক্রমে OA, OB ও OC বরাবর ক্রিয়াশীল। BA ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু থেকে BA বর্ধিতাংশের ওপর OX লম্ব অঙ্কন করি। OX বরাবর লম্বাংশ উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,



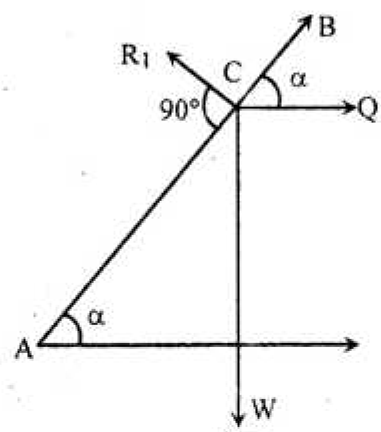
Pcos AOX + Qcos BOX = Rcos COX

বা, $P\frac{OX}{OA}+Q\frac{OX}{OB}=R\frac{OX}{OC}$ $\therefore \frac{P}{OA}+\frac{Q}{OB}=\frac{R}{OC}$ (দেখানো হলো)

খ ১ম চিত্রে,

α কোণে হেলানো তল AB এর ওপর C বিন্দুতে W ওজনের বস্তুকে ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত Q বল স্থির অবস্থায় রাখে। হেলানো তলটির ওপর বস্তুটির চাপ R_1 ধরা হলে বল R_1, Q, W ভারসাম্য সৃষ্টি করবে।

R_1 চাপ AB এর সাথে লম্বিক দিকে হবে।



চিত্র-১

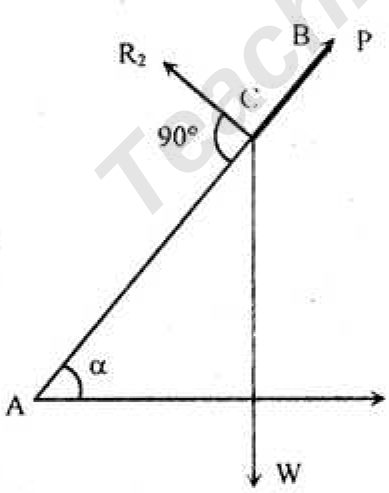
লামির সূত্রানুযায়ী, $\frac{R_1}{\sin 90^\circ}=\frac{Q}{\sin(90^\circ+90^\circ-\alpha)}=\frac{W}{\sin(90^\circ+\alpha)}$

বা, $\frac{R_1}{1}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{W}{\cos\alpha}$

$\therefore Q=\frac{W\sin\alpha}{\cos\alpha}$ বা, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{W}{Q}$ বা, $\cot^2\alpha=\frac{W^2}{Q^2}$ .... (i)

২য় চিত্রে,

হেলানো তলটির দৈর্ঘ্যের দিকে P বল ক্রিয়াশীল W ওজনের বস্তুটির হেলানো তলটির ওপর স্থির অবস্থায় থাকে। এ বস্তুর চাপ R_2 ধরলে R_2, P, W বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করবে এবং R_2 চাপ হেলানো তলের সাথে লম্বিক দিকে ক্রিয়াশীল থাকবে।



চিত্র-২

লামির সূত্রানুযায়ী,

$\frac{R_2}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{P}{\sin(90^\circ+90^\circ-\alpha)}=\frac{W}{\sin 90^\circ}$

বা, $\frac{R_2}{\cos\alpha}=\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{W}{1}$

$\therefore P=W\sin\alpha$ বা, $\frac{P}{\sin\alpha}=W$ বা, $\frac{W}{P}=\text{cosec}\alpha$

বা, $\frac{W^2}{P^2}=\text{cosec}^2\alpha$ .... (ii)

(ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\frac{W^2}{P^2}-\frac{W^2}{Q^2}=\text{cosec}^2\alpha-\cot^2\alpha$

বা, $W^2\left(\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}\right)=1$ বা, $\frac{1}{W^2}=\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}$ (প্রমাণিত)

গ সৃজনশীল ১৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৭

প্রশ্ন ▶ ১৭ ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B ও C তে যথাক্রমে P, Q ও R মানের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়াশীল। *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

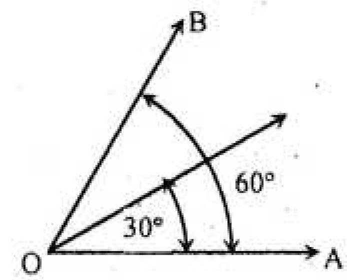
ক. পরস্পর 60° কোণে S ও T মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{3}T$ এবং তা S বলের ক্রিয়ারেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, S = T. ২

খ. বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে প্রমাণ কর যে, P ঃ Q ঃ R = a ঃ b ঃ c ৪

গ. বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হলে প্রমাণ কর যে, P = Q = R। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, OA ও OB রেখাদ্বয় দ্বারা যথাক্রমে S ও T বল দুইটি সূচিত এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ 60°। লব্ধি বলটি S বলের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \tan 30^\circ=\frac{T\sin 60^\circ}{S+T\cos 60^\circ}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{T\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{S+T\times\frac{1}{2}}$

বা, $T\times\frac{3}{2}=S+T\times\frac{1}{2}$

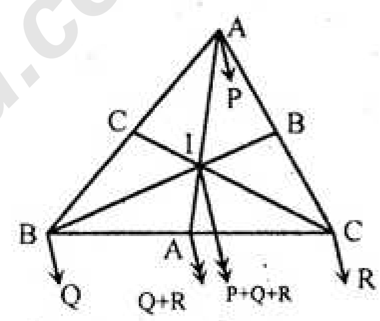
বা, $S=T\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)$

বা, $S=T\left(\frac{3-1}{2}\right)$

বা, $S=T\left(\frac{2}{2}\right)$

বা, S = T (দেখানো হলো)

খ



ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। A, B, C কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে I হলো ত্রিভুজ ABC এর অন্তঃকেন্দ্র।

এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত যথাক্রমে Q ও R বলদ্বয়ের লব্ধি (Q+R) বলটি BC রেখাস্থ A বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

আবার, বল তিনটির লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুগামী। সুতরাং I বিন্দু অবশ্যই AA রেখায় অবস্থিত হবে। অর্থাৎ AA রেখা A কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{AC}{AB}$ .... (i)

আবার, Q.AB = R.AC

বা, $\frac{Q}{R}=\frac{AC}{AB}$

বা, $\frac{Q}{R}=\frac{AC}{AB}$ [(i) নং দ্বারা]

বা, $\frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB}$ .... (ii)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}$ ...... (iii)

(ii) ও (iii)নং হতে পাই,

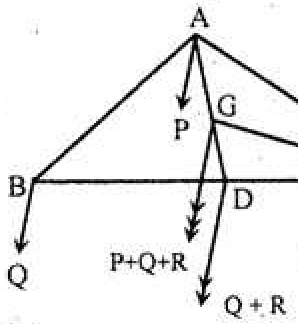
$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB}$

$\Rightarrow \frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}$

[যেখানে a, b, c যথাক্রমে A, B, C শীর্ষের বিপরীত বাহু।]

$\therefore$ P : Q : R = a : b : c (প্রমাণিত)

গ মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C তিনটি কৌণিক বিন্দুতে P, Q, R সমমুখী সমান্তরাল বলগুলি ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি এই ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত। যেহেতু A বিন্দুতে P বল এবং G বিন্দুতে লব্ধি বল P + Q + R ক্রিয়াশীল সুতরাং B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি BC ও AGD- এর ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore$ Q.BD = R.CD ……… (i)

যেহেতু AD মধ্যমা। $\therefore$ BD = CD ……… (ii)

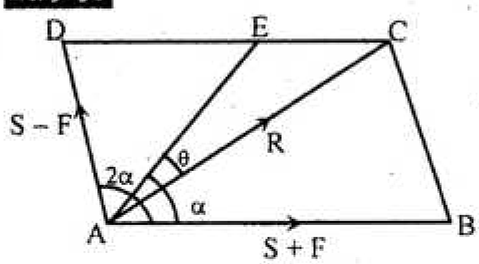
(i)নং সমীকরণকে (ii)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করি,

Q = R ……… (iii)

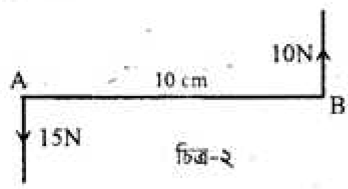
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, P = Q ……… (iv)

$\therefore$ (iii) ও (iv) নং সমীকরণ হতে পাই P = Q = R **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৮



চিত্র-১



চিত্র-২

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের একটি অপরটির দ্বিগুণ এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের উপর লম্ব। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কত? ২

খ. চিত্র-১ এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, S tanθ = F tanα ৪

গ. চিত্রে-২ এর বল দুইটির সাথে সমপরিমাণ কত বল যোগ করলে নতুন লব্ধি 5 cm দূরে সরে যাবে? ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, ক্ষুদ্রতম বলটি = p

$\therefore$ বৃহত্তম বলটি = 2p

এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ = α

ক্ষুদ্রতর বলের সাথে লব্ধির উৎপন্ন কোণ, θ = 90°

$\therefore \tan 90° = \dfrac{2p \sin\alpha}{p + 2p\cos\alpha}$

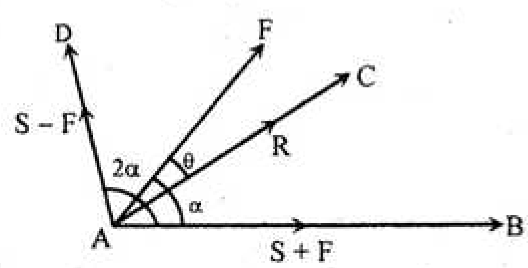
বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{2p \sin\alpha}{p + 2p\cos\alpha}$

বা, $p + 2p\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore$ α = 120° **(Ans.)**

খ



অঙ্কনানুসারে, ∠CAD = α + θ

∠BAC = α – θ

এখন বলের সাইনসূত্র থেকে পাই,

$\dfrac{S + F}{\sin\angle CAD} = \dfrac{S - F}{\sin\angle BAC}$

বা, $\dfrac{S + F}{S - F} = \dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAC} = \dfrac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha - \theta)}$

বা, $\dfrac{S + F + S - F}{S + F - S + F} = \dfrac{\sin(\alpha + \theta) + \sin(\alpha - \theta)}{\sin(\alpha + \theta) - \sin(\alpha - \theta)}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

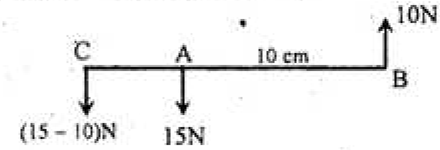
বা, $\dfrac{2S}{2F} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\theta}{2\cos\alpha\sin\theta}$

বা, $\dfrac{S}{F} = \tan\alpha\cot\theta$

বা, $\dfrac{S}{\cot\theta} = F\tan\alpha$

$\therefore$ S tanθ = F tanα **(প্রমাণিত)**

গ



ধরি, বলদ্বয়ের লব্ধি BA এর বর্ধিতাংশের উপর C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

তাহলে, 15 × AC = 10 × BC

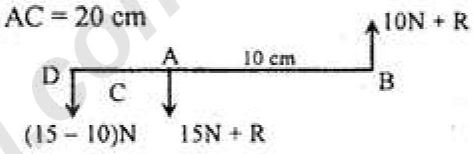
বা, 15 × AC = 10 × (AC + AB)

বা, 15 × AC = 10 × AC + 10 × AB

বা, 15 × AC – 10 × AC = 10 × 10

বা, 5AC = 100

বা, AC = 20 cm



দ্বিতীয় ক্ষেত্রে A ও B বিন্দুতে R পরিমাণ বল যোগ করা হলে A বিন্দুতে (15 + R) বল ও B বিন্দুতে (10 + R) বল দুইটির লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়।

(15 + R) × AD = (10 + R) × BD

বা, (15 + R)AD = (10 + R) (AB + AD)

বা, (15 + R – 10 – R)AD = (10 + R)AB

বা, 5AD = (10 + R)AB

বা, $AD = \dfrac{10 + R}{5} AB$

$= \dfrac{10 + R}{5} \times 10 = 2(10 + R)$ ……… (i)

শর্তমতে, লব্ধি আরো 5 cm সরে যাবে,

$\therefore$ AD = AC + CD = 20 + 5 = 25 cm

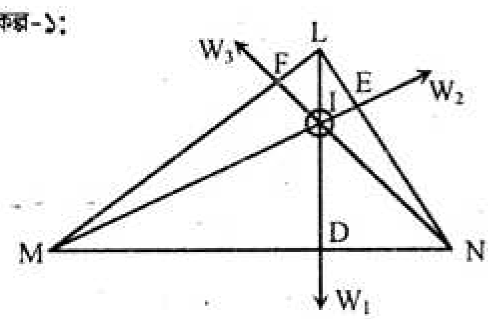
সুতরাং (i) হবে, 25 = 2(10 + R)

বা, 2R = 25 – 20

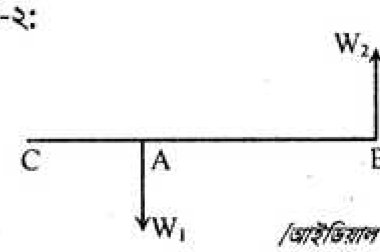
বা, 2R = 5

বা, R = 2.5N **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. 4N ও $2\sqrt{3}$N মানের বলদ্বয় 30° কোণে ক্রিয়া করে। 4N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ LD, ME ও NF যথাক্রমে MN, NL ও LM এর উপর লম্ব এবং উল্লেখিত বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, $w_1 : w_2 : w_3 = l : m : n$. ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ w_1 ও $w_2 (w_1 > w_2)$ বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়কে সমপরিমাণে বৃদ্ধি করা হয়, তবে দেখাও যে, নতুন লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু w_1 বল থেকে আরও দূরে সরে যাবে। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

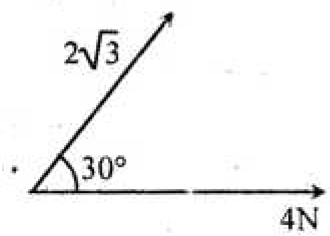
ক 4N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি

$= (4\cos 0° + 2\sqrt{3} \cos 30°)N$

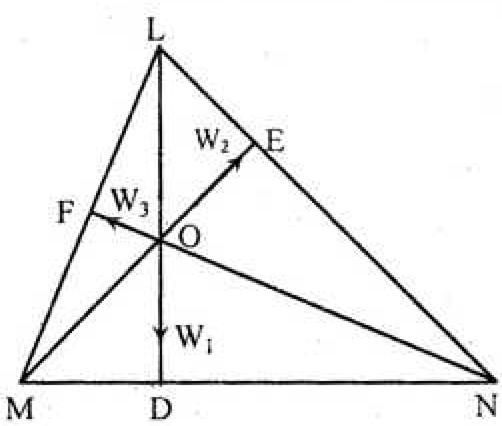
$= \left(4 \times 1 + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)N$

$= (4 + 3)N$

$= 7N$ **(Ans.)**



খ LMN ত্রিভুজের L, M, N কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর ওপর লম্বভাবে ক্রিয়ারত তিনটি বল W_1, W_2, W_3 এর ক্রিয়ারেখা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। কাজেই বলগুলির ক্রিয়াবিন্দু O হিসেবে বিবেচনা করা যায়। আবার বলত্রয় সাম্যাবস্থা তৈরি করে বলে লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই, $\frac{W_1}{\sin EOF} = \frac{W_2}{\sin DOF} = \frac{W_3}{\sin EOD}$



যেহেতু LEOF চতুর্ভুজে $\angle LEO = \angle LFO = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \angle EOF + \angle L = \pi$

বা, $\angle EOF = \pi - L$

অনুরূপভাবে, $\angle DOF = \pi - M$ এবং $\angle EOF = \pi - N$

$\therefore \frac{W_1}{\sin(\pi - L)} = \frac{W_2}{\sin(\pi - M)} = \frac{W_3}{\sin(\pi - N)}$

বা, $\frac{W_1}{\sin L} = \frac{W_2}{\sin M} = \frac{W_3}{\sin N}$ ... ... (i)

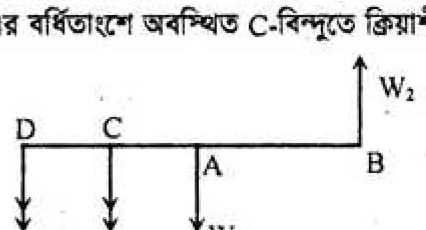
এখন, ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে পাই,

$\frac{l}{\sin L} = \frac{m}{\sin M} = \frac{n}{\sin N}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii)নং হতে পাই, $\frac{W_1}{l} = \frac{W_2}{m} = \frac{W_3}{n}$

অর্থাৎ $W_1 : W_2 : W_3 = l : m : n$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল W_1 এবং $W_2(W_1 > W_2)$ যথাক্রমে AB সরলরেখার উপর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি BA এর বর্ধিতাংশে অবস্থিত C-বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।



$\therefore W_1.AC = W_2.BC = W_2(AB + AC) = W_2.AB + W_2.AC$

বা, $(W_1 - W_2).AC = W_2.AB$ ... ... (1)

আবার, বলদ্বয়কে R পরিমাণ বৃদ্ধি করা হলে, ধরি, তাদের লব্ধি $(W_1 + R) - (W_2 + R) = W_1 - W_2$ বল D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়।

তাহলে $(W_1 + R).AD = (W_2 + R).BD = (W_2 + R).(AB + AD)$

বা, $(W_1 + R).AD - (W_2 + R).AD = (W_2 + R).AB$

বা, $(W_1 - W_2).AD = (W_2 + R).AB$ ... ... (2)

(2)নংকে (1)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে,

$\frac{(W_1 - W_2)AD}{(W_1 - W_2)AC} = \frac{(W_2 + R)AB}{W_2.AB}$

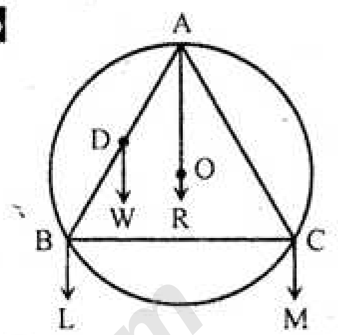
বা, $\frac{AD}{AC} = \frac{W_2 + R}{W_2} = 1 + \frac{R}{W_2}$

$\therefore \frac{AD}{AC} > 1 \quad [\because R > 0, W_2 > 0]$

$\therefore AD > AC$

সুতরাং, প্রদত্ত বলদ্বয়ের মান সমপরিমান বৃদ্ধি করলে তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু W_1 হতে আরও দূরে সরে যাবে। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶২০



[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]

ক. কোন বিন্দুতে পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়াশীল দুটি সমান বলের লব্ধি 6N হলে বলদ্বয় নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের AB তলের D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল W ওজনের বস্তুটিকে Q ও P বলদ্বয় তল ও ভূমির সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়াশীল থেকে প্রত্যেকে এককভাবে বস্তুটিকে তলের উপর ধরে রাখলে প্রমাণ কর যে, $W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}; P > Q.$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, উদ্দীপকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O তে ক্রিয়াশীল বলের সমান্তরাল অংশকদ্বয়ের অনুপাত sin2B ঃ sin 2C. ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, বলদ্বয়, P

শর্তমতে, $6^2 = P^2 + P^2 + 2P.P.\cos 60°$

বা, $36 = 2P^2 + 2P^2 . \frac{1}{2}$

বা, $36 = 2P^2 + P^2$

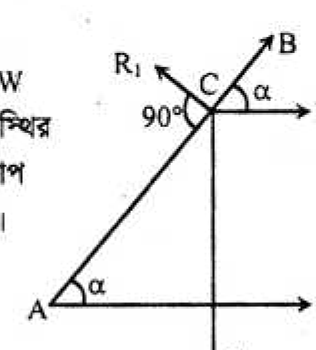
বা, $3P^2 = 36$

বা, $P^2 = 12$

$\therefore P = 2\sqrt{3}N$ **(Ans.)**

খ ১ম চিত্রে,

α কোণে হেলানো তল AB এর ওপর C বিন্দুতে W ওজনের বস্তুকে ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত P বল স্থির অবস্থায় রাখে। হেলানো তলটির ওপর বস্তুটির চাপ R_1 ধরা হলে বল R_1, P, W ভারসাম্য সৃষ্টি করবে। R_1 চাপ AB এর সাথে লম্বিক দিকে হবে।



চিত্র-১

লামির সূত্রানুযায়ী,

$\frac{R_1}{\sin 90°} = \frac{P}{\sin(90° + 90° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90° + \alpha)}$

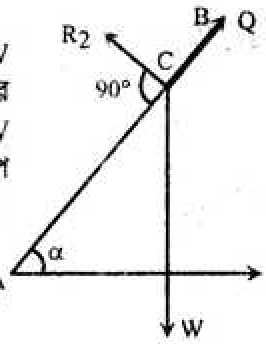
বা, $\frac{R_1}{1} = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha}$

$\therefore P = \frac{W \sin\alpha}{\cos\alpha}$ বা, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{W}{P}$

বা, $\cot^2\alpha = \frac{W^2}{P^2}$ ... ... (i)

২য় চিত্রে,

হেলানো তলটির দৈর্ঘ্যের দিকে Q বল ক্রিয়াশীল W ওজনের বস্তুটির হেলানো তলটির ওপর স্থির অবস্থায় থাকে। এ বস্তুর চাপ R_2 ধরলে R_2, Q, W বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করবে এবং R_2 চাপ হেলানো তলের সাথে লম্বিক দিকে ক্রিয়াশীল থাকবে।



চিত্র-২

লামির সূত্রানুযায়ী,

$$\frac{R_2}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{Q}{\sin(90°+90°-\alpha)} = \frac{W}{\sin 90°}$$

বা, $\frac{R_2}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{W}{1}$

$\therefore$ $Q = W\sin\alpha$ বা, $\frac{Q}{\sin\alpha} = W$ বা, $\frac{W}{Q} = \operatorname{cosec}\alpha$

বা, $\frac{W^2}{Q^2} = \operatorname{cosec}^2\alpha$ ... ... (ii)

(ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\frac{W^2}{Q^2} - \frac{W^2}{P^2} = \operatorname{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha$

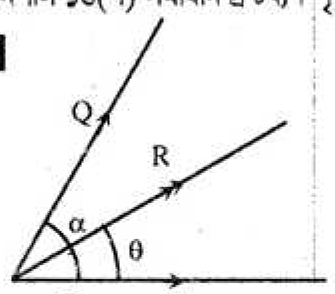
বা, $W^2\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{P^2}\right) = 1$ বা, $\frac{1}{W^2} = \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{P^2}$

বা, $\frac{1}{W^2} = \frac{P^2 - Q^2}{P^2Q^2}$

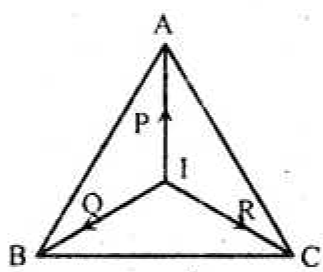
$\therefore$ $W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$; $P > Q$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৮

প্রশ্ন ▶ ২১



চিত্র: ১



চিত্র: ২

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

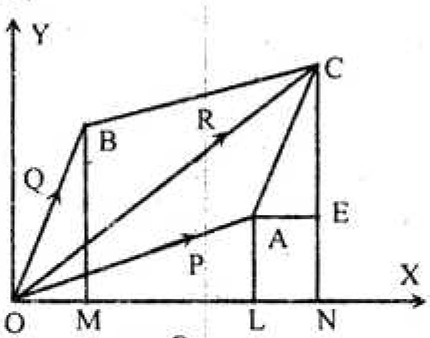
ক. লম্বাংশ উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। ২

খ. চিত্র-১ এ P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ Q হলে প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$। ৪

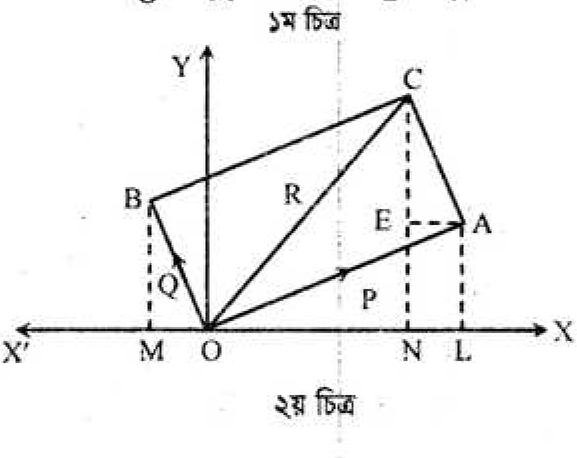
গ. চিত্র-২ এ I অন্তঃকেন্দ্র এবং বলগুলো ভারসাম্য থাকলে প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **বর্ণনা:** কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের কোনো নির্দিষ্ট দিকের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ একই দিকের বলদ্বয়ের লব্ধির লম্বাংশের সমান।



১ম চিত্র



২য় চিত্র

প্রমাণ: মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটি যথাক্রমে OA এবং OB দ্বারা সূচিত। তাহলে OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা উক্ত বলদ্বয়ের লব্ধি R সূচিত হবে।

ধরি, OX রেখাটি নির্দিষ্ট দিক নির্দেশ করে, অর্থাৎ OX বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নির্ণয় করতে হবে।

A, B ও C বিন্দু থেকে OX বা OX′ (২য় চিত্রে) এর ওপর যথাক্রমে AL, BM ও CN লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে OX বরাবর P, Q এবং R বলের লম্বাংশ যথাক্রমে OL, OM এবং ON হবে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OL + OM = ON

এখন A হতে CN এর উপর AE লম্ব অংকন করি।

ΔACE ও ΔOBM সর্বসম। কারণ ΔOBM ও ΔACE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে OB = AC সামান্তরিকের বিপরীতবাহু বলে, অনুরূপ কোণ ∠BOM = ∠CAE. ∴ OM = AE = LN

১ম চিত্রে, OX বরাবর সকল লম্বাংশগুলিই ধনাত্মক কিন্তু ২য় চিত্রে, Q এর লম্বাংশ ঋণাত্মক যা '–OM' এর সমান।

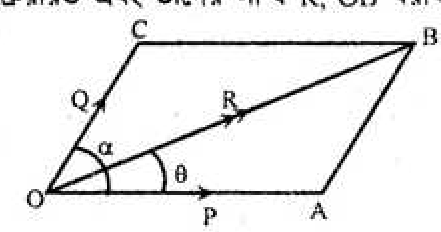
সুতরাং ১ম চিত্রানুসারে, OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি = OL + OM

= OL + LN = ON, যা, OX বরাবর লব্ধি R এর লম্বাংশ।

২য় চিত্রানুসারে, OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি = OL – OM = OL – LN = ON, যা OX বরাবর লব্ধি R এর লম্বাংশ।

অতএব কোনো নির্দিষ্ট দিকে দুইটি বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ একই দিকে তাদের লব্ধির লম্বাংশের সমান। **(প্রমাণিত)**

খ মনে করি, OABC সামান্তরিকের O বিন্দুতে OA বরাবর P মানের বল, OC বরাবর Q মানের বল ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি R, OB বরাবর ক্রিয়ারত।



ধরি, P ও Q এর অন্তর্গত কোণ α এবং P এর দিক ও R এর দিকের অন্তর্গত কোণ θ.

প্রশ্নমতে, P এর দিকে R এর লম্বাংশ = Q ∴ $R\cos\theta = Q$

তাহলে P এর দিক বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে,

$R\cos\theta = P\cos0° + Q\cos\alpha$ বা, $Q = P + Q\cos\alpha$ [∵ $Q = R\cos\theta$]

বা, $P = Q(1 - \cos\alpha)$

বা, $P = 2Q\sin^2\frac{\alpha}{2}$ বা, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}$

বা, $\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$ ∴ $\alpha = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$

∴ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, $\alpha = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$ **(প্রমাণিত)**

(i) হতে, ∴ $P + Q\cos\alpha = Q$ বা, $\cos\alpha = \frac{Q-P}{Q}$

∴ $\alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$

এখন, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = P^2 + Q^2 + 2PQ\frac{(Q-P)}{Q}$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ - 2P^2$

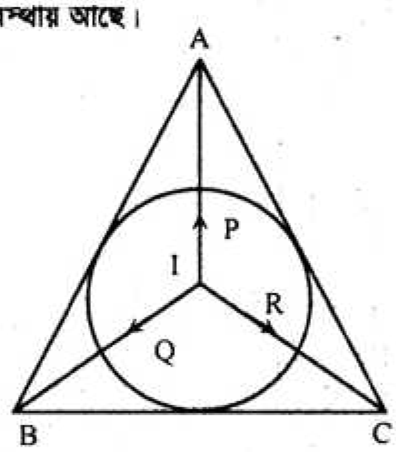
$= P^2 + Q^2 + 2P(Q - P)$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ - 2P^2$

$= Q^2 - P^2 + 2PQ$

∴ $R = (Q^2 - P^2 + 2PQ)^{\frac{1}{2}}$ **(প্রমাণিত)**

গ ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুতে IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।



কাজেই লামির সূত্র অনুযায়ী, $\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin AIC} = \frac{R}{\sin AIB}$ ... ... (i)

এখানে, $\angle ABI = \angle CBI = \frac{B}{2}$ [যেহেতু, I এর অন্তঃকেন্দ্র]

$\angle BCI = \angle ACI = \frac{C}{2}$

$\angle CAI = \angle BAI = \frac{A}{2}$

$\therefore \angle BIC = \pi - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \pi - \frac{1}{2}(B + C) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - A) = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$

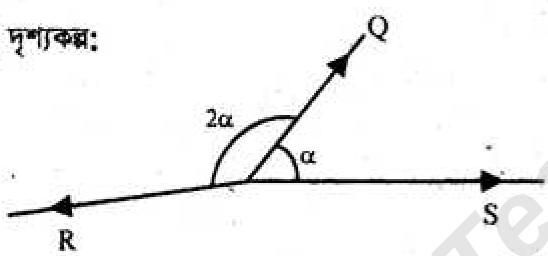
অনুরূপভাবে, $\angle AIB = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$ এবং $\angle AIC = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$

$\therefore$ (i) নং হতে, $\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)}$

বা, $\frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

$\therefore P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ২২ দৃশ্যকল্প:



[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]

ক. 5N, 7N এবং 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8N ও 5N বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্পের Q, R, S বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $S^2 = R(R - Q)$। ৪

গ. দৃশ্যকল্পের R, S মানের বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক তৃতীয়াংশে বিভক্ত করলে দেখাও যে, লব্ধির মান $= \frac{R^2 - S^2}{S^2}$, (R > S) ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক 5N, 7N এবং 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে অর্থাৎ যেকোনো দুইটি বলের লব্ধি হবে অপর বলটি।

$\therefore$ 8N ও 5N বলের লব্ধি 7N

$\therefore 7^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \times 8 \times 5 \cos\alpha$

বা, $49 = 64 + 25 + 80 \cos\alpha$

বা, $-40 = 80 \cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

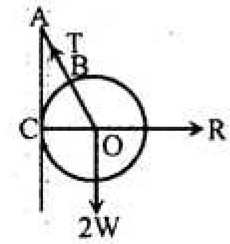
$\therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫২

গ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৪

প্রশ্ন ▶ ২৩ (i)) P_1, P_2, P_3 সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। [হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

(ii) $AB = 2l, OB = OC = a$



ক. কোন বিন্দুতে 3α কোণে ক্রিয়ারত P, Q(P > Q) মানের দুইটি বল ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। প্রমাণ কর যে, লব্ধির মান $= \frac{P^2 - Q^2}{Q}$। ২

খ. (i) নং এ বলগুলোর লব্ধি পরিকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে প্রমাণ কর যে, $P_1\text{cosec } A = P_2\text{cosec} B = P_3\text{cosec} C$। ৪

গ. (ii) নং চিত্রে T এর মান নির্ণয় কর, যখন গোলকটি সাম্যাবস্থায় থাকে। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৪

খ ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P_1, P_2, P_3 মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। A, B, C কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে, I হলো, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P_2 ও P_3 বলের লব্ধি $(P_2 + P_3)$ বলটি BC রেখাস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

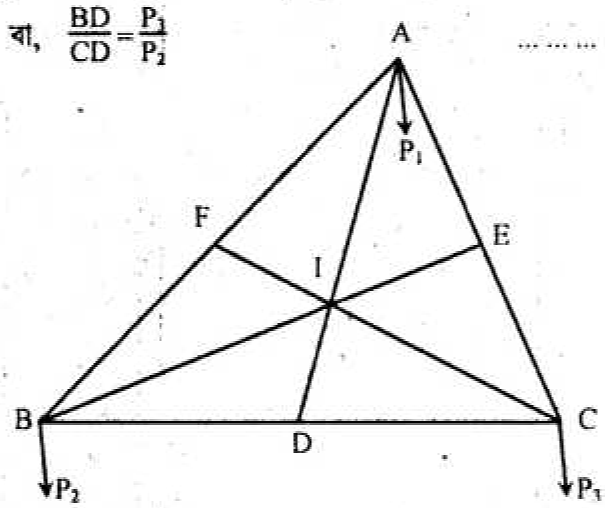
আবার, বল তিনটির লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুগামী। সুতরাং, I বিন্দু AD রেখার ওপর অবস্থান করবে।

অর্থাৎ, AD রেখা A কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ... ... (i)

কিন্তু লব্ধি D বিন্দুগামী হওয়ায়, $P_2.BD = P_3.CD$

বা, $\frac{BD}{CD} = \frac{P_3}{P_2}$ ... ... (ii)



(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{P_3}{P_2} = \frac{AB}{AC}$ বা, $\frac{P_2}{AC} = \frac{P_3}{AB}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC}$

$\therefore \frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{P_3}{AB}$ বা, $\frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} = \frac{P_3}{c}$ .... (iii)

আবার, ΔABC হতে সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই,

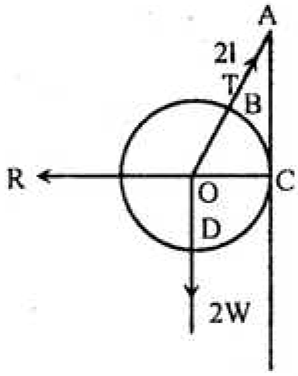
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .... (iv)

(iii) ও (iv) নং হতে পাই,

$\frac{P_1}{\sin A} = \frac{P_2}{\sin B} = \frac{P_3}{\sin C}$

$\therefore P_1\text{cosec}A = P_2\text{cosec}B = P_3\text{cosec}C$ (প্রমাণিত)

গ BCD গোলকের কেন্দ্র O এবং গোলকটি C বিন্দুতে দেওয়ালকে স্পর্শ করে। একটি রশি AB এর B বিন্দু গোলকের ওপর ও A বিন্দু দেওয়ালে আটকানো আছে। গোলকের ওজন 2W এর কার্যরেখা OD, যা উলম্ব। C বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল R, OC বরাবর ক্রিয়া করে। ধরি, রশির টান = T, AB বরাবর ক্রিয়াশীল।



সাম্যাবস্থার জন্য AB সুতার টানের ক্রিয়ারেখা BA বরাবর ক্রিয়া করবে এবং O বিন্দুগামী হবে। কাজেই, OB এবং BA একই রেখা হবে। O বিন্দুতে T, 2W, R সাম্যাবস্থায় আছে।

∴ লামির উপপাদ্য থেকে পাই,

$$\frac{T}{\sin 2W \wedge R} = \frac{W}{\sin R \wedge T} = \frac{R}{\sin T \wedge 2W}$$

$$\therefore \frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{2W}{\sin(\pi - AOC)}$$

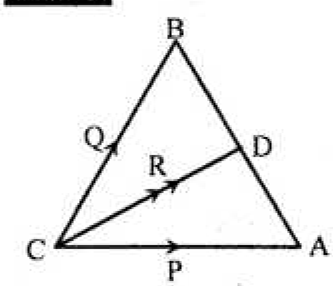
বা, $T = \frac{2W}{\sin AOC}$ বা, $T = \frac{2W}{\frac{AC}{OA}}$ | এখানে, $OA = 2l + a$

এবং $AC = \sqrt{(a+2l)^2 - a^2} = \sqrt{4l^2 + 4al}$

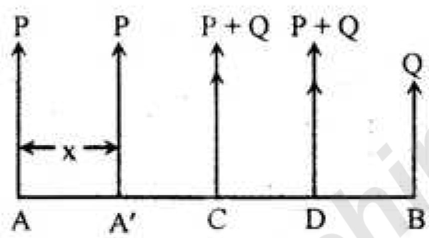
বা, $T = \frac{OA}{AC} \cdot 2W = \frac{2W(2l+a)}{2\sqrt{la+l^2}}$

$\therefore T = \frac{W(a+2l)}{\sqrt{al+l^2}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৪



১ম চিত্র



২য় চিত্র

[শহীদ বীর উত্তম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

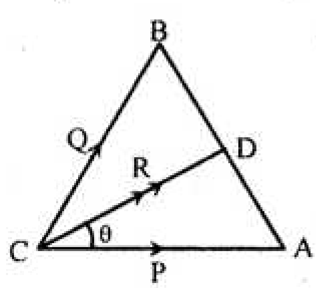
ক. P বরাবর R এর লম্বাংশ Q হলে প্রমাণ কর যে, $C = \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right)$ ২

খ. ১ম চিত্রে $P \propto \cos A$, $Q \propto \cos B$ হলে দেখাও যে, $R \propto \sin C$ এবং R এর ক্রিয়া রেখা C কোণকে যে দুটি অংশে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ৪

গ. ২য় চিত্রে ১ম শর্তে লব্ধি অবস্থান C এবং ২য় শর্তে লব্ধির অবস্থান D হলে CD নির্ণয় কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি CAB ত্রিভুজের CA ও CB বরাবর যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয় ক্রিয়া করে।



১ম চিত্র

এদের লব্ধি R, CD বরাবর ক্রিয়ারত।

P ও Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ C

P এর দিক ও R এর দিকের অন্তর্গত কোণ θ.

প্রশ্নমতে, P বরাবর R এর লম্বাংশ Q

$\therefore R\cos\theta = Q$

P এর দিক বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে,

$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos C$

বা, $Q = P + Q\cos C$ [∵ $R\cos\theta = Q$]

বা, $Q\cos C = Q - P$

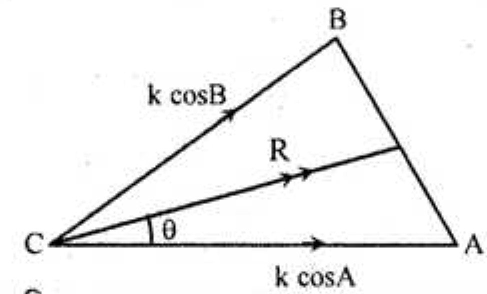
বা, $\cos C = \frac{Q-P}{Q}$

$\therefore C = \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right)$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে,

$P \propto \cos A$	$Q \propto \cos B$
$\therefore P = K\cos A$	$\therefore Q = K\cos B.$

মনে করি, ABC ত্রিভুজের CA এবং CB বরাবর ক্রিয়ারত kcosA এবং kcosB বলদ্বয়ের লব্ধি R, kcosA এর সাথে θ কোণে আনত।



সুতরাং লব্ধি বল kcosB-এর সাথে C − θ কোণে আনত।

$\therefore R^2 = (k\cos A)^2 + (k\cos B)^2 + 2.k\cos A.k\cos B.\cos C$

বা, $R^2 = k^2\{\cos^2A + \cos^2B + 2\cos A.\cos B.\cos C\}$ .... (i)

আবার, আমরা জানি, $A + B + C = \pi$ হলে

$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$

$\therefore \cos^2A + \cos^2B + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1 - \cos^2C$

∴ (i) হতে পাই, $R^2 = k^2(1 - \cos^2C)$

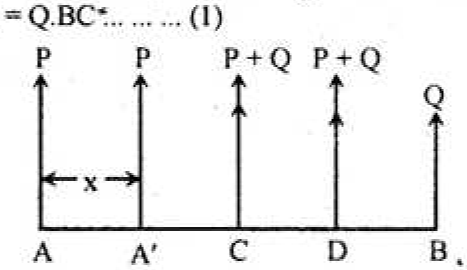
$= k^2.\sin^2C$

$\therefore R = k.\sin C$

$R \propto \sin C$ **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, AB সরলরেখায় A ও B বিন্দুতে সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় P ও Q ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করলে

$P.AC = Q.BC$ .... (1)



২য় চিত্র

আবার, P বলকে Q বলের দিকে x পরিমাণ দূরে সরালে ধরি A′ বিন্দুতে P বল এবং D বিন্দুতে লব্ধি (P + Q) বল ক্রিয়া করে।

∴ $P.A'D = Q.BD$

বা, $P.(A'C + CD) = Q.(BC - CD)$

বা, $P.A'C + P.CD = Q.BC - Q.CD$

বা, $P.A'C + P.CD + Q.CD = Q.BC$

বা, $(P + Q).CD = Q.BC - P.A'C$

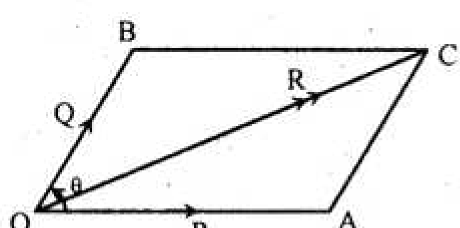
$= P.AC - P.(AC - AA')$ [(1 নং হতে]

$= P.AA'$

বা, $(P + Q).CD = Px$

∴ $CD = \frac{Px}{P+Q}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৫



[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা]

ক. বলের সামান্তরিকের সূত্রটি লিখ। ২

খ. লামির উপপাদ্যটি লিখ ও প্রমাণ কর। ৪

গ. পরস্পর θ কোণে ক্রিয়াশীল P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ যখন তারা $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ কোণে ক্রিয়া করে, তখন লব্ধির মান $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হয়। প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$ ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

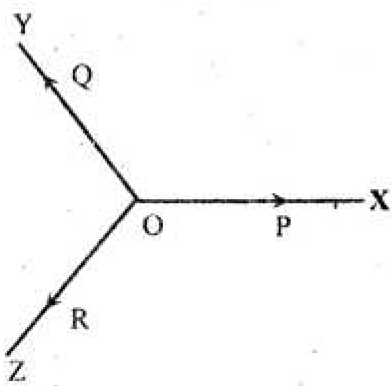
ক সৃজনশীল ১৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৭

খ **বর্ণনা:** কোনো বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, তাদের প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটি বলের ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

প্রমাণ: ভেক্টর পদ্ধতি : মনে করি O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়ারত P, Q ও R সমতলীয় বল তিনটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$$

যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে, কাজেই–



$P + Q + R = 0$ ……… (i)

বা, $R \times (P + Q + R) = 0$ [উভয় পক্ষে R দ্বারা ভেক্টর গুণন করে]

বা, $R \times P + R \times Q + R \times R = 0$

বা, $R \times P - Q \times R = 0$ [$\because R \times R = 0$ এবং $R \times Q = -Q \times R$]

বা, $|R \times P| = |Q \times R|$

বা, $|RP \sin ZOX\, \hat{n}| = |QR \sin YOZ\, \hat{n}|$ [এখানে $\hat{n}$ বলগুলির অবস্থানকারী সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর]

বা, $RP \sin ZOX = QR \sin YOZ$

বা, $P \sin ZOX = Q \sin YOZ$

$\therefore \frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX}$ ……… (ii)

অনুরূপভাবে (i) নং কে P দ্বারা ভেক্টর গুণন করে পাওয়া যায়,

$\frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$ ……… (iii)

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$$

অর্থাৎ প্রত্যেকটি বলের মান অপর বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক। **(প্রমাণিত)**

গ θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হলে আমরা পাই,

$\{(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

বা, $(4m^2+4m+1)(P^2+Q^2) = (P^2+Q^2) + 2PQ\cos\theta$

বা, $(P^2+Q^2)(4m^2+4m+1-1) = 2PQ\cos\theta$

বা, $(P^2+Q^2).4m(m+1) = 2PQ\cos\theta$ ………… (i)

আবার, $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হলে আমরা পাই,

$\{(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

বা, $(4m^2-4m+1)(P^2+Q^2) = (P^2+Q^2) + 2PQ\sin\theta$

বা, $(P^2+Q^2).4m(m-1) = 2PQ\sin\theta$ ………… (ii)

এখন (ii)নং সমীকরণকে (i)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে,

$\tan\theta = \frac{4m(m-1)(P^2+Q^2)}{4m(m+1)(P^2+Q^2)}$

$\therefore \tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৬ P ও Q বলদ্বয়ের প্রত্যেকটি আলাদাভাবে W ওজনের একটি বস্তুকে একটি হেলানো তলের উপর সুস্থির রাখে। P বলটি আনুভূমিক সমান্তরালে এবং Q বলটি হেলানো তলের উপরের দিকে ক্রিয়া করে।

[নারায়ণগঞ্জ সরকারি মহিলা কলেজ, নারায়ণগঞ্জ]

ক. সাম্যাবস্থায় লামির সূত্রটি বর্ণনা কর। ২

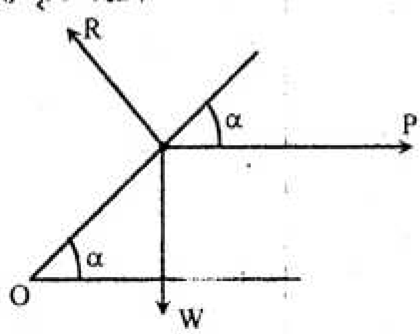
খ. দুইটি ভিন্ন ক্ষেত্রে বস্তুর উপর তলের প্রতিক্রিয়া বল যথাক্রমে R ও R′ হলে দেখাও যে, $R.R' = W^2$। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$. ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **বর্ণনা:** কোনো বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, তাদের প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটি বলের ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

খ মনে করি, α কোণে হেলানো তলের উপর W ওজনকে স্থির রাখার জন্য P বল তল বরাবর ক্রিয়া করে। তখন তলে প্রতিক্রিয়া বল R হলে W, R, P ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



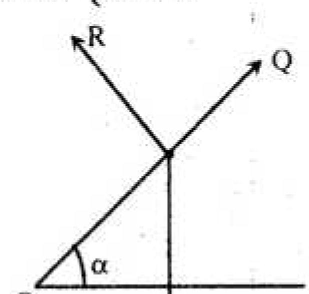
অতএব, লামির সূত্রানুসারে পাই,

$$\frac{W}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{R}{\sin 90^\circ} = \frac{P}{\sin(180^\circ-\alpha)}$$

বা, $\frac{W}{\cos\alpha} = \frac{R}{1}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{W}{R}$ ……………. (i)

আবার, α কোণে হেলানো তলের উপর W ওজনের বস্তুকে ধরে রাখার জন্য Q বল ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়া করে। তলের প্রতিক্রিয়া বল R′ হলে W, R′, Q ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



সুতরাং লামির উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\frac{W}{\sin 90^\circ} = \frac{R'}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{Q}{\sin(180^\circ-\alpha)}$$

বা, $\frac{W}{1} = \frac{R'}{\cos\alpha}$

বা, $\cos\alpha = \frac{R'}{W}$ .... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{W}{R} = \frac{R'}{W}$

$\therefore RR' = W^2$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬০

প্রশ্ন ▶ ২৭ কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ.

[রাজেন্দ্রপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, গাজীপুর]

ক. বলের সামান্তরিক সূত্রটি বর্ণনা কর। ২

খ. যদি P এর দিক বরাবর লব্ধির লম্বাংশ Q হয় তবে দেখাও যে, লব্ধির মান $=\sqrt{Q^2-P^2+2PQ}$. ৪

গ. যদি R ও P এর মধ্যবর্তী কোণ, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণের অর্ধেক হয় এবং বলত্রয় ভারসাম্যে থাকে তবে দেখাও যে, $R^2=Q(Q-P)$ ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৯

খ সৃজনশীল ২১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৩

গ O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। P ও R এর অন্তর্গত কোণ মনে করি α; তাহলে শর্তানুসারে P ও Q এর অন্তর্গত কোণ 2α.

যেহেতু বলত্রয় ভারসাম্যে আছে,

তাই লামির সূত্রানুসারে, $\frac{P}{\sin(360^\circ-3\alpha)}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin2\alpha}$

বা, $\frac{P}{-\sin3\alpha}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\frac{P}{4\sin^3\alpha-3\sin\alpha}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

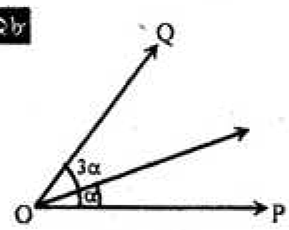
বা, $\frac{P}{4\sin^2\alpha-3}=\frac{Q}{1}=\frac{R}{2\cos\alpha}$

বা, $\frac{p}{4(1-\cos^2\alpha)-3}=\frac{Q}{1}=\frac{R}{2\cos\alpha}=\frac{Q-P}{4\cos^2\alpha}$

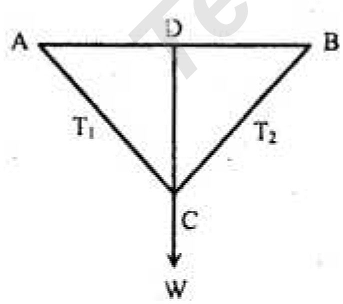
বা, $\frac{Q.(Q-P)}{4\cos^2\alpha}=\left(\frac{R}{2\cos\alpha}\right)^2$

বা, $R^2=Q(Q-P)$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২৮



দৃশ্যকল্প-১



দৃশ্যকল্প-২

দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদর্শিত ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য a, b, c এবং ক্ষেত্রফল Δ।

[আবদুল কাদির মোল্লা সিটি কলেজ, নরসিংদী]

ক. সাম্যাবস্থায় লামির উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ অনুযায়ী দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2-Q^2}{Q}$, (P > Q) ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ ACB সুতাটির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তু গিট দিয়ে বাঁধা আছে। দেখাও যে, সুতাটির CA অংশের টান $\frac{wb}{4c\Delta}(c^2+a^2-b^2)$ ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

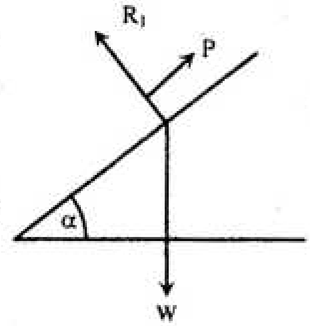
ক সৃজনশীল ২৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৬

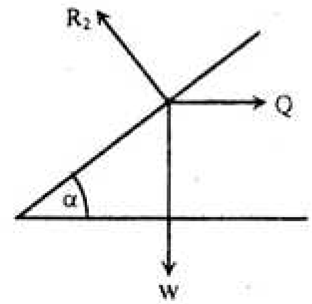
খ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৪

গ সৃজনশীল ১৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৮

প্রশ্ন ▶ ২৯ দৃশ্যকল্প-১: কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বল P ও Q এবং উহাদের লব্ধি R P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশের পরিমাণ Q।

দৃশ্যকল্প-২:





[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]

ক. 5N এবং 7N বলের মধ্যবর্তী কোণ 60°; এদের লব্ধি 7N বলের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$। ৪

গ. উভয় চিত্রে বলগুলো সুস্থিত থাকলে দেখাও যে, $\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}$। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, বলদ্বয় 5N ও 7N এবং মধ্যবর্তী কোণ 60°

∴ লব্ধি, $R=\sqrt{(5)^2+(7)^2-2.5.7\cos60^\circ}$

$=\sqrt{25+49-70\times\frac{1}{2}}=\sqrt{74-35}$

$=\sqrt{39}$ N

∴ R এর 7N বলের সাথে উৎপন্ন

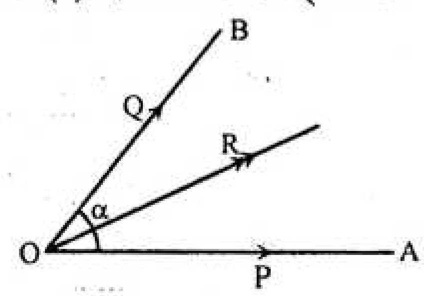
কোণ, $\alpha=\tan^{-1}\frac{\sqrt{39}\sin60^\circ}{7+\sqrt{39}\cos60^\circ}$

$=\tan^{-1}\frac{\sqrt{39}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7+\sqrt{39}\times\frac{1}{2}}=28.12^\circ$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৩

গ সৃজনশীল ১৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬০

প্রশ্ন ▶ ৩০



চিত্রে O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে হেলানো OA ও OB বরাবর কার্যরত P ও Q বল দুটির লব্ধি R.

[সরকারি সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ, ফরিদপুর]

ক. লামির উপপাদ্য বর্ণনা কর। ২

খ. উদ্দীপকে যদি Q কে দ্বিগুণ করা হয় তবে নতুন বলের লব্ধি P বলের ক্রিয়া রেখার উপর লম্ব হয় এবং সেক্ষেত্রে প্রমাণ কর, Q = R. ৪

গ. P বলের দিক বরাবর R এর লম্বাংশের পরিমাণ Q হলে দেখাও যে, উদ্দীপকের বর্ণিত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha=\cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$ এবং লব্ধি $R=\sqrt{Q^2-P^2+2PQ}$. ৪

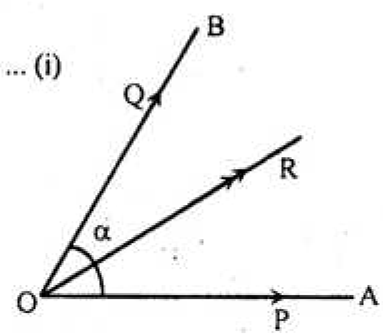
৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৬

খ বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে,

$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$ ... ... (i)

Q কে দ্বিগুণ করলে লব্ধি OA এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে



$\therefore \tan90^\circ=\frac{2Q\sin\alpha}{P+2Q\cos\alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{2Q\sin\alpha}{P + 2Q\cos\alpha}$

বা, $P + 2Q\cos\alpha = 0$

$\therefore$ $P = -2Q\cos\alpha$

(i) $\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 - P^2$

বা, $R^2 = Q^2$

$\therefore$ $Q = R$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ২১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৩

প্রশ্ন ▶ ৩১ দুটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P ও Q

[রাজবাড়ী সরকারি আদর্শ মহিলা কলেজ, রাজবাড়ী]

ক. A ও B বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান কত? ২

খ. দেখাও যে, P ও Q সমান্তরাল বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে এদের লব্ধির পরিবর্তন না ঘটে, তবে এরা সমান। ৪

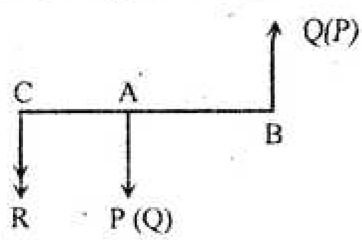
গ. প্রত্যেক বলের মান সমপরিমান বল বৃদ্ধি করা হলে লব্ধি আরও দূরে সরে যাবে প্রমাণ কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যখন বলদ্বয় একই দিকে ক্রিয়া করে তখন A ও B বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি $= A + B$

যখন বলদ্বয় বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তখন A ও B বলদ্বয়ের ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= A \sim B$. **(Ans.)**

খ মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q মানের বিপরীতমুখী বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



$\therefore P.AC = Q.BC$ .... (i)

শর্তানুসারে, A বিন্দুতে Q এবং B বিন্দুতে P কার্যরত হলে এর লব্ধির পরিবর্তন ঘটে না বিধায় লব্ধি C বিন্দুগামী হবে।

$\therefore Q.AC = P.BC$ ....(ii)

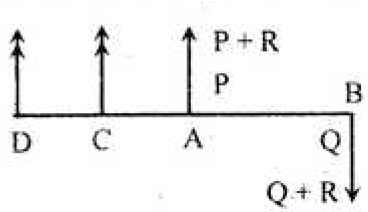
(i) ÷ (ii)

$\frac{P.AC}{Q.AC} = \frac{Q.BC}{P.BC}$

বা, $P^2 = Q^2$

$\therefore P = Q$ **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P এবং Q(P > Q) যথাক্রমে AB সরলরেখার উপর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি BA এর বর্ধিতাংশে অবস্থিত C-বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।



$\therefore$ $P.AC = Q.BC = Q(AB + AC) = Q.AB + Q.AC$

বা, $(P - Q).AC = Q.AB$ ... ... (1)

আবার, বলদ্বয়কে R পরিমাণ বৃদ্ধি করা হলে, ধরি, তাদের লব্ধি $(P + R) - (Q + R) = P - Q$ বল D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়। তাহলে

$(P + R).AD = (Q + R).BD = (Q + R).(AB + AD)$

বা, $(P + R).AD - (Q + R).AD = (Q + R).AB$

বা, $(P - Q).AD = (Q + R).AB$ ... ... (2)

(2)নংকে (1)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে,

$\frac{(P - Q)AD}{(P - Q)AC} = \frac{(Q + R)AB}{Q.AB}$

বা, $\frac{AD}{AC} = \frac{Q + R}{Q} = 1 + \frac{R}{Q}$

$\therefore$ $\frac{AD}{AC} > 1$ $[\because R > 0, Q > 0]$

$\therefore$ $AD > AC$

সুতরাং, প্রদত্ত বলদ্বয়ের মান সমপরিমান বৃদ্ধি করলে তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৩২ P, Q, R তিনটি বল। *[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]*

ক. P = Q, এদের লব্ধি R, মধ্যবর্তী কোন x হলে দেখাও যে, লব্ধি যেকোন বলের সাথে $\frac{x}{2}$ কোণ তৈরি করে। ২

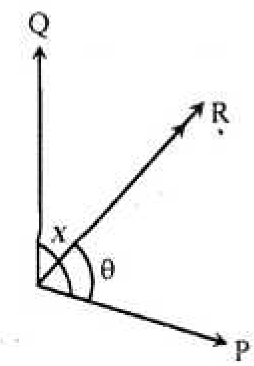
খ. P + Q, P – Q বলদ্বয় φ কোনো ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সাথে $\frac{\beta}{2}$ কোণ তৈরি করলে দেখাও

$P : Q = \tan\frac{\varphi}{2} : \tan\frac{\beta}{2}$। ৪

গ. উদ্দীপকে বলত্রয় ভারসাম্য ক্রিয়ারত। ১ম ও ২য়টির অন্তর্গত কোণ, ১ম ও ৩য়টির অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $Q(Q - P) = R^2$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, লব্ধি R, P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore$ $\tan\theta = \frac{Q\sin x}{P + Q\cos x}$

$= \frac{Q\sin x}{Q + Q\cos x}$ $[\because P = Q]$

$= \frac{Q\sin x}{Q(1 + \cos x)}$

$= \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$

$\therefore$ $\theta = \frac{x}{2}$

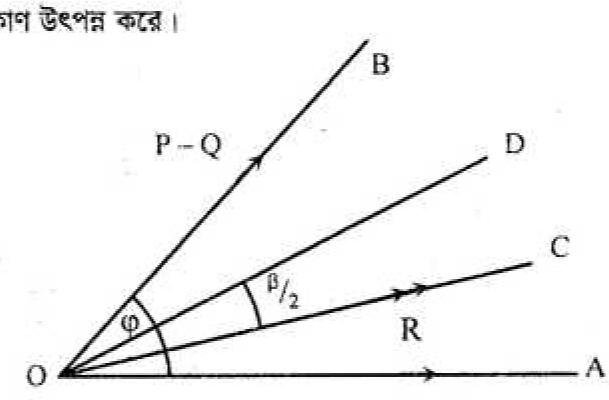
Q বলের সাথে লব্ধি R এর উৎপন্ন কোণ $= x - \theta$

$= x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$

সুতরাং লব্ধি R উভয় বলের সাথে $\frac{x}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। **(দেখানো হলো)**

খ মনে করি, P + Q ও P – Q মানের বলদুইটি যথাক্রমে OA ও OB রেখা বরাবর ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধি R, OC রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল।

আবার, ধরি, ∠AOB- এর সমদ্বিখন্ডক রেখা OD এর সাথে OC রেখা $\frac{\beta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে।



অর্থাৎ $\angle COD = \frac{\beta}{2}$ এবং $\angle AOD = \angle BOD = \frac{\varphi}{2}$.

তাহলে $\angle AOC = \frac{\varphi}{2} - \frac{\beta}{2}$

এবং $\angle BOC = \frac{\varphi}{2} + \frac{\beta}{2}$

এখন, বলের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$\frac{P+Q}{\sin BOC} = \frac{P-Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin AOB}$$

১ম ও ২য় অনুপাত নিয়ে, $\frac{P+Q}{\sin BOC} = \frac{P-Q}{\sin AOC}$

বা, $\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin BOC}{\sin AOC} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}$

বা, $\frac{P+Q+P-Q}{P+Q-P+Q} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2P}{2Q} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}.\sin\frac{\beta}{2}}$ বা, $\frac{P}{Q} = \tan\frac{\varphi}{2}.\cot\frac{\beta}{2}$

বা, $\frac{P}{Q} = \frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}}$

$\therefore$ $P : Q = \tan\frac{\varphi}{2} : \tan\frac{\beta}{2}$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ২৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৭

প্রশ্ন ▶৩৩ দৃশ্যকল্প-১: কোন একটি বিন্দুতে কার্যরত P, Q, R মানের বলত্রয় সাম্যবস্থায় আছে।

দৃশ্যকল্প-২: X, Y, Z তিনটি সদৃশ্য সমান্তরাল বল যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে কার্যরত আছে। *[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]*

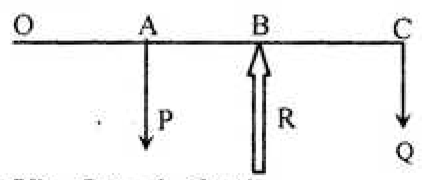
ক. একটি দন্ডের এক প্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দন্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, P : Q : R = 1 : 2 : 3 — ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ P ও R এর মধ্যবর্তী কোণের দ্বিগুণ হলে $R^2 = Q(Q-P)$। — ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বলত্রয় ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে প্রমাণ কর যে, X : Y : Z = a : b : c। — ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, OC দন্ডের O প্রান্ত হতে 2 মিটার দূরে অবস্থিত A বিন্দুতে P বল, 6 মিটার দূরে B বিন্দুতে R বল এবং 8 মিটার দূরে C বিন্দুতে Q বলক্রিয়া করে।



$\therefore$ AB = OB – OA = 6 – 2 = 4

এবং BC = OC – OB = 8 – 6 = 2

যেহেতু তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore$ P ও Q এর লব্ধি R এর সমান এবং P, Q এর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে।

$\therefore$ R = P + Q ……… (1)

এবং P.AB = Q.BC

বা, P.4 = Q.2

বা, Q = 2P ……… (2)

এখন, Q-এর মান (1)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

R = P + 2P = 3P

বা, $\frac{R}{P} = \frac{3}{1}$

$\therefore$ $\frac{R}{3} = \frac{P}{1}$ ……… (3)

আবার, (2) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{Q}{2} = \frac{P}{1}$ ……… (4)

সুতরাং (3) ও (4)নং সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{P}{1} = \frac{Q}{2} = \frac{R}{3}$

$\therefore$ P : Q : R = 1 : 2 : 3 **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল ২৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৭(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৩৪ P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল AB দন্ডের A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধি P + Q, AB এর C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। *[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]*

ক. P = 10 ডাইন, Q = 5 ডাইন এবং AB = 20 ডাইন হলে BC এর দূরত্ব নির্ণয় কর। — ২

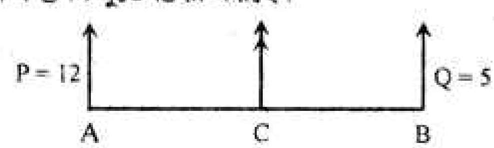
খ. P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ । — ৪

গ. বল দুইটির সাথে একই সমতলে b দূরত্বে S মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হলো। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি $\frac{Sb}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। — ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P = 12 ডাইন ও Q = 5 ডাইন মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে।

এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করছে।



$\therefore$ 12.AC = 5.BC

বা, $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$

বা, $\frac{AC+BC}{BC} = \frac{5+12}{12}$

বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{17}{12}$

বা, $BC = \frac{12}{17} AB = \frac{12}{17} \times 20 = \frac{240}{17}$ ডাইন **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৮

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৯

প্রশ্ন ▶৩৫ P ও Q বলদ্বয় O বিন্দুতে 2α কোণে ক্রিয়া করছে। বলদ্বয়ের লব্ধি R। *[রাণীভবানী সরকারী মহিলা কলেজ, নাটোর]*

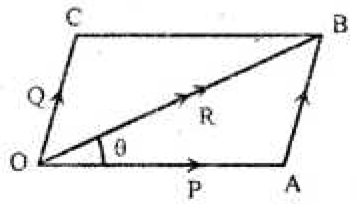
ক. কোন এক বিন্দুতে দুইটি বল α কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। — ২

খ. উদ্দীপকে প্রদত্ত বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে দেখাও যে, $(P+Q)\tan\theta = (P-Q)\tan\alpha$. — ৪

গ. একটি সরলরেখা বলদ্বয় ও লব্ধির ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$ — ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, P ও Q বলদ্বয় O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল এবং লব্ধি R, OP রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore$ লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

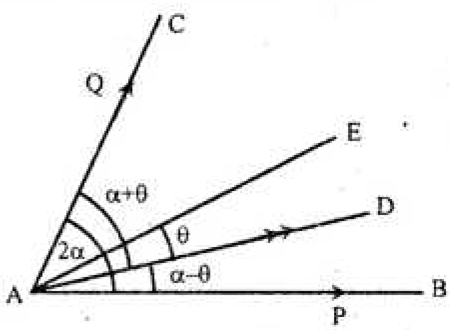
এবং দিক, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, P ও Q মানের বলদ্বয় যথাক্রমে AB ও AC বরাবর 2α কোণে ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধি AD বরাবর ক্রিয়া করে।

আবার ধরি, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক রেখা AE এর সাথে লব্ধি AD রেখা θ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে $\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = \alpha - \theta$

এবং $\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC = \alpha + \theta$



বলের সাইনের সূত্র হতে, $\dfrac{AB}{\sin DAC} = \dfrac{AC}{\sin BAD}$

বা, $\dfrac{P}{\sin(\alpha+\theta)} = \dfrac{Q}{\sin(\alpha-\theta)}$

বা, $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}$

বা, $\dfrac{P+Q}{P-Q} = \dfrac{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{P+Q}{P-Q} = \dfrac{2\sin\alpha.\cos\theta}{2\cos\alpha.\sin\theta}$

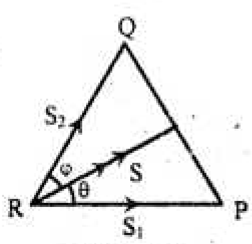
বা, $\dfrac{P+Q}{P-Q} = \tan\alpha.\cot\theta$

বা, $\dfrac{P+Q}{P-Q} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\theta}$

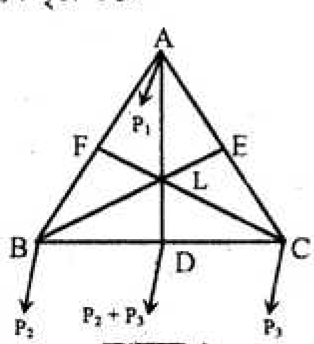
বা, $P + Q\tan\theta = (P - Q)\tan\alpha$. **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১৬(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬০

প্রশ্ন ▶ ৩৬



দৃশ্যকল্প-১



দৃশ্যকল্প-২

[কারমাইকেল কলেজ, রংপুর]

ক. এক বিন্দুতে $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ ও $3\sqrt{3}$ মানের বলত্রয় একই ক্রমে পরস্পর $60°$ কোণে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ S_1, এবং S_2 বলদ্বয় যথাক্রমে cosP এবং cosQ এর সমানুপাতিক। S_1 ও S_2 বলের লব্ধি S হলে, S, θ, φ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ A, B, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলগুলোর লব্ধি লম্বকেন্দ্র L গামী হলে দেখাও যে, $a : b : c = P_1\cos A : P_2\cos B : P_3\cos C$ ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, লব্ধি $3\sqrt{3}$ মানের বলের সাথে θ কোণে কার্যকর আছে। $3\sqrt{3}$ মানের বলের দিক বরাবর এবং তার লম্বদিকে সবগুলো বলের লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 3\sqrt{3}\cos 0° + 2\sqrt{3}\cos 60° + \sqrt{3}\cos 120°$

$= 3\sqrt{3} + \sqrt{3} + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ .... (i)

আবার, $R\sin\theta = 3\sqrt{3}\sin 0° + 2\sqrt{3}\sin 60° + \sqrt{3}\sin 120°$

$= 3\sqrt{3}\,.\,0 + 2\sqrt{3}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{9}{2}$ .... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow$

$\therefore\ R^2(\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta) = \left(\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2$

বা, $R^2 = 57$

$\therefore\ R = \sqrt{57}$ **(Ans.)**

খ ধরি, $S_1 = K\cos P$

$S_2 = K\cos Q$

S_1 ও S_2 এর মধ্যবর্তী কোণ R এবং লব্ধি S.

$\therefore\ S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos R$

$= K^2\cos^2P + K^2\cos^2Q + 2K^2\cos Q\cos P\cos R$

$= K^2(\cos^2P + \cos^2Q + \cos^2R + \cos Q\cos P\cos R - \cos^2R)$

$= K^2(1 - \cos^2R)$

$= K^2\sin^2R$

$\therefore\ S = K\sin R$ **(Ans.)**

$\tan\theta = \dfrac{S_2\sin R}{S_1 + S_2\cos R}$

$= \dfrac{K\cos Q\,.\,\sin R}{K\cos P + K\cos Q\cos R}$

$= \dfrac{\cos Q\sin R}{\cos P + \cos Q\cos R}$

$= \dfrac{\cos Q\sin R}{\cos\{180° - (Q+R)\} + \cos Q\cos R}$

$= \dfrac{\cos Q\sin R}{-\cos(Q+R) + \cos Q\cos R}$

$= \dfrac{\cos Q\sin R}{\sin Q\sin R}$

$\therefore\ \tan\theta = \cot Q$

$\therefore\ \tan\theta = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - Q\right)$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{2} - Q$

$= \dfrac{P}{2} + \dfrac{Q}{2} + \dfrac{R}{2} - Q$

$= \dfrac{P}{2} + \dfrac{R}{2} - \dfrac{Q}{2} = \dfrac{1}{2}(P + R - Q)$ **(Ans.)**

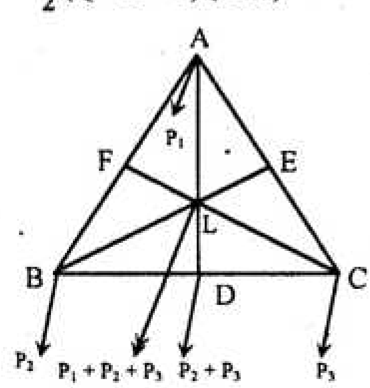
$\therefore\ \varphi = R - \theta$

$= R - \dfrac{P}{2} - \dfrac{R}{2} + \dfrac{Q}{2}$

$= \dfrac{R}{2} + \dfrac{Q}{2} - \dfrac{P}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(Q + R - P)$ **(Ans.)**

গ



ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র L, বর্ধিত AL রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P_2 ও P_3 বলদ্বয়ের লব্ধি BC রেখার উপরস্থ কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

আবার বল তিনটির লব্ধি $(P_1 + P_2 + P_3)$, L বিন্দুতে এবং P_1 বলটি A বিন্দুতে ক্রিয়া করে। কাজেই P_2 এবং P_3 এর লব্ধি $(P_2 + P_3)$ বলটি AL অর্থাৎ ALD রেখার উপরস্থ কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। অর্থাৎ $(P_2 + P_3)$ বলটি BC এবং ALD রেখার ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।

$\therefore\ P_2.BD = P_3.CD$

বা, $\frac{P_2}{P_3} = \frac{CD}{BD}$

বা, $\frac{P_2}{P_3} = \frac{CD/AD}{BD/AD}$

বা, $\frac{P_2}{P_3} = \frac{\cot C}{\cot B} = \frac{\tan B}{\tan C}$

বা, $\frac{P_2}{\tan B} = \frac{P_3}{\tan C}$ .... (i)

অনুরূপভাবে প্রমাণ কর যে, $\frac{P_1}{\tan A} = \frac{P_2}{\tan B}$ .... (ii)

(i) ও (ii) হতে, $\frac{P_1}{\tan A} = \frac{P_2}{\tan B} = \frac{P_3}{\tan C}$

আবার, $\frac{P_1}{\frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{P_2}{\frac{\sin B}{\cos B}} = \frac{P_3}{\frac{\sin C}{\cos C}}$

বা, $\frac{P_1 \cos A}{\sin A} = \frac{P_2 \cos B}{\sin B} = \frac{P_3 \cos C}{\sin C}$

বা, $\frac{P_1 \cos A}{\frac{a}{2R}} = \frac{P_2 \cos B}{\frac{b}{2R}} = \frac{P_3 \cos C}{\frac{c}{2R}}$

বা, $\frac{P_1 \cos A}{a} = \frac{P_2 \cos B}{b} = \frac{P_2 \cos C}{c}$

$\therefore\ P_1 \cos A : P_2 \cos B : P_3 \cos C = a : b : c$

বা, $a : b : c = P_1 \cos A : P_2 \cos B : P_3 \cos C$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৩৭ P ও Q মানের দুইটি বল কোনো বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়াশীল যে তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে

[আহম্মদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]

ক. বলের সামান্তরিক সূত্রটি লিখ। ২

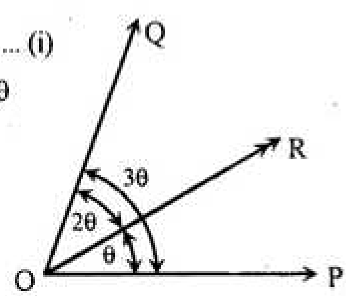
খ. বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের হতে দেখাও যে, বল দুইটির অন্তর্গত কোণ $3 \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2 - Q^2}{Q}$, $P \geq Q$। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৭

খ মনে করি, 3θ কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের সহিত θ কোণে নত। তাহলে লব্ধি বল R, Q বলের সহিত 2θ কোণে ক্রিয়ারত। বলগুলিকে R বরাবর বিভাজন করে পাই,



$R \cos 0° = P\cos(-\theta) + Q.\cos 2\theta$

বা, $R = P\cos\theta + Q(2\cos^2\theta - 1)$ .... (i)

আবার, $R \sin 0° = P\sin(-\theta) + Q \sin 2\theta$

বা, $0 = -P\sin\theta + Q.2\sin\theta.\cos\theta$

বা, $0 = (-P + 2Q\cos\theta)\sin\theta$

বা, $0 = -P + 2Q\cos\theta$

বা, $2Q\cos\theta = P$

বা, $\cos\theta = \frac{P}{2Q}$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

এখন, (i) নং সমীকরণে cosθ এর মান বসিয়ে পাই,

$R = P\left(\frac{P}{2Q}\right) + Q.\left\{2\frac{P^2}{4Q^2} - 1\right\}$

বা, $R = \frac{P^2}{2Q} + \frac{P^2}{2Q} - Q$

বা, $R = \frac{2P^2}{2Q} - Q$

বা, $R = \frac{2P^2 - 2Q^2}{2Q}$

$\therefore\ R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$

সুতরাং বলদ্বয়ের লব্ধি $= \frac{P^2 - Q^2}{Q}$ এবং দিক $= \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৪

প্রশ্ন ▶৩৮ দৃশ্যকল্প-১: "a" দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেওয়ালে আটকানো এবং অন্য প্রান্ত "a" ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের সাথে যুক্ত আছে।

দৃশ্যকল্প-২: P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে x দূরত্বে সরানো হল।

[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]

ক. P = Q = R হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে গোলকটির ওজন W হলে, সুতার টান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, এদের লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরত্ব সরে যাবে। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, O বিন্দুতে P ও Q বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধি R।

$\therefore\ R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $P^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha$ $[\because P = Q = R]$

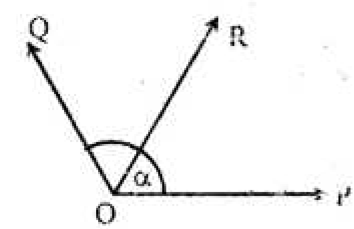
বা, $P^2 - 2P^2 = 2P^2\cos\alpha$

বা, $2P^2\cos\alpha = -P^2$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ \alpha = 120°$ **(Ans.)**

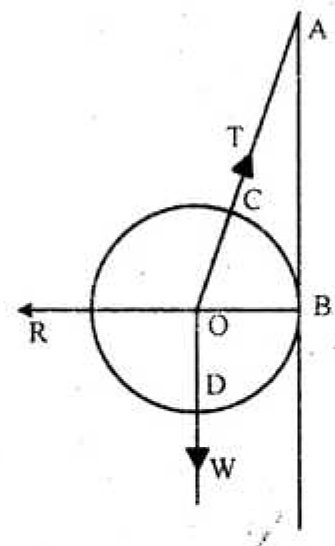


খ BCD গোলকের কেন্দ্র O এবং গোলকটি B বিন্দুতে দেওয়ালকে স্পর্শ করে। একটি রশি AC এর C বিন্দু গোলকের উপর ও A বিন্দু দেওয়ালে আটকানো আছে।

গোলকের ওজন W এর কার্যরেখা OD, যা উল্লম্ব। B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল R, BO বরাবর ক্রিয়া করে।

ধরি, রশির টান = T, CA বরাবর ক্রিয়াশীল।

সাম্যাবস্থার জন্য AC সুতা টানের ক্রিয়ারেখা CA বরাবর ক্রিয়া করবে এবং O বিন্দুগামী হবে। কাজেই, OC এবং CA একই রেখা হবে। O বিন্দুতে, T, W, R সাম্যাবস্থায় আছে।



∴ লামির উপপাদ্য থেকে পাই,

$$\frac{T}{\sin(W \wedge R)} = \frac{W}{\sin(R \wedge T)} = \frac{R}{\sin(T \wedge W)}$$

$\therefore \frac{T}{\sin 90°} = \frac{W}{\sin(\pi - AOB)}$

বা, $T = \frac{W}{\sin AOB}$ বা, $T = \frac{W}{\frac{AB}{OA}}$

বা, $T = \frac{OA}{AB} \cdot W = \frac{W.2a}{a\sqrt{3}}$

$\therefore T = \frac{2W}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

এখানে, $OA = a + a = 2a$
এবং $AB = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$
$= \sqrt{3a^2}$
$= a\sqrt{3}$

গ সৃজনশীল ১৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৯

প্রশ্ন ▶৩৯ দৃশ্যকল্প-১: P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষ A, B, C তে ক্রিয়া করে।

দৃশ্যকল্প-২: হেলানো সমতলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P ও Q মানের দুইটি পৃথক বল প্রত্যেকে W ওজনের কোন বস্তুকে তলের উপর স্থির রাখতে পারে। *[চাঁদপুর সরকারি মহিলা কলেজ, চাঁদপুর]*

ক. যদি কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ তাদের গুণফলের তিনগুণ হয়, তাহলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর বলগুলোর যেকোন সাধারণ দিকের জন্য এদের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, P = Q = R ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$; P > Q ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, P মানের দুইটি সমান বল O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত এবং বলদ্বয়ের লব্ধি R.

শর্তমতে, $R^2 = 3P.P = 3P^2$

তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$3P^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P.\cos\alpha$

বা, $3P^2 = 2P^2 + 2P^2.\cos\alpha$

বা, $3P^2 - 2P^2 = 2P^2.\cos\alpha$

বা, $P^2 = 2P^2.\cos\alpha$

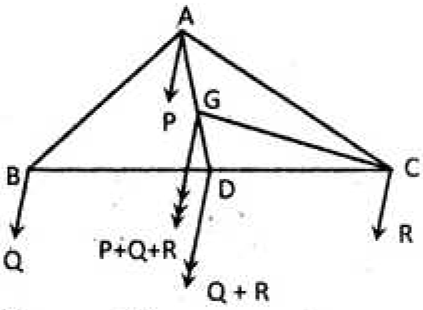
বা, $2\cos\alpha = 1$

বা, $\cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\therefore \alpha = 60°$

সুতরাং বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°. **(Ans.)**

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C তিনটি কৌণিক বিন্দুতে P, Q, R সমমুখী সমান্তরাল বলগুলি ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি এই ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত। যেহেতু A বিন্দুতে P বল এবং G বিন্দুতে লব্ধি বল R + P + Q ক্রিয়াশীল সুতরাং B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি BC ও AGD- এর ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।



∴ Q.BD = R.CD ... ... (1)

যেহেতু AD মধ্যমা। ∴ BD = CD ... ... (2)

(1) নং সমীকরণকে (2)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করি,

Q = R ... ... (3)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, P = Q ... ... (4)

∴ (3) ও (4) নং সমীকরণ হতে পাই P = Q = R **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ২০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬২

প্রশ্ন ▶৪০ α কোণে আনত দুইটি বল P ও Q এবং এদের লব্ধি R। *[চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ল্যাবরেটরী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]*

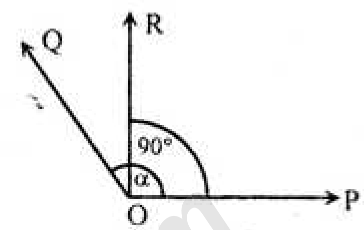
ক. লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব হলে, লব্ধির মান ও বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, লব্ধি বল সর্বদাই বৃহত্তর বলের দিকে বেশি হেলানো থাকে। ৪

গ. Q এর মান দ্বিগুণ করলে R ও দ্বিগুণ এবং Q কে বিপরীতমুখী করলে R দ্বিগুণ হয় প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$. ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



এখানে P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধির মান

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

যেহেতু লব্ধি R, P বলের সাথে θ = 90° কোণ উৎপন্ন করে সুতরাং

লব্ধির দিক হবে, $\tan 90° = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

বা, $\cot 90° = \frac{P + Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha}$

বা, $P + Q\cos\alpha = 0$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{P}{Q}\right)$

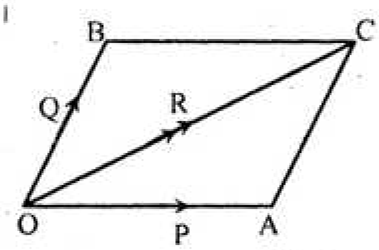
সুতরাং বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\left(-\frac{P}{Q}\right)$ হবে।

∴ লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P(-P)}$ $\left[\because P + Q\cos\alpha = 0 \;\; \therefore Q\cos\alpha = -P\right]$

$= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2P^2} = \sqrt{Q^2 - P^2}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয় OACB সামন্তরিকের OA ও OB বাহু দ্বারা সূচিত; তাহলে এদের লব্ধি R সামন্তরিকটির OC কর্ণ দ্বারা সূচিত হয়।



ধরি, P > Q

∴ OA > OB

বা, OA > AC **[∵ AC = OB]**

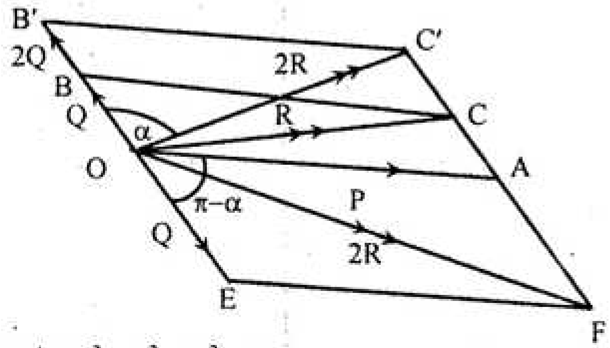
∴ ∠OCA > ∠COA

বা, ∠COB > ∠COA [∵ ∠OCA = ∠COB]

বা, ∠COA < ∠COB

সুতরাং লব্ধি বল সর্বদাই বৃহত্তম বলের দিকে বেশি করে হেলানো থাকে **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, P এবং Q বল দুইটি O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে OA এবং OB বরাবর ক্রিয়ারত রয়েছে এবং এদের লব্ধি R কে OC দ্বারা সূচিত করা হলো।



সুতরাং, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ .... (i)

OB বরাবর কার্যরত 2Q মানের বল ও OA বরাবর ক্রিয়ারত P মানের বলের লব্ধিকে OC´ দ্বারা সূচিত করি।

সুতরাং $(2R)^2 = P^2 + (2Q)^2 + 2P.(2Q).\cos\alpha$

$\therefore$ $4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha$ .... (ii)

OB এর বিপরীত দিকে OE বরাবর ক্রিয়াশীল Q বল এবং OA বরাবর ক্রিয়ারত P বলের লব্ধির মান 2R ধরলে OEFA সামান্তরিকের কর্ণ OF এদের লব্ধির মান 2R সূচিত করবে।

এক্ষেত্রে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= (\pi - \alpha)$

সুতরাং, $(2R)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\pi - \alpha)$

$\therefore 4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$ .... (iii)

(i) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$5R^2 = 2P^2 + 2Q^2 \therefore 2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0$ .... (iv)

(iii) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং এর সাথে যোগ করে পাই,

$12R^2 = 3P^2 + 6Q^2$

বা, $4R^2 = P^2 + 2Q^2 \therefore P^2 + 2Q^2 - 4R^2 = 0$ .... (v)

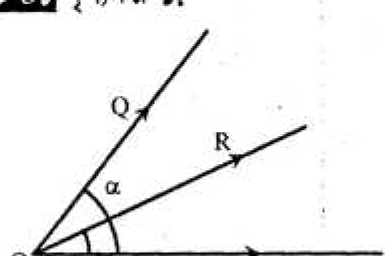
(iv) ও (v) বজ্রগুণন করে পাই,

$$\frac{P^2}{-8+10} = \frac{Q^2}{-5+8} = \frac{R^2}{4-2}$$

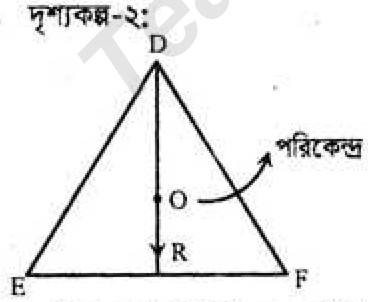
বা, $\frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$ বা, $\frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$\therefore P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶৪১ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



[বাংলাদেশ নৌবাহিনী কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. দেখাও যে, দুটি সমান বলের লব্ধি তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে। ২

খ. R, P বলের সাথে $\frac{\alpha}{3}$ কোণ তৈরি করলে দেখাও যে, $R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}; P > Q$. ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে DO বরাবর ক্রিয়াশীল বল R হলে দেখাও যে, R বলের E ও F বিন্দুগামী সমান্তরাল অংশকদ্বয়ের অনুপাত = sin 2E sin2F. ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক P ও Q সমান হলে,

$$R = \sqrt{P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha} = \sqrt{2P^2(1 + \cos\alpha)}$$

$$= \sqrt{4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

এবং $\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

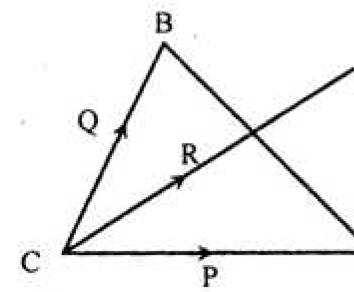
সুতরাং কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বলের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে। (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৪

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৮

প্রশ্ন ▶৪২ দৃশ্যকল্প-১: O বিন্দুতে OA, OB, OC বরাবর, যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি বল ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে।

দৃশ্যকল্প-২:



চিত্রে C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R

[খাগড়াছড়ি সরকারি কলেজ]

ক. দৃশ্যকল্প-১ এ P = Q = R হলে, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ, P ও R এর মধ্যবর্তী কোণের দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $R^2 = Q(Q - P)$. ৪

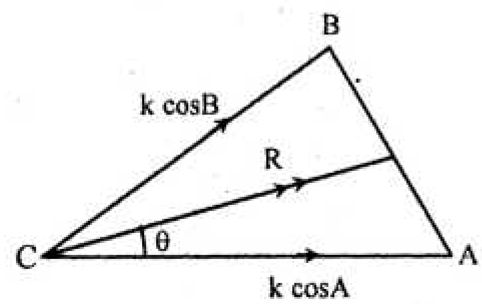
গ. দৃশ্যকল্প-২ এ P ও Q বলদ্বয় cosA ও cosB এর সমানুপাতিক হলে দেখাও যে, ইহাদের লব্ধি sinC এর সমানুপাতিক এবং লব্ধি C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এ দুই অংশে বিভক্ত করে। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৩৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭১

খ সৃজনশীল ২৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৭

গ মনে করি, ABC ত্রিভুজের CA এবং CB বরাবর ক্রিয়ারত kcosA এবং kcosB বলদ্বয়ের লব্ধি R, kcosA এর সাথে θ কোণে আনত।



সুতরাং লব্ধি বল kcosB-এর সাথে C − θ কোণে আনত।

$\therefore R^2 = (k\cos A)^2 + (k\cos B)^2 + 2.k\cos A.k\cos B.\cos C$

বা, $R^2 = k^2\{\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A.\cos B.\cos C\}$ .... (i)

আবার, আমরা জানি, $A + B + C = \pi$ হলে

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$

$\therefore \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1 - \cos^2 C$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $R^2 = k^2(1 - \cos^2 C)$

$= k^2.\sin^2 C$

$\therefore R = k.\sin C$

সুতরাং লব্ধি বল sinC-এর সমানুপাতিক।

এখন, $\tan\theta = \frac{k\cos B.\sin C}{k\cos A + k\cos B.\cos C}$

$= \frac{\cos B.\sin C}{\cos A + \cos B.\cos C}$

$= \frac{\cos B.\sin C}{\cos\{\pi - (B + C)\} + \cos B.\cos C}$

$= \frac{\cos B.\sin C}{-\cos(B + C) + \cos B.\cos C}$

$= \frac{\cos B.\sin C}{-\cos B.\cos C + \sin B.\sin C + \cos B.\cos C}$

বা, $\tan\theta = \frac{\cos B.\sin C}{\sin B.\sin C}$

বা, $\tan\theta = \cot B$

$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$

$= \tan\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\frac{A-B+C}{2}\right)$

$\therefore \theta = \frac{1}{2}(A - B + C)$

এবং $C - \theta = C - \frac{1}{2}(A - B + C) = \frac{1}{2}(C - A + B)$

সুতরাং লব্ধি বল C-কোণকে $\frac{1}{2}$ (C+ B – A)

এবং $\frac{1}{2}$ (C+A–B) এই দুইটি অংশে বিভক্ত করে। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৪৩ P, Q, R তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে A, B, C শীর্ষবিন্দুতে একই দিকে ক্রিয়াশীল আছে।

[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]

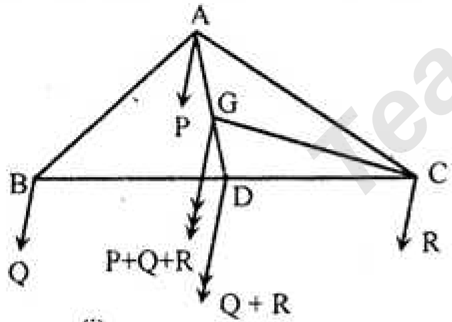
ক. P, Q এবং R বল তিনটির লব্ধি ABC ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রে ক্রিয়া করলে দেখাও যে, P = Q = R. ২

খ. P, Q, R বল তিনটির লব্ধি ABC ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, P : Q : R = a cosA : b cosB : c cosC ৪

গ. P, Q, R তিনটির লব্ধি ABC ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে, P : Q : R = sinA : sinB : sinC. ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C তিনটি কৌণিক বিন্দুতে P, Q, R সমমুখী সমান্তরাল বলগুলি ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি এই ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত। যেহেতু A বিন্দুতে P বল এবং G বিন্দুতে লব্ধি বল P + Q + R ক্রিয়াশীল সুতরাং B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি BC ও AGD- এর ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore$ Q.BD = R.CD .... (i)

যেহেতু AD মধ্যমা। $\therefore$ BD = CD .... (ii)

(i)নং সমীকরণকে (ii)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করি,

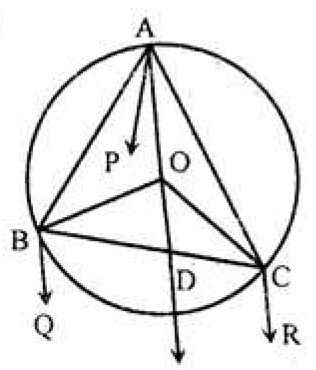
Q = R .... (iii)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, P = Q .... (iv)

$\therefore$ (iii) ও (iv) নং সমীকরণ হতে পাই P = Q = R **(দেখানো হলো)**

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q এবং R এর লব্ধি BC রেখাস্থ কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।



আবার তিনটি বলের লব্ধি O বিন্দুতে এবং P বলটি A বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে, Q এবং R এর লব্ধি AO রেখাস্থ কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত হবে। অতএব Q ও R এর লব্ধি BC এবং AOD রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়ারত হবে।

$\therefore \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}$ .... (1)

এখন, BOD ত্রিভুজে

$\frac{BD}{\sin BOD} = \frac{BO}{\sin BDO}$

এবং COD ত্রিভুজে $\frac{CD}{\sin COD} = \frac{CO}{\sin CDO}$

কিন্তু BO = CO এবং sinBDO = sinCDO

$\therefore \frac{BD}{\sin BOD} = \frac{CD}{\sin COD}$

বা, $\frac{\sin COD}{\sin BOD} = \frac{CD}{BD}$

বা, $\frac{CD}{BD} = \frac{\sin COD}{\sin BOD}$ .... (2)

বা, $\frac{Q}{R} = \frac{\sin COD}{\sin BOD}$ [(i)নং হতে]

বা, $\frac{Q}{R} = \frac{\sin(180° - COA)}{\sin(180° - AOB)} = \frac{\sin COA}{\sin AOB}$

বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ বলে ∠COA = 2B এবং ∠AOB = 2C

$\therefore \frac{Q}{R} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} = \frac{2\sin B.\cos B}{2\sin C.\cos C}$

বা, $\frac{Q}{R} = \frac{b\cos B}{c\cos C}$ .... (3) $\left[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\right]$

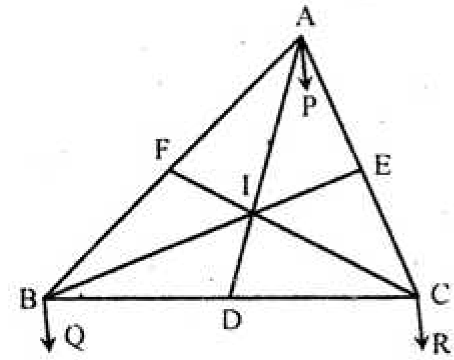
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\frac{P}{Q} = \frac{a\cos A}{b\cos B}$ .... (4)

সুতরাং (3) ও (4)নং সমীকরণ হতে পাই,

P : Q : R = acosA : bcosB : ccosC **(দেখানো হলো)**

গ ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। A, B, C কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে, I হলো, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।



এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R বলের লব্ধি (Q + R) বলটি BC রেখাস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

আবার, বল তিনটির লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুগামী। সুতরাং, I বিন্দু AD রেখার ওপর অবস্থান করবে।

অর্থাৎ, AD রেখা A কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ .... (i)

কিন্তু লব্ধি D বিন্দুগামী হওয়ায়, Q.BD = R.CD

বা, $\frac{BD}{CD} = \frac{R}{Q}$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{R}{Q} = \frac{AB}{AC}$ বা, $\frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC}$

$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$ বা, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ .... (iii)

আবার, ΔABC হতে সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .... (iv)

(iii) ও (iv) নং হতে পাই, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$

বা, $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৪ দৃশ্যকল্প-১: কোনো বিন্দুতে 2α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমমানের বলের লব্ধি R।

দৃশ্যকল্প-২ : ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে R, S, T মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\sqrt{3}$, 2 এবং 1 একক ওজনের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত বলদ্বয় 2β কোণে ক্রিয়ারত হলে যে লব্ধি হয় তার দ্বিগুণ R হলে, দেখাও যে, $\cos\alpha = 2\cos\beta$। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত বলগুলোর লব্ধি ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে, $\frac{R}{a} = \frac{S}{b} = \frac{T}{c}$। ৪

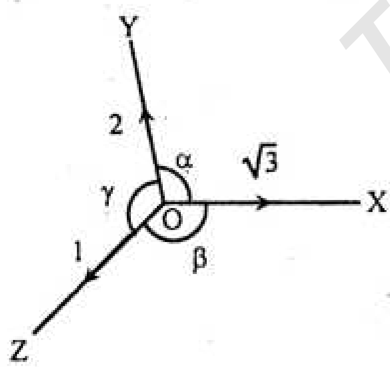
৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\sqrt{3}$, 2 এবং 1 মানের তিনটি বল O বিন্দুতে ক্রিয়ারত হয়ে যথাক্রমে OX, OY এবং OZ বরাবর ক্রিয়াশীল এবং বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

ধরি, $\sqrt{3}$ ও 2 এর মধ্যবর্তী কোণ α

$\sqrt{3}$ ও 1 এর মধ্যবর্তী কোণ β

এবং 2 ও 1 এর মধ্যবর্তী কোণ γ



যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে সুতরাং আমরা পাই,

$1^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2\sqrt{3}.2\cos\alpha$

বা, $1 = 3 + 4 + 4\sqrt{3}.\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = -\frac{6}{4\sqrt{3}}$

বা, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos\alpha = -\cos30°$

বা, $\cos\alpha = \cos(180° - 30°)$

বা, $\cos\alpha = \cos150°$

$\therefore \alpha = 150°$

এবং $(\sqrt{3})^2 = 2^2 + 1^2 + 2.2.1.\cos\gamma$

বা, $3 = 4 + 1 + 4\cos\gamma$

বা, $3 = 5 + 4\cos\gamma$

বা, $4\cos\gamma = -2$

বা, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\gamma = \cos120°$

$\therefore \gamma = 120°$

আবার, $2^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2.\sqrt{3}.1.\cos\beta$

বা, $4 = 3 + 1 + 2\sqrt{3}\cos\beta$

বা, $4 = 4 + 2\sqrt{3}\cos\beta$

বা, $0 = 2\sqrt{3}\cos\beta$

বা, $\cos\beta = 0$

বা, $\cos\beta = \cos90°$ $\therefore$ $\beta = 90°$

সুতরাং প্রদত্ত বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে অন্তর্ভুক্ত কোণ গুলি 150°, 120°, 90° **(Ans.)**

খ মনে করি, P মানের দুইটি সমান বল পরস্পর 2β কোণে ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি R

$\therefore R = \{P^2 + P^2 + 2P.P.\cos2\beta\}^{\frac{1}{2}}$

$= (2P^2 + 2P^2\cos2\beta)^{\frac{1}{2}}$

$= \{2P^2.(1 + \cos2\beta)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{4P^2\cos^2\beta\}^{\frac{1}{2}}$

$\therefore R = 2P\cos\beta$ .... (i)

আবার, বলদ্বয় পরস্পর 2α কোণে ক্রিয়ারত হলে

$2R = \{P^2 + P^2 + 2P.P.\cos2\alpha\}^{\frac{1}{2}}$

$= (2P^2 + 2P^2.\cos2\alpha)^{\frac{1}{2}}$

$= (4P^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$

বা, $2.2P\cos\beta = 2P\cos\alpha$ [(i)নং হতে]

বা, $2\cos\beta = \cos\alpha$

$\therefore$ $\cos\alpha = 2\cos\beta$ **(দেখানো হলো)**

গ ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে R, S, T মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। A, B, C কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে, I হলো, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত S ও T বলের লব্ধি (S + T) বলটি BC রেখাস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

আবার, বল তিনটির লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুগামী। সুতরাং, I বিন্দু AD রেখার ওপর অবস্থান করবে।

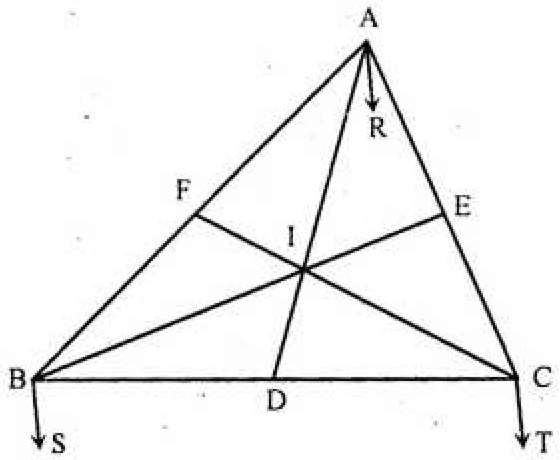
অর্থাৎ, AD রেখা A কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ .... (i)

কিন্তু লব্ধি D বিন্দুগামী হওয়ায়, $S.BD = T.CD$

বা, $\frac{BD}{CD} = \frac{T}{S}$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{T}{S} = \frac{AB}{AC}$ বা, $\frac{S}{AC} = \frac{T}{AB}$



অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{R}{BC} = \frac{S}{AC}$

$\therefore \frac{R}{BC} = \frac{S}{AC} = \frac{T}{AB}$ বা, $\frac{R}{a} = \frac{S}{b} = \frac{T}{c}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৫ দৃশ্যকল্প-১: পরস্পর θ কোণে ক্রিয়াশীল P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $(2\psi + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$, যখন তারা $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ কোণে ক্রিয়া করে, তখন লব্ধির মান $(2\psi - 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ হয়।

দৃশ্যকল্প-২: একটি বস্তুর A ও B বিন্দুতে কার্যরত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q (P > Q) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যাবে। *[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]*

ক. বলের সামান্তরিক সূত্রটি ব্যাখ্যা কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে প্রমাণ কর যে, $\psi = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $d = \frac{P - Q}{P + Q}AB$। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫৯

খ θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2\psi + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ হলে আমরা পাই,

$\{(2\psi + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

বা, $(4\psi^2 + 4\psi + 1)(P^2 + Q^2) = (P^2 + Q^2) + 2PQ\cos\theta$

বা, $(P^2 + Q^2)(4\psi^2 + 4\psi + 1 - 1) = 2PQ\cos\theta$

বা, $(P^2 + Q^2).4\psi(\psi + 1) = 2PQ\cos\theta$ .... (i)

আবার, $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2\psi - 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ হলে আমরা পাই,

$\{(2\psi - 1)\sqrt{P^2 + Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

বা, $(4\psi^2 - 4\psi + 1)(P^2 + Q^2) = (P^2 + Q^2) + 2PQ\sin\theta$

বা, $(P^2 + Q^2).4\psi(\psi - 1) = 2PQ\sin\theta$ .... (ii)

এখন (ii)নং সমীকরণকে (i)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে,

$\tan\theta = \frac{4\psi(\psi - 1)(P^2 + Q^2)}{4\psi(\psi + 1)(P^2 + Q^2)}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\psi - 1}{\psi + 1}$

বা, $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\psi + 1}{\psi - 1}$

বা, $\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \frac{\psi + 1 + \psi - 1}{\psi + 1 - \psi + 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \frac{2\psi}{2}$

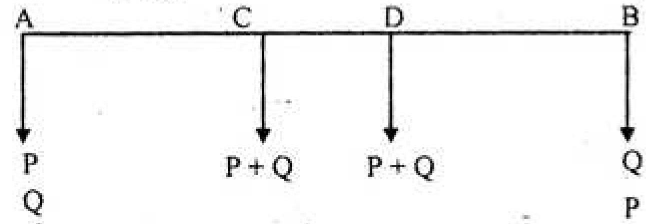
$\therefore \psi = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q (P > Q) বলদ্বয় ক্রিয়ারত আছে। তাহলে, P. AC = Q. BC

বা, P.AC = Q(AB − AC)

বা, (P + Q) AC = Q.AB

$\therefore AC = \frac{Q}{P + Q}.AB$ .... (i)



এখন, P ও Q বলদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করলে A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে Q ও P বলদ্বয় ক্রিয়া করবে এবং মনে করি, তাদের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

তাহলে, Q. AD = P. BD

বা, Q. AD = P(AB − AD)

বা, (P + Q) AD = P.AB

$\therefore AD = \frac{P}{P + Q}.AB$ .... (ii)

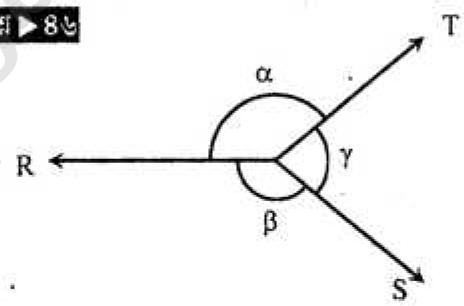
$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব d = CD = AD − AC

$= \frac{P}{P + Q}.AB - \frac{Q}{P + Q}.AB$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$= \frac{1}{P + Q}(P - Q).AB$

$\therefore d = \frac{P - Q}{P + Q}.AB$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৬



[সরকারি বি এল কলেজ, খুলনা]

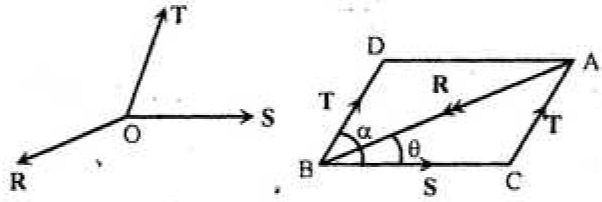
ক. S, T, R দ্বারা কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু সূচিত হয় তবে বলগুলোর লব্ধি ব্যাখ্যা কর। ২

খ. S, T, R বলগুলো ভারসাম্যে থাকলে দেখাও যে, $\frac{S}{\sin\alpha} = \frac{T}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$ ৪

গ. উদ্দীপকে বর্ণিত বলগুলো ΔABC এর শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব অভিমুখে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে, S : T : R = a : b : c ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল S, T ও R এর মান ও দিক যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহু দ্বারা সূচিত।

BC ∥ AD এবং CA ∥ BD অঙ্কন করে BCAD সামান্তরিক গঠন করি। সমান্তরাল হওয়ায় CA ও BD দ্বারা একই বল T সূচিত হবে।

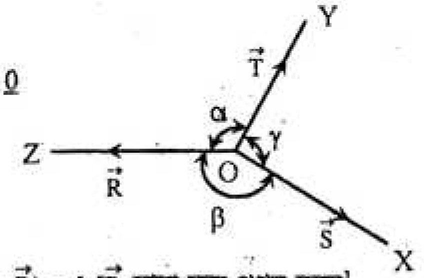
এখন বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, BC ও BD দ্বারা সূচিত S ও T এর লব্ধি R, BA দ্বারা সূচিত এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত হবে। অর্থাৎ এই বলটি AB দ্বারা সূচিত R বলের সমান কিন্তু বিপরীতমুখী হবে এবং পরস্পর নিষ্ক্রিয় করবে। সুতরাং বল তিনটি সাম্যবস্থার সৃষ্টি করবে।

খ O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর কার্যরত যথাক্রমে S, T ও R মানের বলসমূহ সাম্যারস্থায় আছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{S}{\sin\alpha}=\frac{T}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\gamma}$

প্রমাণ: যেহেতু $\vec{S}, \vec{T}$ ও $\vec{R}$ বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। তাদের লব্ধি শূন্য।

$\therefore\quad \vec{S}+\vec{T}+\vec{R}=\underline{0}$



বা, $\vec{R}\times(\vec{S}+\vec{T}+\vec{R})=\underline{0}$ [$\vec{R}$ দ্বারা ক্রস গুণন করে]

বা, $\vec{R}\times\vec{S}+\vec{R}\times\vec{T}+\vec{R}\times\vec{R}=\underline{0}$

বা, $\vec{R}\times\vec{S}-\vec{T}\times\vec{R}+\underline{0}=0$

বা, $\vec{R}\times\vec{S}=\vec{T}\times\vec{R}$

বা, $|RS\sin\beta\,\hat{\eta}|=|TR\sin\alpha\,\hat{\eta}|$

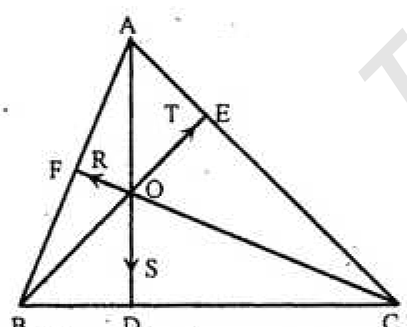
[এখানে, $\hat{\eta}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{S}, \vec{T}$ ও $\vec{R}$ এর ক্রিয়ারেখার সমতলের সাথে লম্ব]

বা, $S\sin\beta=T\sin\alpha$

বা, $\frac{S}{\sin\alpha}=\frac{T}{\sin\beta}$ অনুরূপে, $\frac{T}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\gamma}$

সুতরাং $\frac{S}{\sin\alpha}=\frac{T}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\gamma}$ **(দেখানো হলো)**

গ ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর ওপর লম্বভাবে ক্রিয়ারত তিনটি বল S, T, R এর ক্রিয়ারেখা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। কাজেই বলগুলির ক্রিয়াবিন্দু O হিসেবে বিবেচনা করা যায়। আবার বলত্রয় সাম্যাবস্থা তৈরি করে বলে লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,



$\frac{S}{\sin EOF}=\frac{T}{\sin DOF}=\frac{R}{\sin EOD}$

যেহেতু AEOF চতুর্ভুজে $\angle AEO=\angle AFO=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\quad \angle EOF+\angle A=\pi$

বা, $\angle EOF=\pi-A$

অনুরূপভাবে, $\angle DOF=\pi-B$ এবং $\angle EOF=\pi-C$

$\therefore\quad \frac{S}{\sin(\pi-A)}=\frac{T}{\sin(\pi-B)}=\frac{R}{\sin(\pi-C)}$

বা, $\frac{S}{\sin A}=\frac{T}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}$ .... (i)

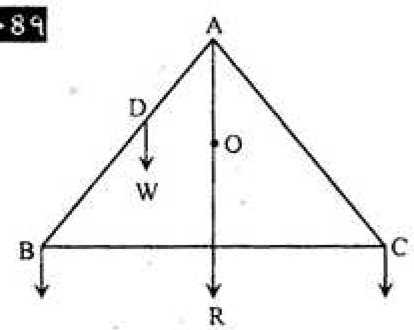
এখন, ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে পাই,

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ...... (ii)

(i) ও (ii)নং হতে পাই, $\frac{S}{a}=\frac{T}{b}=\frac{R}{c}$ অর্থাৎ $S : T : R = a : b : c$

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ৪৭



ΔABC এর পরিকেন্দ্র O এবং AB একটি মসৃন তল যার D বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তু সাম্যবস্থায় রয়েছে।

[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]

ক. একজন লোক একটি লাঠি কাঁধের উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে 10 kg ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। যদি তার কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে 2 মি. ও $\frac{1}{2}$ মি. হয়, তবে তার কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। ২

খ. P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে AB সমতলের দৈর্ঘ্য এবং ভূমির সমান্তরাল থেকে এককভাবে W ওজনের বস্তুকে ধরে রাখতে পারলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত R বলের সমান্তরাল অংশদ্বয়ের অনুপাত $\sin 2B : \sin 2C$. ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, AB দন্ডের B বিন্দুতে ওজন W = 10kg, A বিন্দুতে লোকটির হাতের সাহায্যে নীচের দিকে চাপ T এবং তার কাঁধের উপর C বিন্দুতে চাপ R হলে,

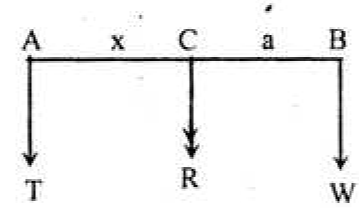
$R=T+W$ .... (1)

আবার, T ও W বলদ্বয়ের লব্ধি R হওয়ায়,

$T.AC=W.BC$ [এখানে $AC=x=\frac{1}{2}$ মি., $BC=a=2$ মি.]

বা, $T.x=W.a$

$\therefore\quad T=\frac{Wa}{x}$



এখন, (1)নং সমীকরণে T-এর মান বসিয়ে পাই,

$R=\frac{Wa}{x}+W=W\left(1+\frac{a}{x}\right)$

$\therefore\quad R=W\left(1+\frac{a}{x}\right)$

$=10\left(1+\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)=10(1+4)=50$ kg **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

★ বলবিদ্যার প্রাথমিক ধারণা, বলের ক্রিয়াবিন্দুর স্থানান্তর বিধি, বলের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া

১. ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে বিভক্ত করার অনুপাত কোনটি? (সহজ)

ক 1 : 3 খ 2 : 5
গ 2 : 1 ঘ 1 : 1 **গ**

২. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুকে বলা হয়? (সহজ)

ক ভরকেন্দ্র খ পরিকেন্দ্র
গ লম্বকেন্দ্র ঘ অন্তঃকেন্দ্র **গ**

৩. $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ বল তিনটির লব্ধি $3.\vec{OG}$ হলে G বিন্দুটি ΔABC এর নির্দেশ করে? (সহজ)

ক পরিকেন্দ্র খ লম্বকেন্দ্র
গ ভরকেন্দ্র ঘ অন্তঃকেন্দ্র **গ**

★★ দুইটি বলের লব্ধি

৪. যখন বলদ্বয় সমান ও একই রেখায় বিপরীত মুখী হয় তখন লব্ধির মান কত? (সহজ)

ক −1 খ 0
গ 1 ঘ 2 **খ**

৫. এক বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধি R যদি P = Q = R হয়, তবে α এর মান— (মধ্যম)

ক 30° খ 60°
গ 90° ঘ 120° **ঘ**

ব্যাখ্যা: $P^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P.\cos\alpha$
বা, $P^2 = P^2 + P^2 + 2.P^2\cos\alpha$
বা, $2P^2\cos\alpha = -P^2$
বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ $\therefore \alpha = 120°$

৬. বলদ্বয় সমান (P = Q) এবং লম্বভাবে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান নিচের কোনটি হবে? (সহজ)

ক $\sqrt{3}P$ খ $\sqrt{2}P$
গ $\sqrt{2+3}P$ ঘ $(\sqrt{3}-\sqrt{2})P$ **খ**

৭. দুইটি সমান বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পর লম্ব। এদের লব্ধি বলদ্বয়ের সমষ্টির ——(সহজ)

ক অর্ধেক খ দ্বিগুণ
গ $\sqrt{2}$ গুণ ঘ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গুণ **ঘ**

৮. কোন বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে থাকলে সমান বলদ্বয় কত নিউটন? (কঠিন)

ক $\sqrt{3}$ খ $2\sqrt{3}$
গ $3\sqrt{3}$ ঘ $4\sqrt{3}$ **গ**

ব্যাখ্যা: R = 9 হলে, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow 9 = 2P\cos30° \Rightarrow 9 = 2P\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow P = 3\sqrt{3}$

৯. এক বিন্দুতে 45° কোণে ক্রিয়াশীল P ও $\sqrt{2}$N বলের লব্ধি $\sqrt{10}$N হলে, P এর মান— (মধ্যম)

ক 2N খ 3N
গ 5N ঘ 7N **ক**

১০. এক বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তর বলটির মান 10N এবং এদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলটির উপর লম্ব। লব্ধির মান কত? (কঠিন)

ক $3\sqrt{3}$N খ $5\sqrt{2}$N
গ $5\sqrt{3}$N ঘ 10N **গ**

১১. একটি বলের অনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশের মান যথাক্রমে 8N ও 6N হলে বলটির মান—(মধ্যম)

ক 10N খ 12N
গ 14N ঘ $2\sqrt{3}$N **ক**

১২. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ বাড়লে লব্ধির মানে কিরূপ পরিবর্তন হয়? (সহজ)

ক হ্রাস পায় খ বৃদ্ধি পায়
গ একই থাকে ঘ ঋণাত্মক হয় **ক**

১৩. 3P এবং 2P মানের বল দুইটির লব্ধির মান R. প্রথম বল দ্বিগুণ হলে লব্ধির মান ও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত ডিগ্রি? (কঠিন)

ক 0 খ 60
গ 120 ঘ 150 **গ**

ব্যাখ্যা: ১ম ক্ষেত্রে, $R^2 = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha$ ... (i)
২য় ক্ষেত্রে, $4R^2 = 36p^2 + 4p^2 + 2.6p.2p\cos\alpha$,
$R^2 = 10P^2 + 6P^2\cos\alpha$ .... (ii)
(i) − (ii) $\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120°$

১৪. দুটি সমান মানের P বলের মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধির সাথে উৎপন্ন কোণ θ হলে নিচের কোণ সম্পর্কটি সঠিক? (সহজ)

ক $\theta = \alpha$ খ $\alpha = \frac{\theta}{2}$
গ $\theta = 3\alpha$ ঘ $\theta = \frac{\alpha}{2}$ **ঘ**

১৫. $\sqrt{5}$ এককের দুইটি সমান বল 120° কোণে একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির মান— (মধ্যম)

ক $2\sqrt{5}$ খ $\sqrt{5}$
গ 5 ঘ $3\sqrt{5}$ **খ**

১৬. P মানের দুইটি বলের লব্ধি $P\sqrt{2+\sqrt{2}}$ । এদের যেকোন একটির সাথে লব্ধির নতি কোনটি? (কঠিন)

ⓚ 22.5°　　ⓚ 45°

ⓖ 120°　　ⓖ 90°　　**ক**

ⓚ 22.5° — (ক) 22.5°　(খ) 45°　(গ) 120°　(ঘ) 90°

ব্যাখ্যা: $(P\sqrt{2+\sqrt{2}})^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha$

বা, $P^2(2+\sqrt{2}) = 2P^2 + 2P^2\cos\alpha$

বা, $2+\sqrt{2} = 2 + 2\cos\alpha$

বা, $2\cos\alpha = \sqrt{2}$

বা, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos45°$

$\therefore \alpha = 45°$

∴ যে কোন একটির সাথে লব্ধির নতি

$= \frac{\alpha}{2} = 22.5°$

১৭. 12N ও 5N মানের দুটি বল একটি কণার উপরে ক্রিয়া করে এবং বল দুইটি দ্বারা সৃষ্ট কোণ 60° হলে বল দুইটির লব্ধি প্রথম বলের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করবে? (মধ্যম)

(ক) 15.3　(খ) 15.5

(গ) 15.63　(ঘ) 16.63　**ঘ**

ব্যাখ্যা: $\tan\theta = \frac{5\sin60°}{12 + 5\cos60°}$ $\therefore \theta = 16.63°$

১৮. P এবং 2P সমবিন্দু দুইটি বলের প্রথমটিকে দ্বিগুণ করলে দ্বিতীয়টির সাথে 8 একক বল বৃদ্ধি করলে এদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান কত? (কঠিন)

(ক) 4 একক　(খ) 8 একক

(গ) 12 একক　(ঘ) কোনটি নয়　**ক**

ব্যাখ্যা: যেহেতু লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে

$\therefore \frac{P}{2P} = \frac{2P}{2P+8}$ বা, $4P = 2P + 8$

$\therefore P = 4$

১৯. P এবং $10\sqrt{2}$ এককের সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি P বলের উপর লম্ব এবং লব্ধির মান P বলের এক-তৃতীয়াংশ। P এর মান কত একক? (কঠিন)

(ক) $5\sqrt{2}$　(খ) $6\sqrt{5}$

(গ) 10　(ঘ) $15\sqrt{2}$　**ঘ**

২০. দুইটি সমবিন্দু বলের বৃহত্তম লব্ধির মান 17N এবং বল দুইটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান 13N, বলদ্বয়ের লব্ধির ক্ষুদ্রতর মান— (কঠিন)

(ক) 5N　(খ) 6N

(গ) 7N　(ঘ) 8N　**গ**

২১. একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বলের লব্ধি শূন্য হলে—

i. বলদ্বয় সমান হয়

ii. বলদ্বয় একই রেখায় বিপরীতমুখী হবে

iii. সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii　(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii　(ঘ) i, ii ও iii　**ঘ**

২২. লব্ধি বল—

i. বৃহত্তর বলের দিকে বেশি করে হেলানো থাকে

ii. এর মান হ্রাস পায় বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ বাড়লে

iii. ঋণাত্মক হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii　(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii　(ঘ) i, ii ও iii　**ক**

২৩. 5N, 7N ও 8N বলত্রয় ভিন্ন ভিন্ন রেখায় ক্রিয়ারত থেকে একটি বস্তুকে সাম্যাবস্থায় রাখলে —

i. বল তিনটির লব্ধির মান শূন্য

ii. প্রথম বল দুইটির লব্ধির মান তৃতীয় বলটির সমান

iii. ১ম ও ২য় বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii　(খ) ii ও iii

(গ) i ও iii　(ঘ) i, ii ও iii　**ক**

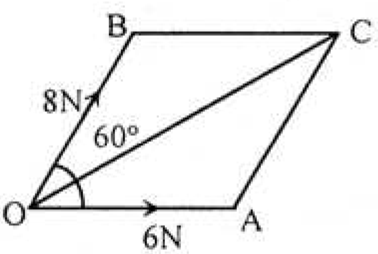
ব্যাখ্যা: (iii) $8^2 = 5^2 + 7^2 + 2.5.7\cos\alpha$

বা, $64 = 25 + 49 + 70\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{7}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right) = 98.21°$

উদ্দীপকের আলোকে (২৪-২৬)নং তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



২৪. লব্ধির মান কত? (মধ্যম)

(ক) 148　(খ) 52

(গ) $2\sqrt{37}$　(ঘ) $2\sqrt{13}$　**গ**

২৫. ∠AOC কত? (মধ্যম)

(ক) $2\sqrt{3}$　(খ) $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

(গ) $\frac{3\sqrt{3}}{11}$　(ঘ) $\frac{2}{3+2\sqrt{3}}$　**খ**

২৬. উদ্দীপকের আলোকে—

i. লব্ধির মান ও দিক OC দ্বারা সূচিত

ii. $\angle AOC < \angle BOC$

iii. $OA = 12$ cm হলে $OB = 9$ cm

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ⓚh i ও ii

ⓖ i ও iii ⓖh i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: (i) লব্ধির মান ও দিক OC দ্বারা সূচিত

(ii) $\therefore 8N > 6N, \therefore \angle BOC < \angle AOC$

(iii) $\frac{6}{12} = \frac{8}{OB}$ বা, $OB = \frac{96}{6}$

$\therefore OB = 16$ cm

নিচের তথ্যের আলোকে (২৭ ও ২৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একই বিন্দুতে কার্যরত দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 14 একক এবং বলদ্বয় যখন লম্বভাবে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধি 10 একক।

২৭. **ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান কত একক?** (সহজ)

ক 1 খ 2

গ 3 ঘ 4 **খ**

ব্যাখ্যা: $P + Q = 14; P^2 + Q^2 = 100 \therefore P - Q = 2$

২৮. **বলদ্বয়ের মান কত একক?** (মধ্যম)

ক 8, 7 খ 10, 4

গ 8, 6 ঘ 12, 2 **গ**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (২৯ ও ৩০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

P ও Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে $G = 4N$ ও $L = 2N$. $(P > Q)$

২৯. **P ও Q এর মান কোনটি?** (মধ্যম)

ক $P = 3, Q = 1$ খ $P = 1, Q = 3$

গ $P = 2, Q = 2$ ঘ $P = 3, Q = 3$ **ক**

৩০. **বৃহত্তম লব্ধি ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি বলদ্বয়ের লব্ধি 2N হলে G ও L এর অন্তর্ভুক্ত কোণ কোনটি?** (মধ্যম)

ক 60° খ 90°

গ 120° ঘ 180° **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৩১ ও ৩২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে 8N ও 2N.

৩১. **বল দুইটির মান কত নিউটন?** (মধ্যম)

ক 6, 2 খ 4, 2

গ 4, 4 ঘ 5, 3 **ঘ**

৩২. **বলদ্বয় 60° কোণে ক্রিয়ারত থাকলে লব্ধির মান কত নিউটন হবে?** (মধ্যম)

ক 2 খ 5

গ 7 ঘ 8 **গ**

ব্যাখ্যা: $R = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2.5.3.\cos 60°}$

$= \sqrt{49} = 7N$

★★ বলের অংশক, বলজোটের লব্ধি

৩৩. **দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 12 নিউটন তাদের একটি হতে 3 মি. ও অপরটি হতে 4 মি. দূরে ক্রিয়া করে। বলদ্বয় কত?** (কঠিন)

ক 48 নিউটন, 36 নিউটন

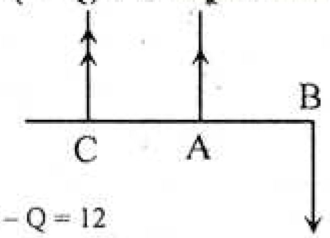
খ 24 নিউটন, 18 নিউটন

গ 48 নিউটন, 45 নিউটন

ঘ 60 নিউটন, 90 নিউটন **ক**

ব্যাখ্যা: মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয় P ও Q, $P > Q$

এদের লব্ধি $(P - Q)$ যা C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।



প্রশ্নমতে, $P - Q = 12$

$AC = 3$ মিটার, $BC = 4$ মিটার

$\therefore AB = BC - AC = 4 - 3 = 1$ মিটার

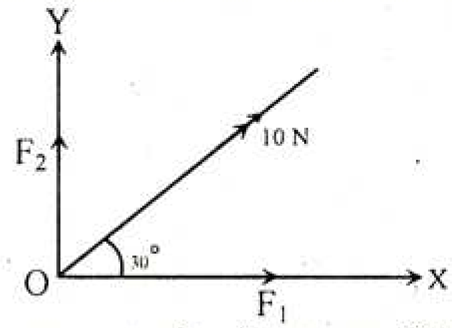
$P.AC = Q.BC$

বা, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P - Q}{BC - AC} = \frac{12}{AB} = \frac{12}{1} = 12$

$\therefore P = 12 \times BC = 12 \times 4 = 48$ নিউটন

$Q = 12 \times AC = 12 \times 3 = 36$ নিউটন

নিচের তথ্যের আলোকে (৩৪-৩৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৩৪. **10N বলের আনুভূমিক উপাংশ কত নিউটন?** (সহজ)

ক $\sqrt{3}$ খ $4\sqrt{3}$

গ $5\sqrt{3}$ ঘ $6\sqrt{3}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $F_1 = 10\cos 30° = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}N$

৩৫. **10N বলের উল্লম্ব উপাংশ কত নিউটন?** (সহজ)

ক 4 খ 5

গ 6 ঘ 10 **খ**

ব্যাখ্যা: $F_2 = 10\sin 30°$

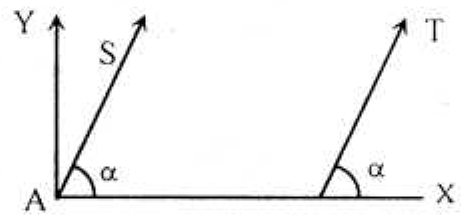
$= 10 \times \frac{1}{2} = 5N$

৩৬. $F_1{}^2 + F_2{}^2 = ?$ (সহজ)

ক 25 খ 50

গ 75 ঘ 100 **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৩৭ ও ৩৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৩৭. AX বরাবর S বলের উপাংশ কত? (মধ্যম)

ক $S \sin\alpha$ খ $T \cos\alpha$

গ $T \sin\alpha$ ঘ $S \cos\alpha$ **ঘ**

৩৮. AY বরাবর T বলের উপাংশ কত? (মধ্যম)

ক $S \sin\alpha$ খ $T \cos\alpha$

গ $T \sin\alpha$ ঘ $S \cos\alpha$ **গ**

★★বলজোটের সাম্যাবস্থা, সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্র

৩৯. P, Q ও R মানের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক? (সহজ)

ক $P + Q = R$ খ $R - Q = R$

গ $P = Q + R$ ঘ $P + Q + R = O$ **ঘ**

৪০. নিচের কোন তিনটি বল কখনো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে না? (মধ্যম)

ক 3, 3, 6   খ 3, 4, 7

গ 2, 3, 5   ঘ 2, 3, 6   **ঘ**

ব্যাখ্যা: $6^2 = 2^2 + 3^2 + 2.2.3 \cos\alpha$

বা, $36 = 4 + 9 + 12 \cos\alpha$

বা, $12 \cos\alpha = 36 - 13$

বা, $\cos\alpha = \frac{23}{12} > 1$

$\therefore$ 2, 3, 6 বল তিনটি কখনো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে না।

৪১. একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল যদি পরিমাণে ও দিকে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে তিনটি বাহু দ্বারা প্রকাশ করা যায় তবে তিনটি বলের লব্ধির মান কত? (সহজ)

ক 0   খ 1

গ −1   ঘ ∞   **ক**

৪২. লব্ধি, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ হলে সাম্যাবস্থা হবে—

i. $R = 0$ হলে

ii. $x = 0, y \neq 0$ হলে

iii. $X = 0, Y = 0$ হলে

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii   **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৪৩ ও ৪৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

P, Q, R সুস্থিত তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 30, 40, 50 সে.মি.। $P + Q = 42$ গ্রাম ওজন।

৪৩. P বলের ওজন কত গ্রাম? (মধ্যম)

ক 12   খ 15

গ 18   ঘ 20   **গ**

ব্যাখ্যা: $\frac{P}{30} = \frac{Q}{40} = \frac{R}{50}$

$\Rightarrow \frac{P}{3} = \frac{Q}{4} = \frac{R}{5}$

$= \frac{P + Q}{3 + 4} = \frac{42}{7} = 6$

$\therefore P = 18$ গ্রাম।

৪৪. Q বলের মান কত গ্রাম ওজন? (সহজ)

ক 12   খ 20

গ 23   ঘ 24   **ঘ**

★★সাম্যাবস্থায় লামির উপপাদ্য, সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার শর্ত

৪৫. কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে, যেখানে ১ম ও ২য় বলের অন্তর্গত কোণ 90° এবং ২য় ও ৩য় বলের অন্তর্গত কোণ 120° হলে বল তিনটির অনুপাত কোনটি? (কঠিন)

ক $\sqrt{2} : 1 : 2$ খ $2 : 1 : \sqrt{2}$

গ $3 : 1 : \sqrt{2}$ ঘ $\sqrt{3} : 1 : 2$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{P}{\sin 120^\circ} = \frac{Q}{\sin(90^\circ + 60^\circ)} = \frac{R}{\sin 90^\circ}$

$\Rightarrow P : Q : R = \sqrt{3} : 1 : 2$

৪৬. 5 kg ওজনের একটি বস্তুকে দুটি বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। একটি অনুভূমিক এবং অপরটি অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করলে বলদ্বয় কত কেজি ওজন? (কঠিন)

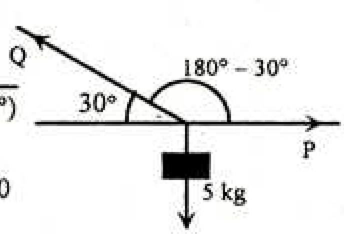
ক $5, 2\sqrt{3}$ খ $5, 5\sqrt{3}$

গ $10, \sqrt{3}$ ঘ $10, 5\sqrt{3}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{P}{\sin(90^\circ + 30^\circ)}$

$= \frac{Q}{\sin 90^\circ}$

$= \frac{5}{\sin(180^\circ - 30^\circ)}$



$\therefore P = 5\sqrt{3}; Q = 10$

৪৭. 125N ওজনের গোলক ছাদের দুই প্রান্তের সাথে বাধা একটি দড়ির মধ্যে বাধা আছে। দড়িটির দুই প্রান্তে ছাদের সাথে 37° ও 53° কোণ তৈরি করলে দড়ির দুই প্রান্তে টান কত নিউটন? (মধ্যম)

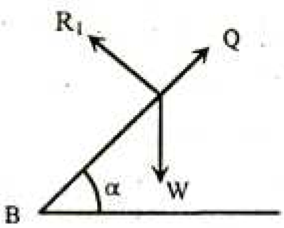
ক 75.950 খ 100.01, 25
গ 75.2, 99.9 ঘ 60, 65 **(গ)**

ব্যাখ্যা: $\frac{T_1}{\sin 53°} = \frac{T_2}{\sin 37°} = \frac{125}{\sin 90°}$

$\therefore$ $T_1 = 99.9$ N, $T_2 = 75.2$ N

৪৮. ABC ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুতে 2, 2 ও P মানের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে এবং এদের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী হলে P এর মান—(কঠিন)

ক 2 খ 3
গ 4 ঘ 5 **(ক)**



৪৯. চিত্রানুযায়ী লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\text{cosec}^2\alpha$ এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

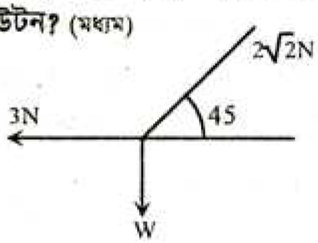
ক $W^2 + Q^2$ খ $W^2 - Q^2$
গ $\frac{Q^2}{W^2}$ ঘ $\frac{W^2}{Q^2}$ **(ঘ)**

ব্যাখ্যা: $\frac{W}{\sin 90°} = \frac{Q}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{R_1}{\sin(90° + \alpha)}$

$\Rightarrow \frac{W}{1} = \frac{Q}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow \text{cosec}^2\alpha = \frac{W^2}{Q^2}$

৫০. চিত্রে W ওজনের বস্তুটি $2\sqrt{2}$N ও 3N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে থাকলে w এর মান কত নিউটন? (মধ্যম)



ক $4\sqrt{2}$ খ $3\sqrt{2}$
গ 2 ঘ 1 **(গ)**

ব্যাখ্যা: লামীর সূত্রানুযায়ী, $\frac{W}{\sin 135°} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 90°}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{1}$

$\Rightarrow W = 2\sqrt{2} \times \sin 135° = 2$ N

৫১. একটি হেলানো তলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরাল ক্রিয়াশীল যথাক্রমে S ও T দুইটি পৃথক বল এর প্রত্যেকে একাকী W ওজনের কোনো বস্তুকে সমতলের উপর স্থিরভাবে ধরে রাখে এবং কোণ α হলে S ও W বলের অনুপাত কোনটি? (কঠিন)

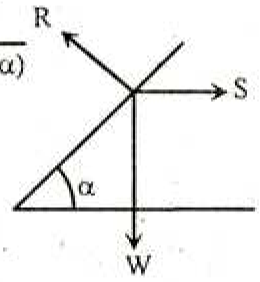
ক $\tan\alpha : 1$ খ $\cot\alpha : 1$
গ $\sin\alpha : 1$ ঘ $\cos\alpha : 1$ **(ক)**

ব্যাখ্যা: লামীর উপপাদ্য হতে,

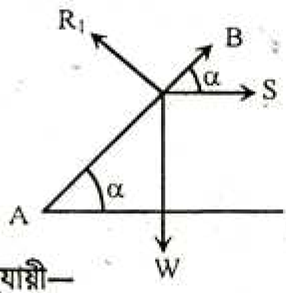
$= \frac{S}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90° + \alpha)}$

$\Rightarrow \frac{S}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow S : W = \tan\alpha : 1$



৫২.



চিত্রানুযায়ী—

i. লামীর সূত্রানুসারে $\frac{R_1}{1} = \frac{S}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha}$

ii. $\cot^2\alpha = W^2 + S^2$

iii. $\cot^2\alpha = \frac{W^2}{S^2}$

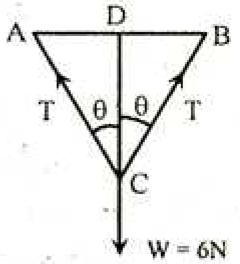
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **(খ)**

ব্যাখ্যা: $\frac{R_1}{1} = \frac{S}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha}$ $\therefore \frac{W}{S} = \cot\alpha$

$\Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{W^2}{S^2}$

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৩ ও ৫৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



; CD = 3, BC = 5

৫৩. চিত্রানুযায়ী লামীর সূত্রানুসারে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ $\frac{T}{\sin\theta} = \frac{T}{\cos\theta} = \frac{W}{\sin 2\theta}$

ⓛ $\frac{T}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin 2\theta} = \frac{W}{\sin 2\theta}$

ⓖ $\frac{T}{\sin 2\theta} = \frac{T}{\sin 2\theta} = \frac{W}{\sin\theta}$

ⓘ $\frac{T}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin\theta} = \frac{W}{\sin 2\theta}$ **ঘ**

৫৪. টান T এর মান কত নিউটন? (কঠিন)

ক 3 খ 4

গ 5 ঘ 6 **গ**

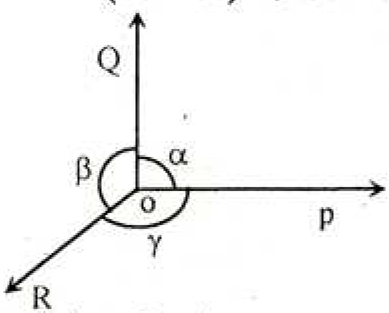
ব্যাখ্যা: $\frac{T}{\sin(180° - \theta)} = \frac{T}{\sin(180° - \theta)} = \frac{W}{\sin 2\theta}$

$\Rightarrow \frac{T}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin\theta} = \frac{W}{\sin 2\theta}$

$\Rightarrow T = \frac{6\sin\theta}{2\sin\theta.\cos\theta}$

$\Rightarrow T = \frac{3}{\cos\theta} = \frac{3}{\frac{CD}{BC}} = \frac{3 \times 5}{3} = 5N$

নিচের চিত্রের আলোকে (৫৫ ও ৫৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



P, Q ও R বলত্রয় সাম্যবস্থায় আছে।

৫৫. P = 1N, Q = 2N ও R = $\sqrt{3}$N হলে α এর মান কত? (মধ্যম)

ক 150° খ 130°

গ 120° ঘ 190° **গ**

৫৬. P = $\sqrt{3}$N, Q = 2N ও γ = 90°, α = 150° হলে R এর মান কত? (কঠিন)

ক 1N খ 2N

গ 3N ঘ 4N **ক**

★★ জড়বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সমান্তরাল বলের লব্ধি

৫৭. একগুচ্ছ বলের ক্রিয়ারেখা একই সমতলে অবস্থান করলে ঐ বলগুচ্ছকে কি বলে? (সহজ)

ক সমতলীয় বলজোট

খ সমমুখী বলজোট

গ বিপরীতমুখী বলজোট

ঘ অসমমুখী বলজোট **ক**

৫৮. P মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি কোনটি? (সহজ)

ক P^2 খ 2P

গ 3P ঘ 0 **খ**

৫৯. P ও Q মানের দুটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি বলদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে কিভাবে বিভক্ত করে? (মধ্যম)

ক বলদ্বয়ের সমানুপাতে অর্ন্তবিভক্তি

খ বলদ্বয়ের সমানুপাতে বর্হিবিভক্তি

গ বলদ্বয়ের ব্যস্তানুপাতে অর্ন্তর্বিভক্তি

ঘ বলদ্বয়ের ব্যস্তানুপাতে বর্হিবিভক্তি **গ**

৬০. 3 মিটার দীর্ঘ সমবৃপ AB তক্তাটির ওজন যা A ও B বিন্দুতে দুইটি খুঁটির উপর অবস্থিত। A বিন্দু থেকে 1 মিটার দূরত্বে তক্তার উপর 100 কেজি ওজনের একজন লোক দাঁড়ালে, খুঁটির উপর কি পরিমাণ চাপ পড়বে? (কঠিন)

ক $66\frac{2}{3}, 33\frac{1}{3}$ খ $56\frac{1}{6}, 33\frac{1}{3}$

গ $42\frac{1}{3}, 10\frac{1}{4}$ ঘ $10\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$ **ক**

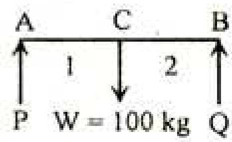
ব্যাখ্যা: P.AC = Q.BC

$\Rightarrow P = 2Q$

W = P + Q = 100

$\Rightarrow Q = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$

$\therefore P = 66\frac{2}{3}$



৬১. কোনো ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলোতে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত থেকে এদের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র দিয়ে গেলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $\frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}$

খ $P=Q=R$

গ $Pa=Qb=Rc$

ঘ $P\cos A=Q\cos B=R\cos c$

উত্তর: খ

৬২. দুইজন লোক 5 মিটার লম্বা একটি হালকা তক্তা PQ এর উপর 50 কেজি ওজনের একটি পাথর রেখে বহন করে। পাথরটি যেভাবে রাখলে P প্রান্তের লোকটির উপর 30 কেজি ও Q প্রান্তের উপর 20 কেজি ভার পড়বে তা কোনটি হবে? (মধ্যম)

ক P হতে 1 মি. দূরে

খ P হতে 2 মি. দূরে

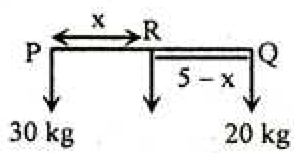
গ P হতে 3 মি. দূরে

ঘ P হতে 4 মি. দূরে

উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: $30.x=20(5-x)$

$\Rightarrow x=2$



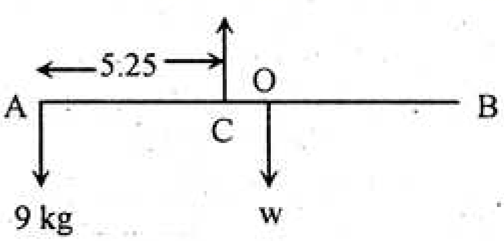
৬৩. 12 m লম্বা একটি ভারী সুষম দণ্ডের এক প্রান্তে 9 kg ওজন ঝুলানো আছে। উক্ত প্রান্ত থেকে 5.25m দূরে যদি একটি খুঁটির উপর দণ্ডটি ভূমির সমান্তরালে অবস্থান করে তবে দণ্ডটির ওজন নিচের কোনটি? (কঠিন)

ক 1.29 kg খ 6.1 kg

গ 13.29 kg ঘ 63 kg

উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা:



এখন, $9\times 5.25=.75\times w \quad \therefore\ w=63kg$

৬৪. 15N এবং 10N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 5 মিটার লম্বা একটি হালকা রডের দুইটি প্রান্তে কার্যরত হলে বৃহত্তর বল থেকে লব্ধি কত দূরে ক্রিয়া করবে? (কঠিন)

ক 2 m খ 3m

গ 3.5m ঘ 1 m

উত্তর: ক

৬৫. একটি সমরূপ দণ্ডের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 45N ও 15N মানের দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। যদি এদের লব্ধি দণ্ডের C বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং AC = 5m হয় তবে AB = কত? (কঠিন)

ক 15m খ 12m

গ 10m ঘ 6m

উত্তর: গ

৬৬. 8 ও 3 ডাইন দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল একটি রডের 12cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। একটিমাত্র বলের ক্রিয়ায় রডটি সাম্যাবস্থায় রাখতে হলে, রডের ন্যূনতম দৈর্ঘ্য কত? (কঠিন)

ক 19.5 cm খ 19.2 cm

গ 18 cm ঘ 15 cm

উত্তর: খ

৬৭. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়া করলে এবং লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $\frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}$

খ $Pa=Qb=Rc$

গ $P\cos A=Q\cos B=R\cos C$

ঘ $P=Q=R$

উত্তর: ক

৬৮. একটি লোক একটি সুষম লাঠির একপ্রান্তে একটি বোঝা কাঁধে বহন করছে। বোঝাটির ওজন W এবং লোকটির কাঁধ হতে বোঝাটির ও লোকটির হাতের দূরত্ব a ও x হলে কাঁধের উপর চাপ কত হবে? (কঠিন)

ক $W(a+x)$ খ $W\left(1+\frac{x}{a}\right)$

গ $W(1+ax)$ ঘ $W\left(1+\frac{a}{x}\right)$

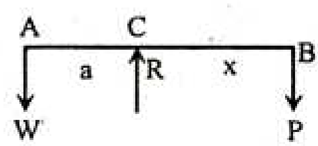
উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: $R=W+P$

$W.AC=P.BC$

$\Rightarrow Wa=Px$

$\Rightarrow P=\frac{Wa}{x}$



$\therefore\ R=w\left(1+\frac{a}{x}\right)$

৬৯. P ও Q বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে এদের লব্ধির পরিবর্তন না হলে P ও Q এর সম্পর্ক কি হবে? (মধ্যম)

ক $PQ = O$ খ $\frac{P}{Q} = 2$

গ $P = Q$ ঘ $P + Q = O$ **গ**

৭০. P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের —

i. লব্ধি $P + Q$

ii. লব্ধি $P - Q$

iii. লব্ধির দিক P ও Q বলের সাথে সমান্তরাল

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

৭১. 10N ও 20N বলদ্বয়—

i. সমমুখী সমান্তরাল হলে লব্ধি 30N

ii. অসদৃশ সমান্তরাল হলে লব্ধি 10N

iii. এর লব্ধি বৃহত্তম বলের দিকে থাকবে

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৭২ ও ৭৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

AB একটি ভারী সুষম দন্ডের A প্রান্তে 10 কেজি ওজন ঝুলানো হলে ঐ প্রান্ত থেকে 1 মিটার দূরে একটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। খুঁটির উপর চাপের পরিমাণ 30 কেজি।

৭২. AB দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{3}{2}$ মিটার খ $\frac{5}{2}$ মিটার

গ 3 মিটার ঘ 5 মিটার **গ**

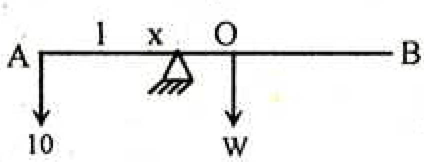
ব্যাখ্যা: $10 \times 1 = W \times x$

$\therefore x = 0.5$

$\therefore$ দণ্ডটির দৈর্ঘ্য

$= 2(1 + 0.5)$ মি.

$= 3$ মি.



৭৩. AB দণ্ডটির ওজন কোনটি? (মধ্যম)

ক 20 কেজি খ 40 কেজি

গ 60 কেজি ঘ 80 কেজি **ক**

ব্যাখ্যা: চাপ $P = 30$ কেজি, দন্ডের ওজন $= W$

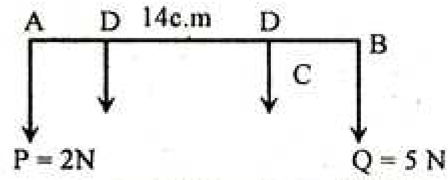
A প্রান্তে ঝুলানো ওজন $= 10$ kg

$\therefore$ চাপ $= 10 + W$

বা, $30 = 10 + W$

$\therefore W = 20$ kg

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৪-৭৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৭৪. P ও Q বলের লব্ধির মান কত নিউটন? (সহজ)

ক 2 খ 3

গ 5 ঘ 7 **ঘ**

৭৫. P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি A বিন্দু হতে কত সে.মি. দূরে থাকবে? (মধ্যম)

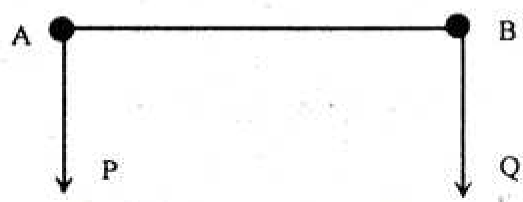
ক 8 খ 10

গ 16 ঘ 20 **খ**

৭৬. P ও Q অবস্থান বিনিময় করলে AB বরাবর লব্ধির ক্রিয়ার বিন্দুর সরণ কত সে.মি.? (মধ্যম)

ক 6 খ 10

গ 16 ঘ 20 **ক**



উপরের তথ্যের ভিত্তিতে (৭৭ ও ৭৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৭৭. P ও Q স্থান বিনিময় করলেও যদি লব্ধির অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, তবে — (মধ্যম)

ক $P = Q$ খ $P > Q$

গ $P < Q$ ঘ $P = 2Q$ **ক**

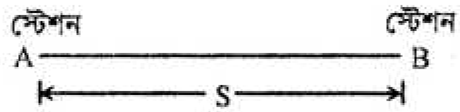
৭৮. P ও Q বলদ্বয় যদি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে, তবে তাদের লব্ধি ক্রিয়াবিন্দু AB রেখা বরাবর d দূরত্বে সরে যায়, d-এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{P+Q}{P-Q}AB$ খ $\frac{P-Q}{P+Q}AB$

গ $\frac{Q-P}{P+Q}$ ঘ $\frac{P+Q}{Q-P}$ **খ**

অধ্যায়-৯: সমতলে বস্তুকণার গতি

প্রশ্ন ▶ ১ /ঢা. বো. ১৭/



ক. সচরাচর সংকেতমালায় প্রমাণ কর যে, $v = u + ft$. ২

খ. স্থিরাবস্থা হতে একটি ট্রেন A স্টেশন হতে 4 মিনিটে B স্টেশনে গিয়ে থামে। যদি উহা পথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ y সমমন্দনে চলে তবে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ যখন $S = 2$. ৪

গ. যদি দুইটি রেলগাড়ি A ও B এর বিপরীত দিক হতে u_1 ও u_2 গতিবেগে অগ্রসর হওয়ার সময় একে অপরকে দেখতে পায় তখন তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব x। সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য রেলগাড়ি দুইটি সর্বোচ্চ মন্দন যথাক্রমে a_1 ও a_2 প্রয়োগ করে। তাহলে দেখাও যে, কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2a_2 + u_2^2a_1 \le 2a_1a_2x$ হয়। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, সরলরেখা বরাবর সমত্বরণে চলন্ত একটি কণার সমত্বরণ f এবং t সময় পরে বেগ v.

$\therefore \frac{dv}{dt} = f$ বা, $\int \frac{dv}{dt}dt = \int f dt$

[t-এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করে]

$\therefore v = ft + c$ ... ... (i) [যেখানে c যোগজীকরণ ধ্রুবক]

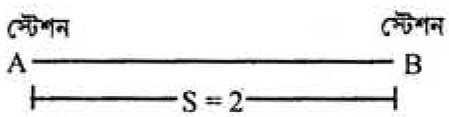
আদি অবস্থায় $t = 0, v = u$

(i) নং হতে, $u = 0 + c \therefore c = u$

(i) নং সমীকরণে c এর মান বসিয়ে, $v = ft + u$

$\therefore v = u + ft$ (প্রমাণিত)

খ



মনে করি, ট্রেনটির সর্বাধিক বেগ = v একক

ধরি, t_1 ও t_2 মিনিট ধরে যথাক্রমে সমত্বরণে ও সমমন্দনে চলে এবং s_1 এবং s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।

তাহলে, $s_1 + s_2 = 2$ এবং $t_1 + t_2 = 4$ মিনিট।

$\therefore$ গড়বেগ $\frac{s_1}{t_1} = \frac{0+v}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{v}{2}t_1$

$\frac{s_2}{t_2} = \frac{v+0}{2} \Rightarrow s_2 = \frac{v}{2}t_2$

$\therefore s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

বা, $2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$ [$\because s_1 + s_2 = 2$]

বা, $2 = \frac{v}{2}4$ বা, $4v = 4 \therefore v = 1$

আবার, $v = u + ft$ সূত্র ব্যবহার করে

$v = 0 + xt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{x}$ [$\because v = 1$]

$0 = v - yt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{y}$ [$\because v = 1$]

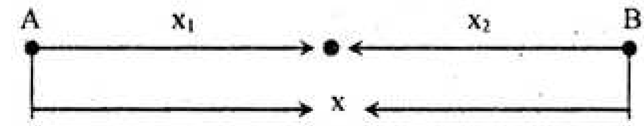
$\therefore t_1 + t_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

বা, $4 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ [$\because t_1 + t_2 = 4$]

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ (প্রমাণিত)

গ মনে করি, ব্রেক প্রয়োগ করার মুহূর্তে বিপরীত দিক হতে অগ্রসরমান গাড়ি দুইটির অবস্থান ছিল যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে।

সুতরাং, $AB = x$



ধরি, উভয় গাড়িতে ব্রেক প্রয়োগের পর এরা যথাক্রমে x_1 এবং x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে যায়।

প্রথম গাড়ির ক্ষেত্রে, আদিবেগ = u_1 এবং মন্দন = a_1

$\therefore u_1^2 - 2a_1x_1 = 0$

$\therefore x_1 = \frac{u_1^2}{2a_1}$ ... ... (i)

দ্বিতীয় গাড়ির ক্ষেত্রে, $u_2^2 - 2a_2x_2 = 0$

$\therefore x_2 = \frac{u_2^2}{2a_2}$ ... ... (ii)

এদের সংঘর্ষ কোনো রকমে এড়ানো সম্ভব যদি

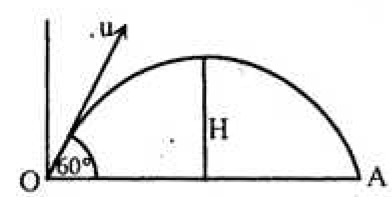
$x_1 + x_2 \le x$ হয়

অর্থাৎ, যদি $\frac{u_1^2}{2a_1} + \frac{u_2^2}{2a_2} \le x$ হয়

অর্থাৎ, যদি $u_1^2a_2 + u_2^2a_1 \le 2a_1a_2x$ হয়। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২ দৃশ্যকল্প-১: মহানগর এক্সপ্রেস আখাউড়া জংশন থেকে ছেড়ে ঢাকা স্টেশনে থামে। তার গতিপথের ১ম $\frac{1}{2}$ অংশ সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{3}$ অংশ সমমন্দনে ও অবশিষ্ট পথ সমবেগে চলে। /রা. বো. ১৭/

দৃশ্যকল্প-২:



ক. কোনো কণা f সুষম ত্বরণে চলছে। গতি শুরুর সপ্তম ও দশম সেকেন্ডে যথাক্রমে 36 মিটার ও 48 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। f এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. ১ নং উদ্দীপকের আলোকে মহানগরের সর্বোচ্চ বেগ ও গড় বেগের অনুপাত 11 ঃ 6 সঠিক কী না যাচাই কর। ৪

গ. ২নং দৃশ্যকল্পে কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা 4.9 মিটার হলে এর অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [g = 9.8 মি./সে.²] ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S_t = u + \frac{1}{2}f(2t - 1)$

সপ্তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S_7 = u + \frac{1}{2}f(2 \times 7 - 1)$

$= u + \frac{1}{2}f \times 13$

$\therefore 36 = u + \frac{13}{2}f$ ... ... (i)

দশম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S_{10} = u + \frac{1}{2}f(2 \times 10 - 1)$

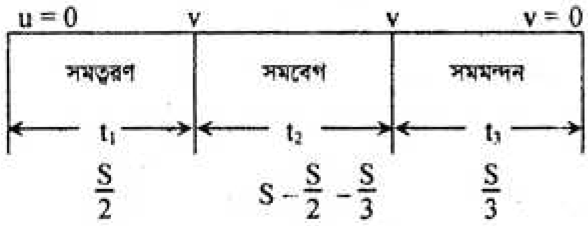
$\therefore 48 = u + \frac{19}{2}f$ ... ... (ii)

(ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই,

$12 = \frac{19}{2}f - \frac{13}{2}f$ বা, $12 = f \times \frac{6}{2}$

বা, $12 = f \times 3 \therefore f = 4 ms^{-2}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, স্টেশন দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব S



ধরি, রেলগাড়িটি t_1 সময়ে সমত্বরণে চলে $\frac{S}{2}$ দূরত্ব অতিক্রম করে সর্বোচ্চ v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার t_2 সময়ে v সমবেগে চলে $\left(S - \frac{S}{2} - \frac{S}{3}\right)$ দূরত্ব অতিক্রম করে এবং t_3 সময়ে সমমন্দনে চলে $\frac{S}{3}$ দূরত্ব অতিক্রম করে।

প্রথম ক্ষেত্রে, $\frac{S}{2} = \frac{u+v}{2} \times t_1 = \frac{0+v}{2} \times t_1$

$\frac{S}{2} = \frac{v}{2} t_1$ ……… (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $S - \frac{S}{2} - \frac{S}{3} = vt_2$

বা, $\frac{S}{2} - \frac{S}{4} - \frac{S}{6} = \frac{v}{2} t_2$ ……… (ii)

তৃতীয় ক্ষেত্রে, $\frac{S}{3} = \frac{v+0}{2} t_3$ ∴ $\frac{S}{3} = \frac{v}{2} t_3$ ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\frac{S}{2} + \frac{S}{2} - \frac{S}{4} - \frac{S}{6} + \frac{S}{3} = \frac{v}{2}(t_1 + t_2 + t_3)$

বা, $S + S - \frac{S}{2} - \frac{S}{3} + \frac{2S}{3} = v(t_1 + t_2 + t_3)$

বা, $S\left\{1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right\} = v(t_1 + t_2 + t_3)$

বা, $\frac{S}{t_1 + t_2 + t_3}\left\{\frac{12 - 3 - 2 + 4}{6}\right\} = v$

বা, গড় বেগ × $\frac{11}{6}$ = সর্বোচ্চ বেগ

∴ সর্বোচ্চ বেগ ঃ গড় বেগ = 11 ঃ 6 [সত্যতা যাচাই করা হলো]

গ এখানে, $\alpha = 60°$

$H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

বা, $4.9 = \frac{u^2 \times (\sin 60°)^2}{2g}$

বা, $u^2 = \frac{9.8g}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

বা, $u^2 = 128.05$

∴ $u = 11.32 \text{ ms}^{-1}$

আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(11.32)^2 \times \sin 120°}{9.8} = 11.32\text{m}$

প্রশ্ন ▶৩ একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি ঢিল ফেলার t সেকেন্ড পরে কূপের তলদেশে ঢিল পড়ার শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ v এবং কূপের গভীরতা h। *[দি. বো. ১৭]*

ক. 6 মিটার/সে. বেগে ঊর্ধ্বগামী একটি বেলুন হতে একটি পাথর ফেলা হলো। যদি পাথরটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে, তবে পাথরটি ফেলার সময় বেলুন কত উঁচুতে ছিল? ২

খ. উদ্দীপকে বর্ণিত তথ্যাদি হতে প্রমাণ কর যে, $(2h - gt^2)v^2 + 2hgtv = h^2g$. ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$. ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যে মুহূর্তে পাথরটি পড়ে যায়, তখন পাথরটি বেলুনের গতিবেগই, অর্থাৎ 6 মি./সে. এ উপরের দিকে চলতে থাকে। সুতরাং ঐ মুহূর্তে নিচের দিকে পাথরটির বেগ −6 মি./সে. এবং সাথে সাথে পাথরটির উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ g ক্রিয়াশীল হবে।

ধরি, পাথরটি পড়ার মুহূর্তে অনুভূমিক তল থেকে বেলুনটির উচ্চতা h

∴ $h = -6 \times 10 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2$

[নিচের দিকে ধনাত্মক এবং g = 9.8 মি./সে.^{2} ধরে]

$= -60 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 100 = 430$

∴ উচ্চতা = 430 মিটার **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

শব্দের বেগ = v এবং কূপের গভীরতা = h.

যেহেতু শূন্য কূপের মধ্যে পাথর খন্ডটি ফেলার t সে. সময় পরে কূপের তলদেশে ঢিল পড়ার শব্দ শোনা গেল,

সেহেতু কূপের তলদেশ হতে শব্দ উপরে আসার সময় $= \frac{h}{v}$.

এবং পাথর খন্ডটির পতনকাল $= \sqrt{\frac{2h}{g}}$. $[\because h = 0.t + \frac{1}{2}gt^2]$

∴ $t = \frac{h}{v} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$ বা, $\sqrt{\frac{2h}{g}} = t - \frac{h}{v}$

বা, $\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = \left(t - \frac{h}{v}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{2h}{g} = t^2 - \frac{2ht}{v} + \frac{h^2}{v^2}$

বা, $\frac{2h}{g} = \frac{t^2v^2 - 2htv + h^2}{v^2}$

বা, $2hv^2 = t^2v^2g - 2htvg + h^2g$

∴ $(2h - gt^2)v^2 + 2hgtv = h^2g$. **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, তলদেশ থেকে কুয়ার মুখের উচ্চতা = h

মনে করি, কুয়ার মুখ থেকে পতিত পাথর খন্ডটি t_1 সময় শেষে এর তলদেশে পৌঁছে।

∴ $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ বা, $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ……… (i)

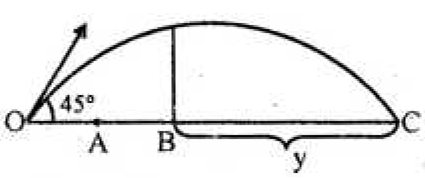
ধরি, কুয়ার তলদেশে পাথরটির পতনের শব্দ, পর্যবেক্ষকের (কুয়ার মুখে) নিকট t_2 সেকেন্ড পরে পৌঁছে।

সুতরাং, $h = vt_2$ বা, $t_2 = \frac{h}{v}$ ……… (ii)

∴ সর্বমোট সময়কাল, $t = t_1 + t_2$

$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪ *[কু. বো. ১৭]*



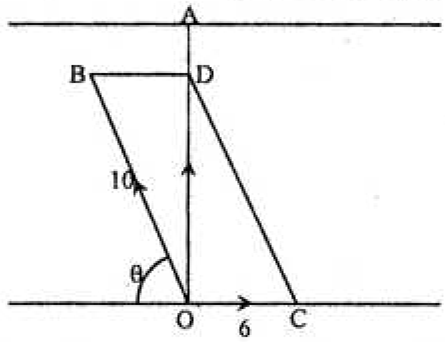
করিম O বিন্দু হতে অনুভূমির সাথে 45° কোণে বন্দুকের গুলি করল। রহিম একই সময়ে স্থিরাবস্থা O হতে দৌড়ে 20 সেকেন্ডে 200 মিটার দূরে অবস্থিত একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ B বিন্দুতে থামে। রহিম যাত্রা পথের OA অংশ a সমত্বরণে এবং AB অংশ b সমমন্দনে যায়। অপরদিকে গুলিটি দেয়ালের ঠিক উপর দিয়ে গেল এবং দেয়ালের অপর পার্শ্বে y দূরত্বে C বিন্দুতে পড়ল। (এখানে দেয়ালের পুরুত্ব অগ্রাহ্য করা হয়েছে)

ক. একটি নৌকা 10 কি. মি. বেগে চলে ঘণ্টায় 6 কি. মি. বেগে প্রবাহিত 500 মিটার চওড়া একটি নদী পাড়ি দিতে চায়। নৌকাটির ন্যূনতম পথে নদীটি পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, দেয়ালের উচ্চতা $= \frac{200y}{200 + y}$ ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক 

চিত্রে নদীর প্রস্থ OA = 500 মি. = 0.5 কি. মি.। মনে করি, নৌকাটি O বিন্দু হতে OB দ্বারা সূচিত বেগে যাত্রা করে এবং স্রোতের বেগ OC দ্বারা সূচিত। নৌকাটি ন্যূনতম পথ পাড়ি দিলে তার লব্ধি বেগ OA বরাবর ক্রিয়াশীল এবং OBDC সামান্তরিকের কর্ণ দ্বারা সূচিত।

এখন, ΔOBD-এ, $OB^2 = BD^2 + OD^2$

বা, $OD^2 = OB^2 - BD^2 = OB^2 - OC^2$

$= 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

∴ OD = 8 [বর্গমূল করে]

তাহলে, ন্যূনতম পথ পাড়ি দিতে সময় লাগবে

$= \frac{0.5}{8} = \frac{5}{10 \times 8} = \frac{1}{16}$ ঘণ্টা **(Ans.)**

খ 

মনে করি, প্রথমাংশে করিম O থেকে দৌড়ে d দূরত্ব t সেকেন্ডে অতিক্রম করে A অবস্থানে আসে এবং দ্বিতীয়াংশে (200 – d) মিটার (20 – t) সেকেন্ডে অতিক্রম করে B তে থামে। A অবস্থানে তার বেগ v.

প্রথমাংশে, ত্বরণের সূত্র ব্যবহর করে পাই,

$v^2 = 2ad$ ... ... (i)

$v = at$ ... ... (ii)

দ্বিতীয়াংশে, মন্দনের সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$0^2 = v^2 - 2b(200 - d)$ ... ... (iii)

$0 = v - b(20 - t)$ ... ... (iv)

সমীকরণ (i) হতে $\frac{v^2}{2a} = d$ ... ... (v)

সমীকরণ (iii) হতে, $\frac{v^2}{2b} = 200 - d$ ... ... (vi)

সমীকরণ (v) + (vi) হতে,

$\frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 200$

$\Rightarrow v^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 400$ ... ... (vii)

সমীকরণ (ii) হতে, $\frac{v}{a} = t$ ... ... (viii)

সমীকরণ, (iv) হতে, $\frac{v}{b} = 20 - t$ ... ... (ix)

সমীকরণ (viii) ও (ix) যোগ করি,

$v\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 20$ ... ... (x)

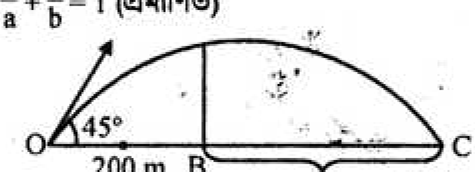
সমীকরণ (vii) কে (x) দিয়ে ভাগ করে,

$v = 20$

এখন, সমীকরণ (x) হতে,

$20\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 20$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ (প্রমাণিত)

গ 

মনে করি, O বিন্দুতে একটি বস্তু ভূমির সাথে 45° কোণে নিক্ষেপ করলে তা B বিন্দুতে অবস্থিত দেয়ালকে অতিক্রম করে C বিন্দুতে পতিত হয়। এখানে, OB = 200 মিটার ও BC = y মিটার। আনুভূমিক পাল্লা, R = 200 + y

দেয়ালের উচ্চতা h হলে,

$h = 200 \tan 45°\left(1 - \frac{200}{200 + y}\right)\left[\because y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)\right]$

$= 200\left(\frac{200 + y - 200}{200 + y}\right) = \frac{200y}{200 + y}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৫ দৃশ্যকল্প-১ : [চ. বো. ১৭]

একটি টাওয়ারের চূড়া হতে একখণ্ড পাথর 2-মিটার নিচে নামার পর অপর একখণ্ড পাথর চূড়ার 6 মিটার নিচ হতে ফেলে দেওয়া হলো।

দৃশ্যকল্প-২ :

কোনো প্রক্ষিপ্ত বস্তুর দুইটি গতিপথে বৃহত্তম উচ্চতা যথাক্রমে 8m এবং 10m.

ক. একটি বস্তু 15m/sec বেগে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হলে বস্তুটির ভ্রমণকাল কত? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে যদি দুইটি পাথরই স্থির অবস্থা হতে পড়ে এবং একই সাথে ভূমিতে পতিত হয় তবে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $R = 16\sqrt{5}$ ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, u = 15 m/s

$\alpha = 30°$

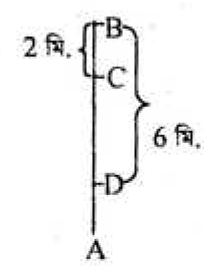
$g = 9.8\ m/s^2$

$\therefore$ বস্তুটির ভ্রমণকাল $= \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 15 \times \sin 30°}{9.8}$

$= \frac{2 \times 15 \times \frac{1}{2}}{9.8} = \frac{15}{9.8}$

= 1.53s **(Ans.)**

খ মনে করি, AB টাওয়ারের B থেকে একখন্ড পাথর BC = 2 মিটার নিচে C তে নামার পর অপর একখন্ড পাথর 6 মি. নিচের D বিন্দু থেকে ফেলা হলো।



ধরি, টাওয়ারের উচ্চতা AB = h মি.

∴ CD = BD – BC = 6 – 2 = 4 মি.

AC = AB – BC = (h – 2) মি.

AD = AB – BD = (h – 6) মি.

C বিন্দুতে প্রথম পাথর খন্ডটির বেগ v হলে,

$v^2 = 0^2 + 2g \times 2$

∴ v = 6.26 মি./সে.

ধরি দ্বিতীয় পাথরটির পতনকাল t

প্রথম খন্ডটির ক্ষেত্রে, $h - 2 = vt + \frac{1}{2}gt^2$ ... ... (i)

দ্বিতীয় ,, ,, $h - 6 = \frac{1}{2}gt^2$ ... ... (ii)

(i) – (ii) থেকে পাই,

$4 = vt$

বা, $t = \frac{4}{6.26}$

∴ t = 0.64 সে.

v ও t এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$h - 6 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.64)^2$

বা, h = 6 + 2

∴ h = 8 মি. **(Ans.)**

গ একই গতিবেগে নিক্ষিপ্ত দুইটি প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লার মান একই হবে যদি একটির নিক্ষেপণ কোণ α এবং অপরটির (90° – α) হয়।

এক্ষেত্রে, ধরি, নিক্ষেপণ বেগ = u

∴ α কোণে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের সর্বোচ্চ উচ্চতা,

$h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

$\therefore \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = 8$ ... ... (i)

এবং $(90^\circ - \alpha)$ কোণে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের সর্বোচ্চ উচ্চতা,

$$h' = \frac{u^2 \sin^2 (90^\circ - \alpha)}{2g}$$

$$\therefore \quad \frac{u^2 \cos^2\alpha}{2g} = 10 \ldots\ldots\ldots (ii)$$

আবার, অনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

এখন, (i) ও (ii) গুণ করে পাই, $\frac{u^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{4g^2} = 80$

বা, $\frac{u^4 (\sin\alpha \cos\alpha)^2}{4g^2} = 80$

বা, $\frac{\frac{1}{4} u^4 (2 \sin\alpha \cos\alpha)^2}{4g^2} = 80$

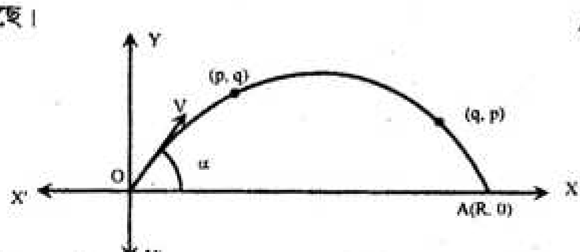
বা, $\frac{u^4 (\sin 2\alpha)^2}{16g^2} = 80$

বা, $\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}\right)^2 = 1280$

বা, $R^2 = 1280$

$\therefore R = 16\sqrt{5}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৬ চিত্রে O বিন্দু হতে বায়ুশূন্য স্থানে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তুর গতিপথ দেখানো হয়েছে। /সি. বো. ১৭/



ক. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত u_1 ও u_2 মানের দুইটি বেগের লব্ধির মান u এবং u_1 এর দিক বরাবর u এর লম্বাংশের পরিমাণ u_2 হলে দেখাও যে, $u = \sqrt{u_2^2 - u_1^2 + 2u_1u_2}$ ২

খ. প্রক্ষিপ্ত বস্তুটির আনুভূমিক পাল্লা p, q এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\frac{v}{g}\operatorname{cosec}\alpha$ সময় পরে প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি তার প্রক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

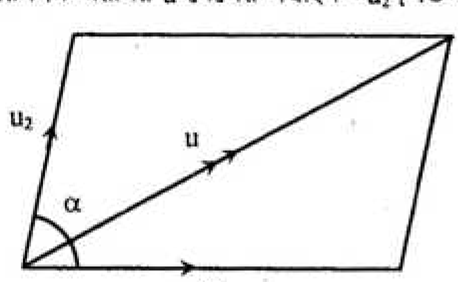
ক মনে করি, u_1 ও u_2 বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

সুতরাং, u_1 বেগের ক্রিয়ারেখা বরাবর u_1 ও u_2 বেগের লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল

$= u_1\cos 0^\circ + u_2\cos\alpha$

$= u_1 + u_2 \cos\alpha$

u_1 এর দিক বরাবর u বেগের লম্বাংশ $= u_2$ [শর্ত অনুযায়ী]



যেহেতু যে কোনো রেখা বরাবর লব্ধির লম্বাংশ এবং অংশক বেগগুলোর লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল পরস্পর সমান।

অতএব, $u_1 + u_2 \cos\alpha = u_2$

বা, $u_2 \cos\alpha = u_2 - u_1$

বা, $\cos\alpha = \frac{u_2 - u_1}{u_2}$

আবার, প্রদত্ত বেগ দুইটির লব্ধির মান

$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos\alpha}$

$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\left(\frac{u_2 - u_1}{u_2}\right)}$

$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 - 2u_1^2}$

$\therefore u = \sqrt{u_2^2 - u_1^2 + 2u_1u_2}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি p ও q দূরত্বে অবস্থিত যথাক্রমে q ও p উচ্চতাকে কোনো রকমে অতিক্রম করে।

আমরা জানি, প্রক্ষেপণ কোণ α, প্রক্ষেপণ বেগ v এবং অনুভূমিক পাল্লা R হলে $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

$\therefore q = p\tan\alpha\left(1 - \frac{p}{R}\right) \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $p = q\tan\alpha\left(1 - \frac{q}{R}\right) \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করি, $\frac{q}{p} = \frac{p\left(1 - \frac{p}{R}\right)}{q\left(1 - \frac{q}{R}\right)}$

বা, $\frac{q^2}{p^2} = \frac{R - p}{R - q}$ বা, $q^2R - q^3 = p^2R - p^3$

বা, $p^3 - q^3 = R(p^2 - q^2)$

বা, $(p - q)(p^2 + pq + q^2) = R(p - q)(p + q)$

$\therefore R = \frac{p^2 + pq + q^2}{p + q}$ **(Ans.)**

গ t সময়ে বস্তুকণাটির আনুভূমিক বেগ $= v\cos\alpha$

t সময়ে বস্তুকণাটির উল্লম্ব বেগ$= v\sin\alpha - gt$

যেহেতু বস্তুকণাটি প্রক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলে কাজেই এটি আনুভূমিকের সাথে $(90^\circ + \alpha)$ কোণ উৎপন্ন করবে।

$\tan(90^\circ + \alpha) = \frac{\text{t সময়ে উল্লম্ব বেগ}}{\text{t সময়ে আনুভূমিক বেগ}}$

বা, $-\cot\alpha = \frac{v \sin\alpha - gt}{v\cos\alpha}$

বা, $-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\alpha - gt}{v\cos\alpha}$

বা, $v\sin^2\alpha - gt\sin\alpha = -v\cos^2\alpha$

বা, $v(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = gt\sin\alpha$

বা, $v = gt\sin\alpha$ বা, $t = \frac{v}{g\sin\alpha}$

$\therefore t = \frac{v\operatorname{cosec}\alpha}{g}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৭ দৃশ্যকল্প-১: একজন মোটর সাইকেল আরোহী 15 মিটার দূরে একজন অশ্বারোহীকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে $5 m/sec^2$ ত্বরণে অশ্বারোহীর পশ্চাতে মোটর সাইকেল চালাতে লাগল। অশ্বারোহী 12.5 m/sec সমবেগে যাচ্ছিল।

দৃশ্যকল্প-২: 60 মিটার উচ্চ স্তম্ভের শীর্ষ হতে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 100 m/sec আদিবেগে একটি বস্তু নিক্ষিপ্ত হলো। /য. বো. ১৭/

ক. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে $7m/sec^2$ ত্বরণে চলতে থাকলে তৃতীয় সেকেন্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে মোটর সাইকেল আরোহী কত দূরে গিয়ে অশ্বারোহীকে ধরতে পারবে? ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে বস্তুটি স্তম্ভ হতে কত দূরে ভূমিকে আঘাত করবে? ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$S_{th} = u + \frac{1}{2} f(2t - 1)$

এখানে, $u = 0$, $f = 7\ ms^{-2}$, $t = 3$

$\therefore S_{th} = 0 + \frac{1}{2} \times 7\ (2 \times 3 - 1)$

$= \frac{7}{2} \times 5m = \frac{35}{2} m = 17.5\ m$ **(Ans.)**

খ মনে করি A বিন্দুতে অবস্থানকালে মটর সাইকেল আরোহী B বিন্দুতে অশ্বারোহীকে দেখতে পেল এবং t সময় পর c বিন্দুতে গিয়ে অশ্বারোহীকে ধরতে পারবে।



অশ্বারোহীর ক্ষেত্রে $BC = x = 12.2t$ [$\because s = vt$]

সাইকেল আরোহীর ক্ষেত্রে $AC = \frac{1}{2}ft^2$ [$\because$ স্থিরাবস্থায়, $u = 0$]

বা, $AB + BC = \frac{1}{2}ft^2$ বা, $15 + 12.5t = \frac{1}{2}5t^2$

বা, $30 + 25t - 5t^2 = 0$ বা, $t^2 - 5t - 6 = 0$

বা, $t^2 - 6t + t - 6 = 0$ বা, $t(t - 6) + 1(1 - 6) = 0$

বা, $(t - 6)(t + 1) = 0$

হয় $t = 6$ অথবা $t = -1$

t এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore t = 6s$

$\therefore$ সাইকেল আরোহীর অতিক্রান্ত দূরত্ব $AC = \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 6^2 = 90$ m

অর্থাৎ মটর সাইকেল আরোহী 90m দূরে গিয়ে অশ্বারোহীকে ধরতে পারবে। **(Ans.)**

গ মনে করি বস্তুটির পতনকাল t সেকেন্ড

এখন $h = -usin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হতে পাই,

$60 = -100 \sin 30° \times t + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $60 = -100 \times \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \times 9.8t^2$

বা, $4.9t^2 - 50t - 60 = 0$

$\therefore t = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4.4.9.(-60)}}{2 \times 4.9} = \frac{50 \pm 60.63}{9.8}$

$= 11.29$ সেকেন্ড (প্রায়) (+ চিহ্ন নিয়ে)

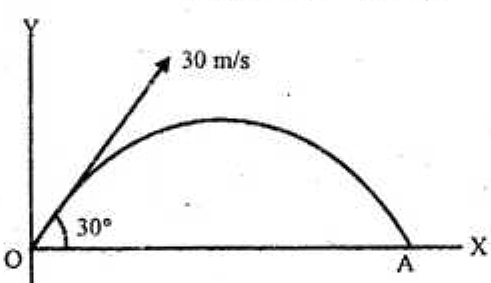
$\therefore$ বস্তুটি স্তম্ভ হতে যে দূরত্বে ভূমিকে আঘাত করবে তার দূরত্ব $= u \cos \alpha t$

$= 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 11.29$ m

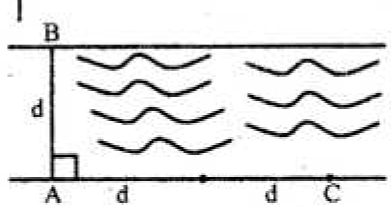
$= 977.74$ m (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ /ব. বো. ১৭/

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



সাঁতারুর বেগ u_1, স্রোতের বেগ u_2, $AB = d$, $AC = 2d$

ক. u বেগে ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কণার উত্থানকাল নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ নিক্ষিপ্ত কণাটি 1 মিটার উচ্চতায় পৌছার সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ AC বরাবর প্রবাহিত নদী একজন সাঁতারু t_1 সময়ে AB দূরত্ব এবং t_2 সময়ে AC দূরত্ব অতিক্রম করলে t_1 এবং t_2 এর অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক u আদিবেগে একটি বস্তুকণাকে ভূমি থেকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে অভিকর্ষজ ত্বরণ প্রতিকূলে কাজ করে বলে g মন্দনের সৃষ্টি হয় এবং বেগ ক্রমশ কমতে থাকে। সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে t সময় লাগলে,

$v = u - gt$

বা, $0 = u - gt$ [$\because$ সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ শূন্য]

$\therefore t = \frac{u}{g}$

$\therefore$ উত্থানকাল $= \frac{u}{g}$ **(Ans.)**

খ আমরা জানি, প্রক্ষিপ্ত বস্তু কণার উল্লম্বিক সরণ,

$y = ut \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore 1 = 30.\ t.\ \sin 30° - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

বা, $1 = t \times 30 \times \frac{1}{2} - 4.9t^2$

বা, $4.9t^2 + 1 = 15t$

এখানে,
আদিবেগ, $u = 30\ ms^{-1}$
নিক্ষেপন কোণ, $\alpha = 30°$

$\therefore 4.9t^2 - 15t + 1 = 0$

$\therefore t = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \times 1 \times 4.9}}{2 \times 4.9}$

$= \frac{15 \pm \sqrt{225 - 19.6}}{9.8}$

$= \frac{15 \pm \sqrt{205.4}}{9.8}$

$= \frac{15 \pm 14.332}{9.8}$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $t = \frac{15 + 14.332}{9.8} = \frac{29.332}{9.8} = 2.993$

(–) চিহ্ন নিয়ে, $t = \frac{15 - 14.332}{9.8} = \frac{0.668}{9.8} = 0.068$

$\therefore$ 1 মিটার উচ্চতায় অবস্থানের সময়ের পার্থক্য:

$(2.993 - 0.068)$ সেকেন্ড $= 2.925$ সেকেন্ড (প্রায়) **(Ans.)**

গ মনে করি, AB পথে যাত্রাকালে সাঁতারুর বেগ u_1 এবং স্রোতের বেগ u_2 এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি বেগ v.

$\therefore$ বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী,

$v^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos\alpha$ ... ... (i)

আবার, $\tan 90° = \frac{u_1 \sin\alpha}{u_2 + u_1 \cos\alpha}$

বা, $\cot 90° = \frac{u_2 + u_1 \cos\alpha}{u_1 \sin\alpha}$

বা, $u_2 + u_1 \cos\alpha = 0$

$\therefore u_1 \cos\alpha = -u_2$

(i) নং এ এই মান বসিয়ে পাই,

$v^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_2.(-u_2)$

বা, $v^2 = u_1^2 - u_2^2$

$\therefore v = \sqrt{u_1^2 - u_2^2}$

দেওয়া আছে, নদীর বিস্তার d.

$\therefore d = vt_1$

$\therefore t_1 = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{u_1^2 - u_2^2}}$

আবার, স্রোতের অনুকূলে AC পথে প্রকৃত বেগ, $u_1 + u_2$

শর্তমতে, $2d = (u_1 + u_2)t_2$

$\therefore t_2 = \frac{2d}{u_1 + u_2}$

$\therefore t_1 : t_2 = \frac{d}{\sqrt{u_1^2 - u_2^2}} : \frac{2d}{u_1 + u_2}$

$= u_1 + u_2 : 2\sqrt{u_1^2 - u_2^2}$

$= \sqrt{(u_1 + u_2)^2} : 2\sqrt{(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)}$

$= (\sqrt{u_1 + u_2})^2 : 2\sqrt{u_1 - u_2}\sqrt{u_1 + u_2}$

$= \sqrt{u_1 + u_2} : 2\sqrt{u_1 - u_2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ BPL এ 'A' একটি ক্রিকেট বল আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 40 মিটার/সেকেন্ড বেগে ভূমি হতে 3 মিটার উচ্চতা থেকে নিক্ষেপ করলো, কিন্তু 'B' বলটি ভূমি হতে 1 মিটার উচ্চতায় ধরে ফেললো। *[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]*

ক. একটি বস্তুকে আনুভূমিকের সাথে 60° কোণে 30 মিটার/সেকেন্ড আদিবেগে প্রক্ষেপ করা হলো। পাল্লা ও সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। ২

খ. 2 সেকেন্ড পরে ক্রিকেট বলটির বেগ কত হবে? ৪

গ. 'A' এবং 'B' কত দূরত্বে ছিল? ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, বস্তুটির পাল্লা = R এবং সর্বাধিক উচ্চতা = H

$\therefore$ পাল্লা, $R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha$

$= \frac{(30)^2}{9.8}\sin(2\times 60°)$

$= 91.84 \times 0.866$

$= 79.53$ মিটার **(Ans.)**

এখানে,
আদিবেগ, $u = 30$ মিটার/সে.
কোণ, $\alpha = 60°$

আবার, সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha$

$= \frac{(30)^2}{2\times 9.8}(\sin 60°)^2$

$= 34.44$ মিটার **(Ans.)**

খ 2 সেকেন্ড পর ক্রিকেট বলটির বেগ, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

2 সেকেন্ড পর আনুভূমিক বেগ, $V_x = u_0\cos\alpha$

$= 40\times\cos 30°$

$= 34.64$ মিটার/সে.

এখানে,
আদিবেগ, $u_0 = 40$ মি./সে.
কোণ, $\alpha = 30°$

এবং উল্লম্ব বেগ, $V_y = u_0\sin\alpha - gt$

$= 40\times\sin 30° - 9.8\times 2$

$= 0.4$ মিটার/সে.

$\therefore$ 2 সেকেন্ড পর ক্রিকেট বলটির বেগ, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$= \sqrt{(34.64)^2 + (0.4)^2}$

$= 34.64$ মিটার/সে. **(Ans.)**

গ বল কর্তৃক অতিক্রান্ত উল্লম্ব দূরত্ব = (3 – 1) মিটার = 2 মিটার

অতিক্রান্ত সময় t হলে,

$2 = -40\sin 30°\times t + \frac{1}{2}\times 9.8\times t^2$

বা, $2 = -\frac{1}{2}\times 40\times t + \frac{1}{2}\times 9.8t^2$

বা, $4 = -40t + 9.8t^2$

বা, $9.8t^2 - 40t - 4 = 0$

বা, $2.45t^2 - 10t - 1 = 0$

$\therefore$ $t = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2 - 4\times 2.45\times(-1)}}{2\times 2.45}$

$= \frac{10\pm\sqrt{100+9.8}}{4.9}$

$= \frac{10\pm 10.48}{4.9}$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই, $t = \frac{10+10.48}{4.9} = 4.18$ সেকেন্ড

আবার, (–) চিহ্ন নিয়ে পাই, $t = \frac{10-10.48}{4.9} = -0.098$ সেকেন্ড

যেহেতু সময় ঋণাত্মক হতে পারে না

সুতরাং, $t \neq -0.098$

$\therefore$ বলটি ধরার সময়, $t = 4.18$ সেকেন্ড

সুতরাং 'A' এবং 'B' এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $x = ut\cos\alpha$

$= 40\times 4.18\times\cos 30°$

$= 40\times 4.18\times 0.866$

$= 144.80$ মিটার **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০ একটি বস্তুকে u আদিবেগে নিক্ষেপ করা হল। যদি বস্তুটি কর্তৃক অতিক্রান্ত সর্বোচ্চ উচ্চতা H, যখন নিক্ষেপণ কোণ α। *[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]*

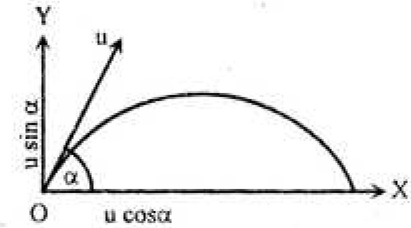
ক. u এর আনুভূমিক এবং উল্লম্ব উপাংশ কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, আনুভূমিক পাল্লা, $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ । ৪

গ. সর্বোচ্চ উচ্চতার জন্য প্রমাণ কর যে, উড্ডয়নের সময় = নামার সময়। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, O বিন্দু হতে u আদিবেগে এবং আনুভূমিকের সাথে α কোণে বস্তুটি নিক্ষেপ করা হল। O বিন্দুতে u এর আনুভূমিক উপাংশ $u\cos\alpha$ এবং উল্লম্ব উপাংশ $u\sin\alpha$



খ দেওয়া আছে, নিক্ষেপণ কোণ = α

তাহলে, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$ বা, $\sin^2\alpha = \frac{2gH}{u^2}$

$\therefore \sin\alpha = \sqrt{\frac{2gH}{u^2}}$

আবার, $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2}{g}\,2\sin\alpha\cos\alpha$

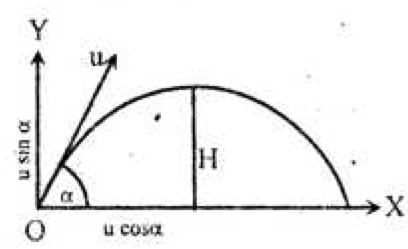
$= \frac{2u^2}{g}\sqrt{\frac{2gH}{u^2}}\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$= \frac{2u^2}{g}\sqrt{\frac{2gH}{u^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{2gH}{u^2}}$

$= 4\sqrt{\frac{u^4}{4g^2}\cdot\frac{2gH}{u^2}\left(\frac{u^2-2gH}{u^2}\right)}$

$= 4\sqrt{\frac{H}{2g}(u^2-2gH)} = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g}-H\right)}$ (প্রমাণিত)

গ মনে করি, কোনো বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হলো। O বিন্দুতে u এর আনুভূমিক উপাংশ $u\cos\alpha$ এবং উল্লম্ব উপাংশ $u\sin\alpha$।



অভিকর্ষজ ত্বরণ g নিম্নদিকে উল্লম্বভাবে ক্রিয়াশীল বিধায় $u\cos\alpha$ এর উপর g এর কোন প্রভাব থাকবে না। বস্তুকণাটি T সময় পর আনুভূমিক তলে ফিরে আসলে লম্বিক সরণ শূন্য হবে।

$\therefore$ $0 = u\sin\alpha\,.\,T - \frac{1}{2}gT^2$

বা, $0 = 2u\sin\alpha.T - gT^2$

বা, $gT^2 - 2u\sin\alpha\,.\,T = 0$

বা, $T(gT - 2u\sin\alpha) = 0$

$\therefore$ $gT - 2u\sin\alpha = 0$ $[\because T\neq 0]$

বা, $T = \frac{2u}{g}\sin\alpha$

আবার, সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছানোর সময় T_1 হলে,

T_1 সময়ে বস্তুকণাটির বেগের উল্লম্ব লম্বাংশ 0 হবে।

$\therefore$ $0 = u\sin\alpha - gT_1$ বা, $T_1 = \frac{u}{g}\sin\alpha$

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছানোর সময় $T_1 = \frac{u}{g}\sin\alpha$

তাহলে, $T = 2T_1$

$\therefore$ পতনের সময় $= T - T_1 = 2T_1 - T_1 = T_1$

$\therefore$ উড্ডয়নের সময় = নামার সময় (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶১১ চলমান বস্তুকণার ক্ষেত্রে, *[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]*

ক. "চলমান বস্তুকণা" বর্ণনা কর। ২

খ. দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির দ্বিগুণ। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধিবেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়। α এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. একটি ফুটবলকে ভূমি হতে প্রক্ষেপ করা হলো এবং এটি (bc, ca) এবং (ca, bc) বিন্দুগামী। আনুভূমিক পাল্লা 'cR' হলে, প্রমাণ কর যে, $R = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক কোন বস্তুকণা α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলে, ভূমিতে পতিত হওয়ার আগে পর্যন্ত অবস্থাকে চলন্ত কণা বলে।

খ মনে করি, বেগ দুইটির মান u ও v $(u > v)$

$\therefore$ এদের বৃহত্তম লব্ধি $= u + v$

এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= u - v$

শর্তমতে, $u + v = 2(u - v)$

মনে করি, $u - v = m$

$u + v = 2m$ ... ... (i)

আবার, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

লব্ধির মান $= \frac{1}{2}(u + v)$

$\therefore \left\{\frac{1}{2}(u + v)\right\}^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos\alpha$

বা, $\frac{(u + v)^2}{2} = 2(u^2 + v^2) + 4uv \cos\alpha$

বা, $\frac{(u + v)^2}{2} = \{(u + v)^2 + (u - v)^2\} + \{(u + v)^2 - (u - v)^2\} \cos\alpha$

বা, $\frac{(2m)^2}{2} = \{(2m)^2 + (m)^2\} + \{(2m)^2 - (m)^2\} \cos\alpha$

বা, $\frac{4m^2}{2} = (4m^2 + m^2) + (4m^2 - m^2) \cos\alpha$

বা, $2m^2 = 5m^2 + 3m^2 \cos\alpha$

বা, $3m^2 \cos\alpha = 2m^2 - 5m^2$

বা, $3m^2 \cos\alpha = -3m^2$

বা, $\cos\alpha = -1$ [উভয় পক্ষকে $3m^2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\alpha = \cos 180°$

$\therefore$ $\alpha = 180°$ **(Ans.)**

গ মনে করি, ফুটবলটির প্রক্ষেপ বেগ u এবং প্রক্ষেপ কোণ α।

আমরা জানি, বায়ুশূন্য স্থানে প্রক্ষিপ্ত কণার গতিপথের সমীকরণ,

$y = x \tan\alpha \left(1 - \frac{x}{R}\right)$ ... ... (i)

যেহেতু, (i) নং সমীকরণটি (bc, ca) এবং (ca, bc) বিন্দুগামী।

$\therefore ca = bc \tan\alpha \left(1 - \frac{bc}{cR}\right)$ ... ... (ii) [$\because$ অনুভূমিক পাল্লা = cR]

এবং $bc = ca \tan\alpha \left(1 - \frac{bc}{cR}\right)$ ... ... (iii)

(ii) নং কে (iii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ca}{bc} = \frac{bc \tan\alpha}{ca \tan\alpha} \times \frac{\left(1 - \frac{bc}{cR}\right)}{\left(1 - \frac{ca}{cR}\right)}$$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \times \frac{\left(1 - \frac{b}{R}\right)}{\left(1 - \frac{a}{R}\right)}$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \times \frac{R - b}{R - a}$

বা, $\frac{R - b}{R - a} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $Rb^2 - b^3 = a^2R - a^3$

বা, $Ra^2 - Rb^2 = a^3 - b^3$

বা, $R(a^2 - b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

বা, $R = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a + b)(a - b)}$

$\therefore R = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১২ দৃশ্যকল্প-১: কোন সরলরেখা বরাবর চলমান একটি বস্তুকণা 5 সেকেন্ড পরের অর্ধ সেকেন্ড সময়ে $16\frac{1}{2}$ মিটার দূরত্ব এবং 10তম সেকেন্ডে 50 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২: একটি বালক একটি বলকে খাড়া উপরের দিকে H উচ্চতায় নিক্ষেপ করতে পারে। সে বলটিকে নিক্ষেপ করে d আনুভূমিক দূরত্বে অবস্থিত h উচ্চতার গোল পোস্ট পার করতে সক্ষম হয়।

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. অবাধে পতনশীল একটি বস্তুর পতনকালের শেষতম সেকেন্ডে 93.1 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করল। কত উঁচু থেকে বস্তুটি পড়েছিল? বস্তুটির পতনকাল নির্ণয় কর। $(g = 9.81 \text{ ms}^{-2})$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে বস্তুটির আদিবেগ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $2H \geq h + \sqrt{h^2 + d^2}$. ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক অবাধে পতনশীল কণার আদিবেগ $u = 0$

ধরি, বস্তুটি h মিটার উঁচু থেকে অবাধে পড়েছিল এবং পতনকাল t সেকেন্ডে। প্রশ্নমতে শেষ সেকেন্ডে অর্থাৎ t তম সেকেন্ডে বস্তুটি 93.1 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

অর্থাৎ $93.1 = 0 + \frac{1}{2}g(2t - 1)$ $\left[h_t = u + \frac{1}{2}g(2t - 1) \text{ এবং } u = 0\right]$

বা, $93.1 = \frac{1}{2} \times 9.81 (2t - 1)$

বা, $2t - 1 = \frac{93.1 \times 2}{9.81}$

বা, $2t - 1 = 19$

বা, $2t = 20$

$\therefore$ $t = 10$ সেকেন্ড **(Ans.)**

নির্ণেয় উচ্চতা, $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.81 \times 10^2 = 490.5$ মিটার। **(Ans.)**

খ মনে করি, বস্তুটির আদিবেগ u ms^{-1} ও ত্বরণ f ms^{-2}

$\therefore$ 5 সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ, $v = u + 5f$

প্রশ্নমতে, কণাটি v গতিবেগে $\frac{1}{2}$ সেকেন্ডে $16\frac{1}{2}$

বা, $\frac{33}{2}$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে

$\therefore \frac{33}{2} = v \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)^2$

বা, $\frac{33}{2} = \frac{v}{2} + \frac{1}{8}f$

বা, $33 = v + \frac{1}{4}f$

বা, $33 = u + 5f + \frac{1}{4}f$

বা, $u + \frac{21}{4}f = 33$ .... (i)

আবার, 10ম সেকেন্ডে কণাটি 50 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে

$u + \frac{1}{2}f(2 \times 10 - 1) = 50$

বা, $u + \frac{19}{2}f = 50$ .... (ii)

(ii) – (i) হতে পাই,

$\left(\frac{19}{2} - \frac{21}{4}\right)f = 17$

বা, $\frac{38-21}{4}f = 17$

বা, $17f = 4 \times 17$

বা, $f = 4$

(ii) হতে পাই, $u = 50 - \frac{19}{2} \times 4 = 50 - 38 = 12$

∴ বস্তুটির আদিবেগ $12\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

গ মনে করি, বলটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে.

আমরা জানি, $H = \frac{u^2}{2g}$

$\Rightarrow u^2 = 2gH$ .... (1)

আবার মনে করি,

বলটির নিক্ষেপণ কোণ α এবং

বলটির গোলপোস্ট অতিক্রম করার সময় t সে.

সুতরাং $d = u\cos\alpha \times t$

$\Rightarrow t = \frac{d}{u\cos\alpha}$

$\Rightarrow t = \frac{d}{u}\sec\alpha$

এবং $h = u\sin\alpha \times t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow h = u\sin\alpha \times \frac{d}{u}\sec\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow h = d\tan\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{u}\sec\alpha\right)^2$

$\Rightarrow h = d\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gd^2}{u^2}\sec^2\alpha$

$\Rightarrow h = d\tan\alpha - \frac{gd^2}{2u^2}(1 + \tan^2\alpha)$

$\Rightarrow h = d\tan\alpha - \frac{gd^2}{2} \times \frac{1}{2gH}(1 + \tan^2\alpha)$

$\Rightarrow 4hH = 4dH\tan\alpha - d^2(1 + \tan^2\alpha)$

$\Rightarrow d^2\tan^2\alpha - 4dH\tan\alpha + (4hH + d^2) = 0$ .... (2)

(2) নং সমীকরণটি $\tan\alpha$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং $\tan\alpha$ এর বাস্তব মানের জন্য সে বলটিকে গোল পোস্ট পার করতে সক্ষম হবে।

সুতরাং নিশ্চায়ক $= (-4dH)^2 - 4d^2(4hH + d^2) \geq 0$

$\Rightarrow 4H^2 - 4hH - d^2 \geq 0\ [\because d > 0]$

$\Rightarrow (2H)^2 - 2.2H.h + h^2 \geq h^2 + d^2$

$\Rightarrow (2H - h)^2 \geq h^2 + d^2$

$\Rightarrow 2H - h \geq \sqrt{h^2 + d^2}$

$\therefore 2H \geq h + \sqrt{h^2 + d^2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৩ দৃশ্যকল্প-১: সমত্বরণে চলন্ত কোনো বিন্দু t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে সমান সমান ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২: একটি টাওয়ারের চূড়া হতে S_1 পাথর, x মিটার নিচে নামার পর S_2 পাথর, চূড়ার y মিটার নিচ হতে ফেলে দেওয়া হলো।

[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

ক. কোনো বস্তুকণা u আদিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হয়ে সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছালে বস্তুকণাটির সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। ২

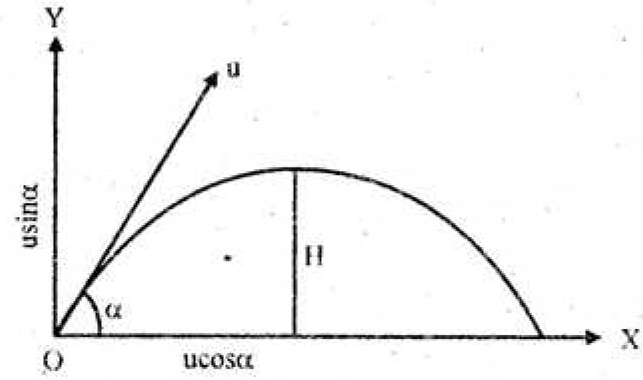
খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$ ৪

গ. যদি S_1 ও S_2 উভয়ই স্থিরাবস্থা হতে পড়ে এবং একই সঙ্গে ভূমিতে পতিত হয় তবে দেখাও যে, টাওয়ারের উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, কোনো বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। O বিন্দুতে u বেগের আনুভূমিক লম্বাংশ $u\cos\alpha$ এবং উলম্ব লম্বাংশ $u\sin\alpha$ এবং বস্তুকণাটি সর্বাধিক H উচ্চতায় পৌঁছে।

বেগের উলম্ব লম্বাংশের ওপর অভিকর্ষজ ত্বরণের প্রভাব থাকায় উক্ত বেগ ক্রমান্বয়ে কমতে থাকবে এবং বস্তুকণার সর্বাধিক উচ্চতায় এর মান শূন্য হবে।



যেহেতু বস্তুকণাটির সর্বাধিক উচ্চতায় এর উলম্ব বেগ শূন্য হয়।

$\therefore 0 = (u\sin\alpha)^2 - 2gH$ বা, $H = \frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha$

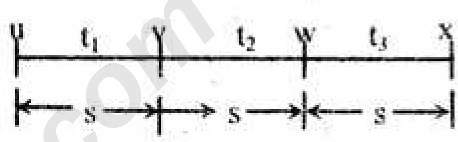
$\therefore$ সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha$

খ মনে করি, t_1 বিরতির আরম্ভের বেগ = u

t_1 বিরতির শেষে বেগ = v

t_2 বিরতির শেষে বেগ = w

t_3 বিরতির শেষে বেগ = x



ধরি, ত্বরণ = f এবং সমান সমান ক্রমিক দূরত্ব = s

∴ গড়বেগ, $\frac{s}{t_1} = \frac{u+v}{2}$ .... (i)

$\frac{s}{t_2} = \frac{v+w}{2}$ .... (ii)

$\frac{s}{t_3} = \frac{w+x}{2}$ .... (iii)

(i) নং ও (iii) নং যোগ অতঃপর (ii) নং বিয়োগ করে,

$\frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2} + \frac{s}{t_3} = \frac{1}{2}(u + v - v - w + w + x)$

বা, $s\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) = \frac{1}{2}(u + x)$

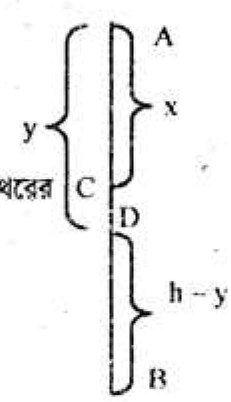
বা, $s\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) = \frac{1}{2}(u + x)$

সমগ্র সময়ের গড়বেগ $= \frac{\text{মোট দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}} = \frac{3s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{u+x}{2}$

$\therefore s\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) = \frac{3s}{t_1 + t_2 + t_3}$

$\therefore \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$ (প্রমাণিত)

গ মনে করি, টাওয়ারের চূড়া A বিন্দু থেকে S_1 পাথর খন্ডটি C বিন্দুতে পৌঁছালে, A বিন্দু থেকে y মিটার নিচে অবস্থিত D বিন্দু হতে S_2 পাথরখন্ডটি ফেলা হলো।



এখানে $AC = x, AD = y, AB = h, DB = h - y$

C বিন্দুতে S_1 পাথর খন্ডটির বেগ v হলে,

$v^2 = 0 + 2gx \Rightarrow v^2 = 2gx$

মনে করি, S_2 পাথর খন্ডটি ফেলার t সময় পরে উভয় পাথরের খন্ড একই সাথে ভূমিতে পড়ে।

S_1 পাথর খন্ডটির ক্ষেত্রে, $h - x = vt + \frac{1}{2}gt^2$ ...... (i)

S_2 পাথর খন্ডটির ক্ষেত্রে, $h - y = \frac{1}{2}gt^2$ ...... (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে,

$h - x - h + y = vt + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2$

বা, $y - x = vt$

বা, $t = \frac{y - x}{v}$

(ii) নং এ t এর মান বসিয়ে,

$h - y = \frac{1}{2}g\left(\frac{y - x}{v}\right)^2$

বা, $h - y = \frac{1}{2}g\frac{(y - x)^2}{v^2}$

বা, $h - y = \frac{1}{2}g\frac{(y - x)^2}{2gx}$ $[\because v^2 = 2gx]$

বা, $h - y = \frac{(y - x)^2}{4x}$

বা, $h = y + \frac{(y - x)^2}{4x} = \frac{4xy + (y - x)^2}{4x} = \frac{(y + x)^2}{4x}$ মিটার।

অর্থাৎ টাওয়ারের উচ্চতা $h = \frac{(y + x)^2}{4x}$ মিটার। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ দৃশ্যকল্প-১: স্থির অবস্থান হতে চলতে শুরু করে একটি বস্তু তার গতিপথের প্রথমাংশ f_1 সমত্বরণে এবং শেষাংশ f_2 সমমন্দনে চলে। বস্তুটির চলনকাল t এবং এই সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব s.

দৃশ্যকল্প-২: একটি পাথর একটি কুয়ায় ছেড়ে দিলে t সেকেন্ড পরে এর পতনের শব্দ শোনা যায়। v শব্দের বেগ এবং h কুয়ার গভীরতা।

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

ক. 100 মিটার প্রশস্ত একটি নদীতে স্রোত না থাকলে তা সোজাসুজি পাড়ি দিতে একজন লোকের 4 মিনিট সময় লাগে; কিন্তু স্রোত থাকলে তা পার হতে 5 মিনিট সময় লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। ২

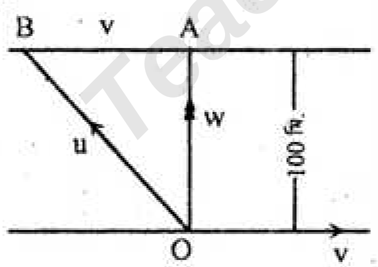
খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $t = \sqrt{\frac{2s(f_1 + f_2)}{f_1 f_2}}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $gt^2 = 2h\left(1 + \frac{gt}{v}\right)$। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ v

$\therefore u = \frac{100}{4}$ মিটার/মিনিট = 25 মিটার/মিনিট



আড়াআড়িভাবে নদী পার হতে লোকটিকে সুবিধামত এমনদিকে সাঁতার কাটতে হবে যেন তার লব্ধি স্রোতের সাথে লম্ব হয়।

চিত্র থেকে, লব্ধিবেগ w হলে,

$w = \frac{100}{5} = 20$ মি./মিনিট

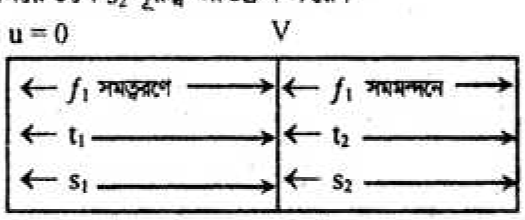
ΔOAB থেকে, $v = \sqrt{u^2 - w^2}$

$= \sqrt{25^2 - 20^2}$

$= 15$ মি./মিনিট

অতএব, স্রোতের বেগ = 15 মিটার/মিনিট **(Ans.)**

খ মনে করি, বস্তুটি স্থিরাবস্থা হতে f_1 সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার বস্তুটি v বেগে f_2 মন্দনে t_2 সময়ে চলে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।



$\therefore$ $t_1 + t_2 =$ মোট সময় = t (ধরি)

এবং $s_1 + s_2 =$ মোট দূরত্ব = s

১ম ক্ষেত্রে, $v = 0 + f_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{f_1}$ .... (i)

এবং $s_1 = \frac{0 + v}{2}.t_1$ $[s = \frac{u + v}{2}.t$ সূত্র থেকে]

$= \frac{v}{2}t_1$ .... (ii)

২য় ক্ষেত্রে, $0 = v - f_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v}{f_2}$ .... (iii)

এবং $s_2 = \frac{v + 0}{2}.t_2 = \frac{v}{2}.t_2$ .... (iv)

(i) নং ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$t_1 + t_2 = \frac{v}{f_1} + \frac{v}{f_2}$

বা, $t = v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_1}\right)$ .... (v)

(ii) নং ও (iv) নং যোগ করে পাই,

$s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

বা, $s = \frac{v}{2}.t$

বা, $vt = 2s$

বা, $v = \frac{2s}{t}$

(v) নং এ v এর মান বসিয়ে $t = \frac{2s}{t}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$

বা, $t^2 = 2s\frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2}$ বা, $t = \sqrt{\frac{2s(f_1 + f_2)}{f_1 f_2}}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, তলদেশ থেকে কুয়ার মুখের উচ্চতা = h

মনে করি, কুয়ার মুখ থেকে পতিত পাথর খণ্ডটি t_1 সময় শেষে এর তলদেশে পৌঁছে।

$\therefore h = \frac{1}{2}gt_1^2$

বা, $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .... (i)

ধরি, কুয়ার তলদেশে পাথরটির পতনের শব্দ, পর্যবেক্ষকের (কুয়ার মুখে) নিকট t_2 সেকেন্ড পরে পৌঁছে।

সুতরাং, $h = vt_2$

বা, $t_2 = \frac{h}{v}$ .... (ii)

$\therefore$ সর্বমোট সময়কাল, $t = t_1 + t_2$

বা, $t = \frac{h}{v} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$

বা, $t - \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

বা, $\left(t - \frac{h}{v}\right)^2 = \frac{2h}{g}$ [বর্গ করে]

বা, $t^2 + \left(\frac{h}{v}\right)^2 - \frac{2h}{v}t = \frac{2h}{g}$

$\left(\frac{h}{v}\right)^2$ অতিক্ষুদ্র বিধায় বর্জন করে পাই,

$t^2 - \frac{2ht}{v} = \frac{2h}{g}$

বা, $gt^2 - \frac{2hgt}{v} = 2h$

$\therefore gt^2 = 2h\left(1 + \frac{gt}{v}\right)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ বায়ুশূন্য অবস্থায় একটি বস্তুকণাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে u আদিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। তার পাল্লা, ভ্রমণকাল যথাক্রমে R এবং T।

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]

ক. প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার বিচরণকাল নির্ণয় কর। ২

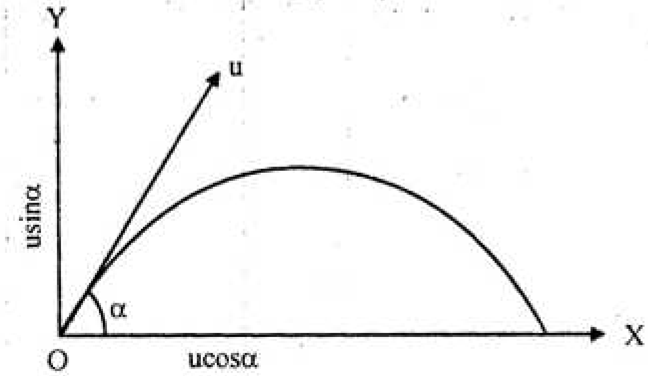
খ. প্রমাণ কর যে, প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার গতিপথ একটি পরাবৃত্ত। ৪

গ. বস্তুকণাটি সর্বাধিক H উচ্চতায় উঠলে প্রমাণ কর যে,

$R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, কোনো বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদিবেগে অনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। O বিন্দুতে u এর অনুভূমিক উপাংশ $u\cos\alpha$ এবং উল্লম্ব উপাংশ $u\sin\alpha$।
অভিকর্ষজ ত্বরণ g নিম্নদিকে উল্লম্বভাবে ক্রিয়াশীল বিধায় $u\cos\alpha$ এর উপর g এর কোন প্রভাব থাকবে না। বস্তুকণাটি T সময় পর অনুভূমিক তলে ফিরে আসলে লম্বিক সরণ শূন্য হবে।



$\therefore\ 0 = u\sin\alpha.T - \frac{1}{2}gT^2$ বা, $0 = 2u\sin\alpha.T - gT^2$

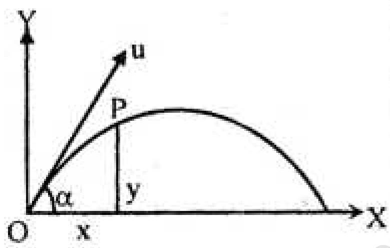
বা, $gT^2 - 2u\sin\alpha.T = 0$

বা, $T(gT - 2u\sin\alpha) = 0 \therefore gT - 2u\sin\alpha = 0$ [$\because T \neq 0$]

$\therefore\ T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

সুতরাং বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, একটি বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদিবেগে আনুভূমিকের সঙ্গে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। O বিন্দুগামী আনুভূমিক ও উল্লম্ব OX ও OY রেখাদ্বয় যথাক্রমে x-অক্ষকে ও y-অক্ষ ধরলে t সময়ে বস্তুকণাটি P(x, y) বিন্দুতে অবস্থান করে। O বিন্দুতে u এর আনুভূমিক লম্বাংশ $u\cos\alpha$ এবং উল্লম্ব লম্বাংশ $u\sin\alpha$ আনুভূমিকের দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ শূন্য এবং উল্লম্ব দিকে ত্বরণ −g



t সময়ে আনুভূমিক সরণ $x = u\cos\alpha.t \ \therefore t = \frac{x}{u\cos\alpha}$

t সময়ে উল্লম্ব সরণ $y = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$ ⋯ ⋯ (i)

(i) এ t এর মান বসিয়ে পাই,

$y = u\sin\alpha.\frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

u, α, g ধ্রুবক বলে $a = -\frac{g}{2u^2\cos^2\alpha}$ এবং $b = \tan\alpha$ ধরে পাই, $y = ax^2 + bx$, যা t মুক্ত।

∴ বায়ুশূন্য স্থানে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ প্যারাবোলা বা পরাবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৩

প্রশ্ন ▶১৬ দৃশ্যকল্প-১: সুষমত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দু কণা t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে সমান তিনটি ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।
দৃশ্যকল্প-২: একটি ক্রিকেট বলকে আঘাত করলে তা নিক্ষেপ বিন্দু হতে যথাক্রমে b এবং a দূরত্বে অবস্থিত a এবং b উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি দেওয়াল কোন রকমে অতিক্রম করে। *[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত u ও v মানের বেগদ্বয়ের লব্ধির মান w; u এর দিক বরাবর w এর লম্বাংশের পরিমাণ v হলে প্রমাণ কর যে, বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\frac{v-u}{v}$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর : $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর ক্রিকেট বলটির পাল্লা, $R = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ ৪

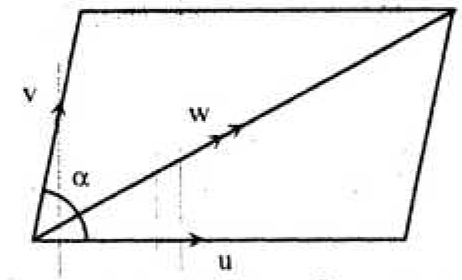
১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, u ও v বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α।
সুতরাং, u বেগের ক্রিয়ারেখা বরাবর u ও v বেগের লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল

$= u\cos 0^\circ + v\cos\alpha$

$= u + v\cos\alpha$

u এর দিক বরাবর w বেগের লম্বাংশক = v [শর্ত অনুযায়ী]



যেহেতু যে কোনো রেখা বরাবর লব্ধির লম্বাংশক এবং অংশক বেগগুলোর লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল পরস্পর সমান।

অতএব, $u + v\cos\alpha = v$

বা, $v\cos\alpha = v - u$

বা, $\cos\alpha = \frac{v-u}{v}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v-u}{v}\right)$ **(প্রমাণিত)**

খ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৫

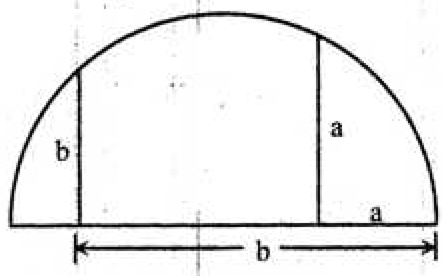
গ মনে করি, বলটির প্রক্ষেপ বেগ u এবং প্রক্ষেপ কোণ α।
আমরা জানি, বায়ু শূন্য স্থানে প্রক্ষিপ্ত কণার গতিপথের সমীকরণ $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

প্রথম দেওয়ালের ক্ষেত্রে, y = a এবং x = b

$\therefore\ a = b\tan\alpha\left(1 - \frac{b}{R}\right)$ .... (i)

দ্বিতীয় দেওয়ালের ক্ষেত্রে, y = b এবং x = a

$\therefore\ b = a\tan\alpha\left(1 - \frac{a}{R}\right)$ .... (ii)



(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে,

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}.\frac{R-b}{R} \times \frac{R}{R-a}$

বা, $\frac{R-b}{R-a} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $b^2R - b^3 = a^2R - a^3$

বা, $(a^2 - b^2)R = a^3 - b^3$

বা, $R = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a-b)}$

$\therefore R = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৭ u গতিবেগে এবং অনুভূমির সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা ও বৃহত্তম পাল্লা যথাক্রমে R ও R_m। দুইটি বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতা h_1 ও h_2। *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. u আদিবেগে এবং f ত্বরণে একটি সরলরেখায় চলমান কোন বস্তু t সময় অন্তে s দূরত্ব অতিক্রম করে। এর অন্তবেগ v হলে দেখাও যে, $\frac{v+u}{v-u} = \frac{2s}{ft^2}$। ২

খ. দেখাও যে, $R_m = 2(h_1 + h_2)$। ৪

গ. দেখাও যে, $R^2 = 16h_1\left(\frac{u^2}{2g} - h_1\right)$। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, বস্তু কণাটি u আদিবেগে f ত্বরণে চলে t সময় অন্তে s দূরত্ব অতিক্রম করে এবং এর অন্তবেগ v প্রাপ্ত হয়।

$\therefore \quad s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

বা, $2s = 2ut + ft^2$

বা, $2ut + ft^2 = 2s$

বা, $\frac{2ut}{ft^2} + 1 = \frac{2s}{ft^2}$ [উ: পক্ষকে ft^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{2u}{ft} + 1 = \frac{2s}{ft^2}$

বা, $\frac{2u}{v-u} + 1 = \frac{2s}{ft^2}$ [$\because v = u + ft$ বা, $ft = v - u$]

বা, $\frac{2u + v - u}{v - u} = \frac{2s}{ft^2}$

$\therefore \quad \frac{v+u}{v-u} = \frac{2s}{ft^2}$ **(দেখানো হলো)**

খ প্রক্ষেপ বেগ u এবং প্রক্ষেপ কোণ α

তাহলে, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ ... ... (i)

আবার বৃহত্তম পাল্লা, $R_m = \frac{u^2 \sin 90°}{g} = \frac{u^2}{g}$ [$\because \alpha = 45°$]

$\therefore \quad R = R_m \sin 2\alpha$ [(i) নং দ্বারা]

আবার, $R = R_m \sin 2\alpha = R_m \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

সুতরাং, একই পাল্লার জন্য দুইটি ভিন্ন প্রক্ষেপ কোণ থাকতে পারে।

$h_1 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

এবং $h_2 = \frac{u^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2g} = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$

$\therefore \quad h_1 + h_2 = \frac{u^2}{2g}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{u^2}{2g} = \frac{R_m}{2}$

$\therefore \quad R_m = 2(h_1 + h_2)$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, u আদিবেগে এবং অনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা R এবং সর্বাধিক উচ্চতা h_1।

তাহলে, $h_1 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ বা, $\sin^2 \alpha = \frac{2gh_1}{u^2}$

$\therefore \sin \alpha = \sqrt{\frac{2g\,h_1}{u^2}}$

আবার, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2}{g}.2 \sin \alpha \cos \alpha$

$= \frac{2u^2}{g}\sqrt{\frac{2g\,h_1}{u^2}}.\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$= \frac{2u^2}{g}\sqrt{\frac{2g\,h_1}{u^2}}.\sqrt{1 - \frac{2g\,h_1}{u^2}}$

$= 4\sqrt{\frac{u^4}{4g^2}.\frac{2g\,h_1}{u^2}\left(\frac{u^2 - 2g\,h_1}{u^2}\right)}$

$= 4\sqrt{\frac{h_1}{2g}(u^2 - 2g\,h_1)} = 4\sqrt{h_1\left(\frac{u^2}{2g} - h_1\right)}$

$\therefore R^2 = 16h_1\left(\frac{u^2}{2g} - h_1\right)$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ (i) একটি প্রক্ষেপক 49 m/s বেগে প্রক্ষিপ্ত হয়ে সর্বাধিক পাল্লা অতিক্রম করে।

(ii) সমত্বরণে চলমান একটি কণা পরপর t_1, t_2, t_3 সময়ে d, 2d এবং 3d দূরত্ব অতিক্রম করে। *[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. এক খন্ড পাথর ভূমি থেকে 4.9 m/s বেগে খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত হলে 5 sec-এ তা ভূমিতে ফিরে আসে। সর্বাধিক উচ্চতা কত? ২

খ. (i) এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $R_{max} = 4H$ ৪

গ. (ii) এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{2}{t_2} + \frac{3}{t_3} = \frac{6}{t_1 + t_2 + t_3}$ ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মোট বিচরণকাল, $T = \frac{2u}{g}$

বা, $g = \frac{2u}{T} = \frac{2 \times 4.9}{5} = 1.96\ m/s^2$

সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(4.9)^2}{2 \times 1.96} = 6.125$ m **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, u = 49 m/s

আমরা জানি, সর্বাধিক আনুভূমিক পাল্লা অতিক্রম করলে আনুভূমিকের সাথে উৎপন্ন কোণ α = 45°

$R_{max} = \frac{u^2}{g} = \frac{49^2}{9.8} = 245$ m

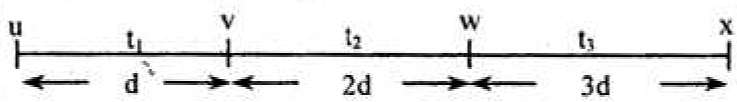
সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$= \frac{49^2 \sin^2 45°}{2 \times 9.8} = 61.25$ m

$\frac{R_{max}}{H} = \frac{245}{61.25} = 4$

$\therefore \quad R_{max} = 4H$ **(প্রমাণিত)**

গ



ধরি, t_1 বিরতির আরম্ভের বেগ = u

t_1 বিরতির শেষে বেগ = v

t_2 বিরতির শেষে বেগ = w

t_3 ,, ,, ,, = x

ধরি, ত্বরণ = f

গড়বেগ $\frac{d}{t_1} = \frac{u+v}{2}$ ... ... (i)

$\frac{2d}{t_2} = \frac{v+w}{2}$ ... ... (ii)

$\frac{3d}{t_3} = \frac{w+x}{2}$ ... ... (iii)

এখন, (i) ও (iii) নং যোগ করে এবং (ii) নং বিয়োগ করে,

$\frac{d}{t_1} - \frac{2d}{t_2} + \frac{3d}{t_3} = \frac{1}{2}(u + v - v - w + w + x)$

বা, $d\left(\frac{1}{t_1} - \frac{2}{t_2} + \frac{3}{t_3}\right) = \frac{1}{2}(u + x)$ ... ... (iv)

সমগ্র সময়ের গড়বেগ $= \frac{d + 2d + 3d}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{6d}{t_1 + t_2 + t_3}$

$= \frac{u+x}{2}$ ... ... (v)

(iv) ও (v) নং থেকে,

$d\left(\frac{1}{t_1} - \frac{2}{t_2} + \frac{3}{t_3}\right) = \frac{6d}{t_1 + t_2 + t_3}$

$\therefore \quad \frac{1}{t_1} - \frac{2}{t_2} + \frac{3}{t_3} = \frac{6}{t_1 + t_2 + t_3}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ দৃশ্যকল্প-১: সুষম ত্বরণে সোজা রেলপথে চলন্ত একটি ট্রেনের গড়বেগ ধারাবাহিকভাবে t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে v_1, v_2, v_3।

দৃশ্যকল্প-২: U বেগে α কোণে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের অনুভূমিক পাল্লা R এবং সর্বাধিক উচ্চতা H. *[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]*

ক. 6 মিটার/সেকেন্ড বেগে উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হতে একটি পাথর ফেলা হলো। যদি পাথরটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে, তবে পাথরটি ফেলার সময় বেলুন কত উঁচুতে ছিল? ২

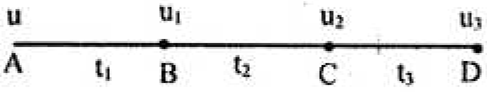
খ. দৃশ্যকল্প-১ অবলম্বনে প্রমাণ কর যে, $\frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত R = 100 গজ এবং $H = 56\frac{1}{4}$ ফুট হলে, u এবং α এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন-৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ মনে করি, f সমত্বরণে চলমান একটি ট্রেন A বিন্দু থেকে u আদিবেগে যাত্রা করে t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে B, C, D বিন্দুতে u_1, u_2, u_3 বেগপ্রাপ্ত হয়।



$u_1 = u + ft_1$
$u_2 = u_1 + ft_2 = u + ft_1 + ft_2$
$u_3 = u_2 + ft_3 = u + ft_1 + ft_2 + ft_3$

$\therefore \quad v_1 = \frac{u + u_1}{2}$

$v_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}$

$v_3 = \frac{u_2 + u_3}{2}$

$\therefore \quad v_1 - v_2 = \frac{u + u_1}{2} - \frac{u_1 + u_2}{2}$

$= \frac{u + u_1 - u_1 - u_2}{2}$

$= \frac{u - u_2}{2}$

$v_2 - v_3 = \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{u_2 + u_3}{2}$

$= \frac{u_1 + u_2 - u_2 - u_3}{2}$

$= \frac{u_1 - u_3}{2}$

$\therefore \quad \frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{u - u_2}{u_1 - u_3}$

$= \frac{u - u - ft_1 - ft_2}{u + ft_1 - u - ft_1 - ft_2 - ft_3}$

$= \frac{-f(t_1 + t_2)}{-f(t_2 + t_3)}$

$= \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$

$\therefore \quad \frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$ (প্রমাণিত)

গ মনে করি, প্রক্ষেপণ বেগ = u ফুট/সে.

,, কোণ = α

আনুভূমিক পাল্লা, R = 100 গজ = 300 ফুট

বৃহত্তম উচ্চতা, $H = 56\frac{1}{4}$ ফুট $= \frac{225}{4}$ ফুট

আমরা পাই, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = 300$ .... (i)

$H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{225}{4}$ .... (ii)

(i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{2 \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{300 \times 4}{225}$

বা, $\frac{4 \sin\alpha \cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{16}{3}$

বা, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}$

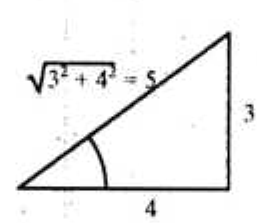
বা, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ **(Ans.)**

(ii) থেকে পাই, $\frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{225}{4}$

বা, $\frac{u^2 \left\{\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)\right\}^2}{2 \times 32} = \frac{225}{4}$

বা, $\frac{u^2 \left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\right\}^2}{64} = \frac{225}{4}$

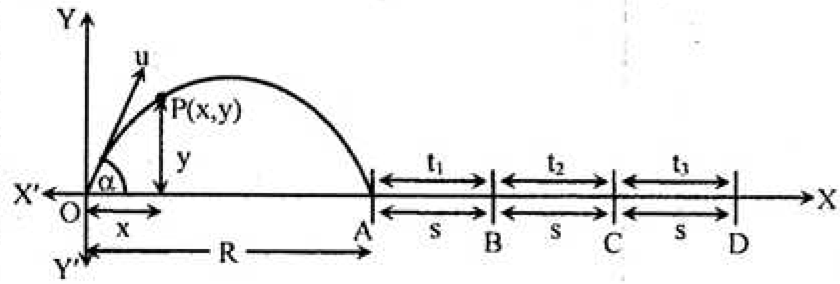


বা, $u^2 \times \frac{9}{25} = \frac{225}{4} \times 64$

বা, $u^2 = 10000$

$\therefore \quad u = 100$ ফুট/সে. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ [ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]



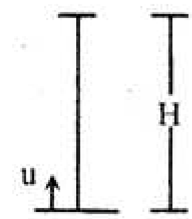
ক. u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কণার সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, উদ্দীপকের উল্লেখিত প্রক্ষিপ্ত বস্তুর নিক্ষেপন কোণ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x} \cdot \frac{R}{R - x}\right)$. ৪

গ. সুষম ত্বরণে চলমান কোন কণা A থেকে D দূরত্ব অতিক্রমের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$. ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক u আদিবেগে একটি বস্তুকণাকে ভূমি থেকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে অভিকর্ষজ ত্বরণ প্রতিকূলে কাজ করে বলে g মন্দনের সৃষ্টি হয় ফলে বস্তুকণাটির বেগ ক্রমশঃ কমতে থাকে। T_1 সময়ে সর্বাধিক H উচ্চতায় বস্তুকণারটির বেগ শূন্য হবে।

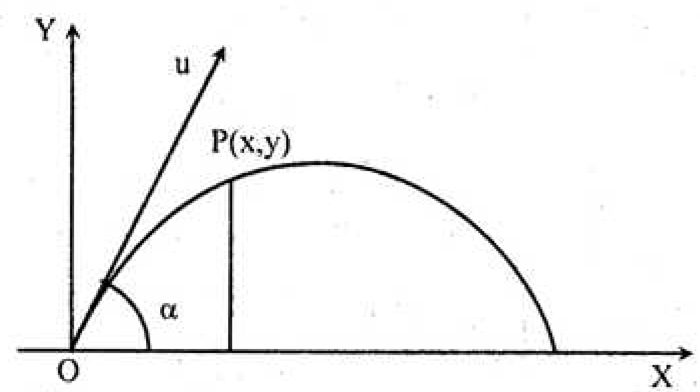


$\therefore \quad 0 = u^2 - 2gH$ [$v^2 = u^2 - 2gh$ সূত্রের সাহায্যে]

বা, $2gH = u^2$

$\therefore \quad H = \frac{u^2}{2g}$ = সর্বাধিক উচ্চতা

খ মনে করি, একটি কণা O বিন্দু হতে u বেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হলো। O বিন্দুগামী আনুভূমিক ও উল্লম্বরেখা OX ও OY কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরা হলো। তাহলে, মূল বিন্দু O এবং মনে করি, t সময়ে কণাটি P(x, y) বিন্দুতে অবস্থান করে। তাহলে, আনুভূমিক দিকে ত্বরণ শূন্য ও উর্ধ্বদিকে ত্বরণ – g হওয়ায় গতির সমীকরণ,



$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ এবং $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ ....(i)

যোগজীকরণ করে পাই,

$\frac{dx}{dt} = A$ এবং $\frac{dy}{dt} = -gt + C$ ....(ii)

আবার, যোগজীকরণ করে, $x = At + B$

এবং $y = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$ ....(iii)

এখানে, A, B, C ও D যোগজীকরণ ধ্রুবক।

আদি অবস্থায়, $x = y = 0, t = 0$

$\frac{dx}{dt} = u\cos\alpha, \frac{dy}{dt} = u\sin\alpha$

(ii) নং হতে, $A = u\cos\alpha, C = u\sin\alpha$ এবং (iii) নং হতে, $B = 0, D = 0$

(iii) নং এ A, B, C, D এর মান বসিয়ে পাই,

$x = ut\cos\alpha, y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

t অপসারণ করে, অর্থাৎ, $t = \frac{x}{u\cos\alpha}$ বসিয়ে,

$$y = u\sin\alpha.\frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\alpha}\right)^2$$
$$= x\tan\alpha - \frac{g}{2}.\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}$$
$$= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$
$$= x\tan\alpha - \frac{gx^2\tan\alpha}{2u^2\sin\alpha\cos\alpha} = x\tan\alpha\left(1 - \frac{gx}{u^2\sin2\alpha}\right)$$
$$= x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{\frac{u^2\sin2\alpha}{g}}\right)$$

$\therefore \quad y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

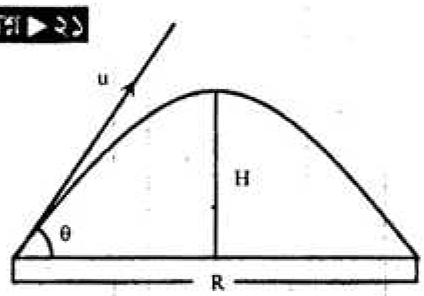
বা, $\tan\alpha\left(\frac{R-x}{R}\right) = \frac{y}{x}$

বা, $\tan\alpha = \frac{y}{x}.\frac{R}{R-x}$

$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}.\frac{R}{R-x}\right)$ (প্রমাণিত)

গ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ২১



[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

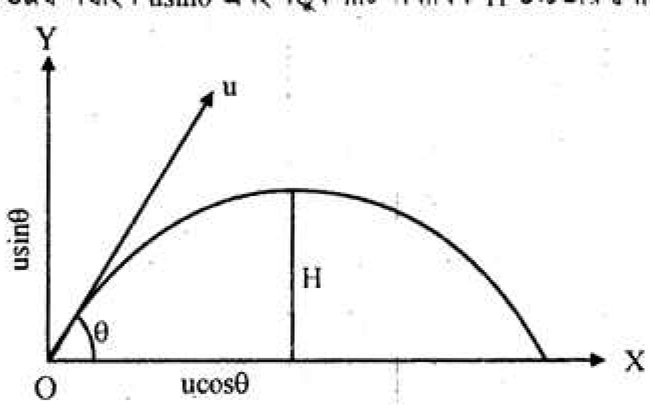
ক. প্রমাণ কর, $H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$ ২

খ. প্রমাণ কর, $16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ ৪

গ. $H = 56\frac{1}{4}$ ফুট এবং $R = 100$ গজ হলে θ এর মান বের কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, কোনো বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদিবেগে আনুভূমিকের সাথে θ কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। O বিন্দুতে u বেগের আনুভূমিক লম্বাংশ $u\cos\theta$ এবং উল্লম্ব লম্বাংশ $u\sin\theta$ এবং বস্তুকণাটি সর্বাধিক H উচ্চতায় পৌছে।



বেগের উল্লম্ব লম্বাংশের ওপর অভিকর্ষজ ত্বরণের প্রভাব থাকায় উক্ত বেগ ক্রমান্বয়ে কমতে থাকবে এবং বস্তুকণার সর্বাধিক উচ্চতায় এর মান শূন্য হবে।

যেহেতু বস্তুকণাটির সর্বাধিক উচ্চতায় এর উল্লম্ব বেগ শূন্য হয়।

$\therefore 0 = (u\sin\theta)^2 - 2gH$ বা, $H = \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta$

$\therefore$ সর্বোচ্চ উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta$ (প্রমাণিত)

খ u বেগে এবং α কোণে প্রক্ষিপ্ত কণার আনুভূমিক পাল্লা; $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা : $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

এখন, বামপক্ষ $= 16gH^2 - 8u^2H + gR^2$

$$= 16g\left(\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)^2 - 8u^2.\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} + g\left(\frac{u^2\sin2\alpha}{g}\right)^2$$
$$= \frac{4u^4\sin^4\alpha}{g} - \frac{4u^4\sin^2\alpha}{g} + \frac{u^4}{g}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2$$
$$= \frac{4u^4}{g}\{\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha\}$$
$$= \frac{4u^4}{g}\{\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)\}$$
$$= \frac{4u^4}{g}\{\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\}$$

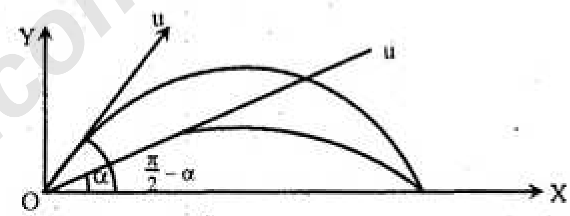
$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore 16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ (প্রমাণিত)

গ সৃজনশীল ১৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ২২ দৃশ্যকল্প-১: একটি টাওয়ারের চূড়া থেকে এক খন্ড পাথর x মিটার নিচে নামার পর অপর একখন্ড পাথর চূড়ার y মিটার নিচ থেকে ফেলে দেয়া হলো।

দৃশ্যকল্প-২:



[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]

ক. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে $7\ ms^{-2}$ ত্বরণে চলতে থাকলে তৃতীয় সেকেন্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? ২

খ. দৃশ্যকল্প-২ এ প্রক্ষিপ্ত বস্তু দু'টির বিচরণকাল 4.9 সে. এবং ৪ সে. হলে বস্তুদ্বয়ের পাল্লা নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-১ এ যদি দুটি পাথরই স্থির অবস্থা থেকে পড়ে এবং একই সাথে ভূমিতে পতিত হয়, তবে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, আদিবেগ $u = 0\ ms^{-1}$

ত্বরণ $a = 7\ ms^{-2}$

সময়, $t = 3s$

তৃতীয় সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S_3 = u + \frac{1}{2}a(2t - 1)$

$$= 0 + \frac{1}{2} \times 7(2 \times 3 - 1)$$
$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 5$$
$$= 17.5m \text{ (Ans.)}$$

খ দৃশ্যকল্প-২ এ বস্তু দুটির আদিবেগ = u এবং বিচরণকাল যথাক্রমে 4.9 সেকেন্ড এবং ৪ সেকেন্ড

প্রথম বস্তুটির ক্ষেত্রে, $T_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

বা, $4.9 = \frac{2u\sin\alpha}{9.8}$

$\therefore u\sin\alpha = 24.01$ ... ... (i)

দ্বিতীয় বস্তুটির ক্ষেত্রে, $T_2 = \frac{2u\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{g}$

বা, $8 = \frac{2u\cos\alpha}{9.8}$

$\therefore \quad u\cos\alpha = 39.2$ ... ... (ii)

$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{u \sin\alpha}{u \cos\alpha} = \frac{24.01}{39.2}$

$\tan\alpha = 0.6125$

$\alpha = 31.49$

$\alpha = 31.49°$ (i) এ বসিয়ে পাই,

$u \sin 31.49 = 24.01$

$\therefore \ u = 45.97$

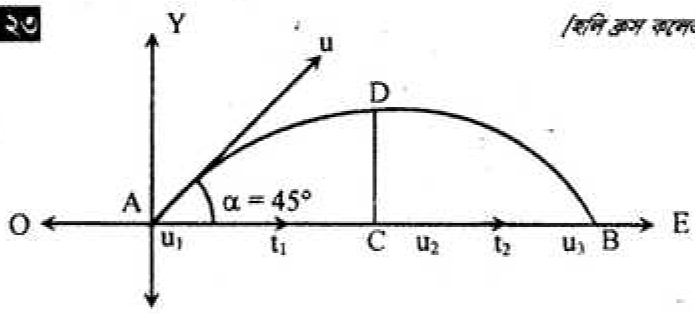
$\therefore$ আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$= \frac{(45.97)^2 \sin (2 \times 31.49)}{9.8}$

$= 192.10$m **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৫

প্রশ্ন ▶ ২৩ *[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]*



ক. কোনো বস্তুকে কত কোণে নিক্ষেপ করা হলে এর আনুভূমিক পাল্লার মান এর সর্বোচ্চ উচ্চতার তিনগুণ হবে? ২

খ. OE বরাবর f সমত্বরণে চলমান কোন কণার AC এবং CB অংশের গড়বেগ যথাক্রমে v_1 এবং v_2 হলে, দেখাও যে, $f = \frac{2(v_2 - v_1)}{t_1 + t_2}$ ৪

গ. AC = 4.9 মি. এবং D বিন্দুতে প্রক্ষেপকটির উল্লম্ব বেগ শূন্য হলে CD এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, α কোণে নিক্ষেপ করতে হবে যেখানে, এর আদিবেগ u

শর্তমতে, R = 3H

বা, $\frac{u^2}{g} \sin 2\alpha = 3\frac{u^2}{2g} \sin^2\alpha$

বা, $2\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{3}{2} \sin^2\alpha$

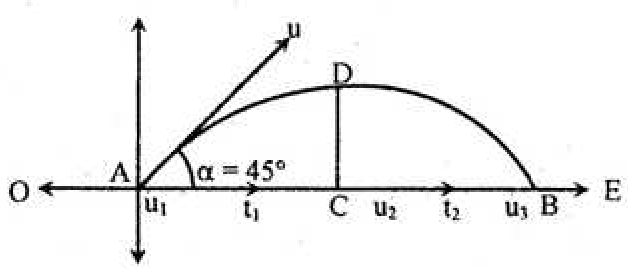
বা, $\frac{4}{3} = \tan\alpha$

$\therefore \ \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, আদিবেগ u

এবং $AC = x_1$ [ধরে]

এবং $BC = x_2$ [ধরে]



t_1 সময়ে x_1 দূরত্ব অতিক্রম করলে,

$x_1 = ut_1 + \frac{1}{2} ft_1^2$ ……… (i)

বা, $\frac{x_1}{t_1} = u + \frac{1}{2} ft_1$ ……… (ii)

যদি একই ত্বরণে তা পরবর্তী t_2 সময়ে x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে তবে যাত্রা মুহূর্ত থেকে মোট $(x_1 + x_2)$ দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় লাগবে $(t_1 + t_2)$

$\therefore x_1 + x_2 = u(t_1 + t_2) + \frac{1}{2} f(t_1 + t_2)^2$

বা, $x_1 + x_2 = ut_1 + ut_2 + \frac{1}{2} ft_1^2 + \frac{1}{2} f.2t_1t_2 + \frac{1}{2} ft_2^2$ ……… (iii)

$(iii) - (i) \Rightarrow x_1 + x_2 - x_1 = ut_1 + ut_2 + \frac{1}{2} ft_1^2 + ft_1t_2 + \frac{1}{2} ft_2^2 - ut_1 - \frac{1}{2} ft_1^2$

বা, $x_2 = ut_2 + ft_1t_2 + \frac{1}{2} ft_2^2$

বা, $\frac{x_2}{t_2} = u + ft_1 + \frac{1}{2} ft_2$ ……… (iv)

আবার, $(iv) - (ii) \Rightarrow \frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1} = u + ft_1 + \frac{1}{2} ft_2 - u - \frac{1}{2} ft_1$

বা, $\frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1} = \frac{1}{2} ft_1 + \frac{1}{2} ft_2$

বা, $\frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1} = \frac{1}{2} f(t_1 + t_2)$

এখন, $\frac{x_1}{t_1} = v_1$ এবং $\frac{x_2}{t_2} = v_2$ দেওয়া আছে।

$\therefore \ f = \frac{2(v_2 - v_1)}{t_1 + t_2}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

নিক্ষেপ কোণ, $\alpha = 45°$

আনুভূমিক পাল্লা, $R = 4.9 \times 2$

$= 9.8$m

আমরা জানি,

আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

যখন, u আদিবেগ এবং α নিক্ষেপ কোণ।

$\therefore \ \frac{R}{H} = \frac{\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}}{\frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}}$

বা, $\frac{R}{H} = \frac{2u^2 \sin\alpha.\cos\alpha}{g} \times \frac{2g}{u^2 \sin^2\alpha}$

বা, $\frac{R}{H} = \frac{4}{\tan\alpha}$

বা, $4H = R\tan\alpha$

$\therefore \ H = \frac{R\tan\alpha}{4}$

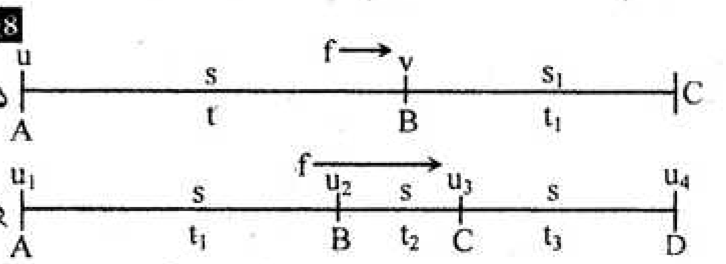
$= \frac{9.8 \times \tan 45°}{4}$

$= 2.45$m **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৪

চিত্র-১

চিত্র-২



[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার]

ক. সচরাচর সংকেত মালায় প্রমাণ কর : $v = u + ft$ ২

খ. চিত্র-১ থেকে প্রমাণ কর : $f = \frac{2\left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t}\right)}{t + t_1}$ ৪

গ. চিত্র-২ থেকে প্রমাণ কর $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$ ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন-১(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭৮

খ চিত্র-১ হতে, বস্তুকণাটি u আদিবেগে f সমত্বরণে চলে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয়।

$s = ut + \frac{1}{2} ft^2$

বা, $\frac{s}{t} = u + \frac{1}{2} ft$ …… (i)

এবং $v = u + ft$

যদি একই ত্বরণে বস্তুকণাটি পরবর্তী t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore s_1 = vt_1 + \frac{1}{2} f t_1^2$

বা, $\frac{s_1}{t_1} = v + \frac{1}{2} f t_1$

বা, $\frac{s_1}{t_1} = u + ft + \frac{1}{2} f t_1$ ...... (ii)

আবার, (ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t} = u + ft + \frac{1}{2} ft_1 - u - \frac{1}{2} ft$

$= \frac{1}{2} ft + \frac{1}{2} ft_1$

$= \frac{1}{2} f(t + t_1)$

$\therefore f = 2\left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t}\right)/(t + t_1)$ (প্রমাণিত)

গ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৫

প্রশ্ন ▶২৫ একটি বস্তু ভূমি হতে u বেগে এবং আনুভূমির সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটির অতিক্রান্ত আনুভূমিক দূরত্ব x এবং খাড়া উচ্চতা y.

[নারায়ণগঞ্জ সরকারি মহিলা কলেজ, নারায়ণগঞ্জ]

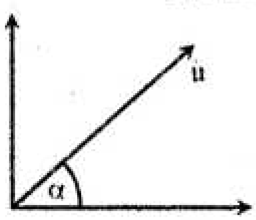
ক. নিক্ষিপ্ত বস্তুটির সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগ কত এবং নিক্ষিপ্ত বেগের উপাংশ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $y = x \tan\alpha \left(1 - \frac{x}{R}\right)$। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{g} - H\right)}$. ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



নিক্ষিপ্ত বস্তুটির সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগ শূন্য

নিক্ষিপ্ত বেগের অনুভূমিক উপাংশ = u cosα

নিক্ষিপ্ত বেগের উলম্ব উপাংশ = u sinα

খ সৃজনশীল ২০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৯

গ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৩

প্রশ্ন ▶২৬ দৃশ্যকল্প-১: সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দু কণা t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে সমান তিনটি ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২: কোন প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের বৃহত্তম উচ্চতা যথাক্রমে 8m ও 10m.

[রাজেন্দ্রপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, গাজীপুর]

ক. সচরাচর সংকেতমালায় প্রমাণ কর যে, V = u + ft ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $R = 16\sqrt{5}$ ৪

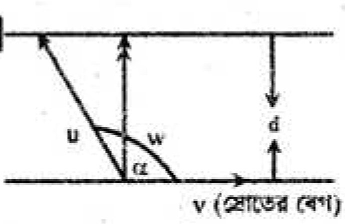
২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭৮

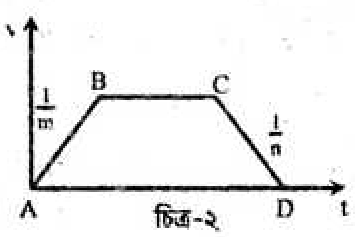
খ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৫

গ সৃজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮০

প্রশ্ন ▶২৭



চিত্র-১



চিত্র-২

[আবদুল কাদির মোল্লা সিটি কলেজ, নরসিংদী]

ক. সচরাচর সংকেতমালায় প্রমাণ কর যে, $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$. ২

খ. ১নং চিত্রে নৌকাটি t_1 সময়ে সোজাসুজি এবং t_2 সময়ে স্রোতের অনুকূলে সমান দূরত্ব পাড়ি দিলে দেখাও যে, $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{u + v}}{\sqrt{u - v}}$ ৪

গ. ট্রেনটি A স্টেশন হতে যাত্রা শুরু করে AB অংশ সমত্বরণে BC অংশ সমবেগে ও CD অংশ সমমন্দনে চলে D স্টেশনে থেমে যায়। প্রমাণ কর যে, সর্বোচ্চ বেগ ও গড়বেগের অনুপাত $\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) : 1$ ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, কোনো বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদি বেগে f সমত্বরণে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে P বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার বস্তুকণাটি অতিক্ষুদ্র δt সময়ে δs দূরত্ব অতিক্রম করে।

তাহলে বস্তুকণাটি t + δt সময়ে s + δs দূরত্ব অতিক্রম করে Q বিন্দুতে পৌঁছে v + δv বেগ প্রাপ্ত হয়।

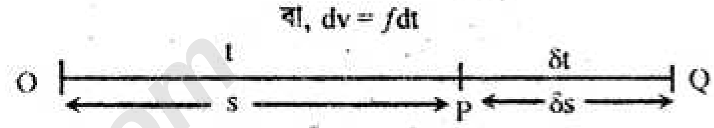
আমরা জানি, সময়ের সাথে বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে।

P বিন্দুতে বস্তু কণাটির ত্বরণ, $f = \lim_{\delta t \to 0} \frac{v + \delta v - v}{t + \delta t - t}$

বা, $f = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t}$

বা, $f = \frac{dv}{dt}$

বা, $dv = f dt$



যখন t = 0 তখন v = u এবং যখন t = t তখন v = v উক্ত সীমায় যোগজীকরণ করে পাই,

$\int_u^v dv = \int_0^t f dt$

বা, $[v]_u^V = f[t]_0^t$

বা, $v - u = f(t - 0)$

বা, $v = u + ft$ ...... (i)

আবার, আমরা জানি, সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে। সুতরাং P বিন্দুতে বস্তুকণাটির বেগ,

$v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{s + \delta s - s}{t + \delta t - t}$

বা, $v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t}$

বা, $v = \frac{ds}{dt}$

বা, $ds = vdt$

বা, $ds = (u + ft)\, dt$ ...... (ii) [(i) হতে $v = u + ft$]

যখন t = 0 তখন s = 0 এবং যখন t = t তখন s = s উক্ত সীমায় যোগজীকরণ করে পাই,

$\int_0 ds = \int_0 (u + ft)\, dt$

বা, $\int_0 ds = u \int_0 dt + f \int_0 t dt$

বা, $[s]_0^s = u[t]_0^t + f\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$

বা, $s = ut + \frac{1}{2} f(t^2 - 0)$

$\therefore s = ut + \frac{1}{2} ft^2$ (প্রমাণিত)

খ মনে করি, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি বেগ w

∴ বেগের সামান্তরিক সূত্র মতে,

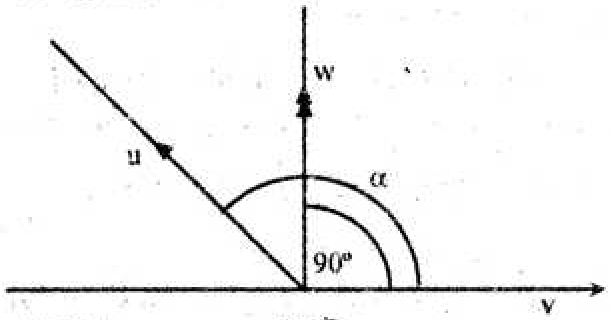
$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos\alpha$ .... (i)

আবার, $\tan 90° = \frac{u \sin\alpha}{v + u \cos\alpha}$

বা, $\cot 90° = \frac{v + u\cos\alpha}{u\sin\alpha}$

বা, $0 = v + u\cos\alpha$

∴ $u\cos\alpha = -v$



(i) নং এ $u\cos\alpha = -v$ বসাই,

$w^2 = u^2 + v^2 - 2v.v = u^2 + v^2 - 2v^2 = u^2 - v^2$

∴ $w = \sqrt{u^2 - v^2}$

নদীর বিস্তার d হলে, $d = wt$

$$\therefore t_1 = \frac{d}{w} = \frac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

আবার, স্রোতের অনুকূলে প্রকৃত বেগ $u + v$

শর্তমতে, $d = (u + v)t_1$

∴ $t_2 = \frac{d}{u + v}$

∴ $t_1 : t_2 = \frac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}} : \frac{d}{u + v}$

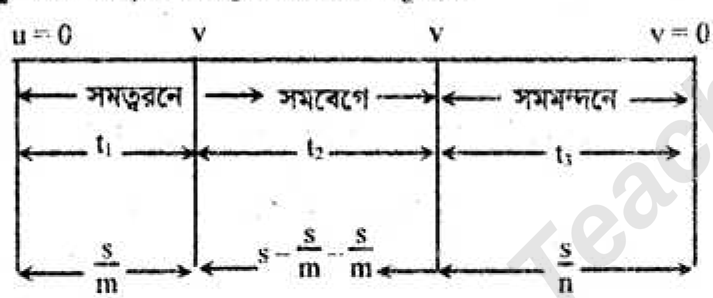
বা, $t_1 : t_2 = u + v : \sqrt{u^2 - v^2}$

বা, $t_1 : t_2 = (\sqrt{u + v})^2 : (\sqrt{u + v})(\sqrt{u - v})$

বা, $t_1 : t_2 = \sqrt{u + v} : \sqrt{u - v}$

∴ $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{u + v}}{\sqrt{u - v}}$ **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব s



ধরি, রেলগাড়িটি t_1 সময়ে সমত্বরণে চলে $\frac{s}{m}$ দূরত্ব অতিক্রম করে সর্বোচ্চ v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার t_2 সময়ে v সমবেগে চলে $\left(s - \frac{s}{m} - \frac{s}{n}\right)$ দূরত্ব অতিক্রম করে এবং t_3 সময়ে সমমন্দনে চলে $\frac{s}{n}$ দূরত্ব অতিক্রম করে।

প্রথম ক্ষেত্রে,

$s = \frac{u + v}{2}.t$ সূত্র হতে পাই,

$\frac{s}{m} = \frac{0 + v}{2}.t_1$

$= \frac{v}{2}t_1$ .... (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $s = vt$ সূত্রের সাহায্যে,

$s - \frac{s}{m} - \frac{s}{n} = vt_2$

বা, $\frac{s}{2} - \frac{s}{2m} - \frac{s}{2n} = \frac{v}{2}t_2$ .... (ii)

তৃতীয় ক্ষেত্রে,

$\frac{s}{n} = \frac{v + 0}{2}.t_3$

$= \frac{v}{2}t_3$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\frac{s}{m} + \frac{s}{2} - \frac{s}{2m} - \frac{s}{2n} + \frac{s}{n} = \frac{v}{2}(t_1 + t_2 + t_3)$

বা, $\frac{s}{2m} + \frac{s}{2} + \frac{s}{2n} = \frac{v}{2}(t_1 + t_2 + t_3)$

বা, $\frac{s}{2}\left(\frac{1}{m} + 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{v}{2}(t_1 + t_2 + t_3)$

বা, $\frac{s}{t_1 + t_2 + t_3}\left(\frac{1}{m} + 1 + \frac{1}{n}\right) = v$

বা, গড় বেগ × $\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ = সর্বোচ্চ বেগ

বা, $1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{\text{সর্বোচ্চ বেগ}}{\text{গড় বেগ}}$

∴ সর্বোচ্চ বেগ : গড়বেগ = $\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) : 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৮ দৃশ্যকল্প-১ স্রোত না থাকলে একজন লোক 100 মি. চওড়া নদী 4 মিনিটে এবং স্রোত থাকলে 5 মিনিটে পার হয়।

দৃশ্যকল্প-২: একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে পড়ন্ত একটি পাথর x মিটার নিচে নামলে টাওয়ারের শীর্ষ হতে y মিটার নিচ থেকে অপর একটি পাথর ফেলা হল। *[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]*

ক. অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে 20 মি./সে. বেগে একটি বস্তুকণা নিক্ষেপ করা হল। অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। ২

খ. স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। ৪

গ. পাথর খণ্ড দুটি একসাথে ভূমিতে পতিত হলে দেখাও যে, টাওয়ারের উচ্চতা $h = \frac{(x + y)^2}{4x}$ ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, বেগ, $u = 20\ ms^{-1}$

নিক্ষেপ কোণ, $\alpha = 60°$

∴ আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha$

$= \frac{u^2}{g}\sin(2 \times 60°)$

$= \frac{20^2}{9.8}\sin 120°$

$= \frac{400}{9.8} \times .866$

$= 35.35$ মিটার **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৪(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৬

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৫

প্রশ্ন ▶২৯ সুমন এবং সুজন ট্রেনযোগে ঢাকা থেকে চট্টগ্রামের উদ্দেশ্যে যাত্রা করলো। ট্রেনটি সকাল 7 টায় ঢাকা ছাড়ল এবং দুপুর 3 টায় চট্টগ্রাম পৌছাল। যাত্রাপথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং শেষ অংশ Y সমমন্দনে যায়। চট্টগ্রাম পৌছার পর দুইজন একটি মাঠে ক্রিকেট খেলতে নামলো। সুমন ভূমির সাথে 30° কোণে 20 মি./সে. বেগে একটি ক্রিকেট বল ছুঁড়ে মারলো এবং সুজন বলটি ধরে ফেললো। *[সরকারি সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ, ফরিদপুর]*

ক. একই বেগে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুর একই অনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য দুটি বিচরণকাল 2 এবং 4 সে. হলে অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। ২

খ. ঢাকা এবং চট্টগ্রামের মধ্যবর্তী দূরত্ব 260 কি.মি. হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{65}$. ৪

গ. সুমন এবং সুজনের মধ্যবর্তী দূরত্ব 37 মিটার এবং সুমনের উচ্চতা 2 মিটার হলে সুজনের উচ্চতা নির্ণয় কর। উল্লেখ্য সুজন সুমনের তুলনায় খর্বাকৃতির। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একই আদিবেগ, u ও একই অনুভূমিক পাল্লা, R এর জন্য প্রক্ষেপকের দুইটি প্রক্ষেপণ কোণ থাকে। একটি কোণ α হলে অপরটি হবে $(90 - \alpha)$

$\therefore t_1 = \frac{2u \sin\alpha}{g}$

বা, $\sin\alpha = \frac{gt_1}{2u}$ ……… (i)

এবং $t_2 = \frac{2u \sin(90 - \alpha)}{g}$

বা, $\cos\alpha = \frac{gt_2}{2u}$ ……… (ii)

$\therefore$ অনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$

$= \frac{2u^2}{g} \times \sin\alpha \times \cos\alpha$

$= \frac{2u^2}{g} \times \frac{gt_1}{2u} \times \frac{gt_2}{2u}$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$= \frac{1}{2} gt_1t_2$

$= \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2 \times 4$

$= 39.2$ মি. **(Ans.)**

খ মনে করি, ট্রেনটি ঢাকা থেকে যাত্রা করে x সমত্বরণে t_1 মিনিটে s_1 কি.মি. অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয়। অতঃপর v আদিবেগে y সমমন্দনে t_2 মিনিটে s_2 কি.মি. অতিক্রম করে চট্টগ্রাম থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 = 260$

$t_1 + t_2 = 8$

এখন, $v = 0 + xt_1$

$\therefore t_1 = \frac{v}{x}$ ……… (i)

এবং $s_1 = \frac{0 + v}{2} t_1 = \frac{vt_1}{2}$ ……… (ii)

আবার, $0 = v - yt_2$

বা, $t_2 = \frac{v}{y}$ ……… (iii)

এবং $\frac{v + 0}{2} \times t_2 = s_2$

$\therefore s_2 = \frac{vt_2}{2}$ ……… (iv)

(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1 + s_2 = \frac{vt_1}{2} + \frac{vt_2}{2}$

বা, $s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

বা, $260 = \frac{v}{2} \times 8$

$\therefore v = 65$

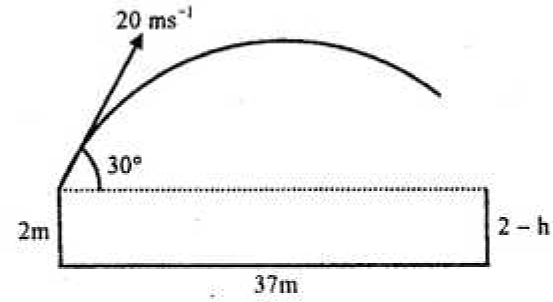
আবার, (i) + (iii) $\Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{v}{x} + \frac{v}{y}$

বা, $t_1 + t_2 = v\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{t_1 + t_2}{v}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{65}$ (প্রমাণিত)

গ



চিত্র হতে পাই, $37 = 20 \cos 30° t$

$\therefore t = \frac{37}{20 \cos 30°} = 2.1362s$

আবার, $-h = 20 \sin 30° t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$; যখন t পর্যায়কাল

$\therefore -h = (20 \sin 30°)\, 2.1362 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.1362)^2 = -0.998$

$\therefore$ সুজনের উচ্চতা $= 2 - h$; [সুজন সুমনের তুলনায় খর্বাকৃতির]

$= (2 - 0.998)$ মিটার

$= 1.002$ মিটার **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩০ একটি নৌকা 5 কি.মি./ঘণ্টা বেগে নদী পাড়ি দিতে চায়, নদীতে স্রোতের বেগ 3 কি.মি./ঘণ্টা ও নদী 500 মি. চওড়া।

[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]

ক. এদের মধ্যবর্তী কোণ 60° হলে লব্ধির মান নির্ণয় কর। ২

খ. ন্যূনতম পথে পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? ৪

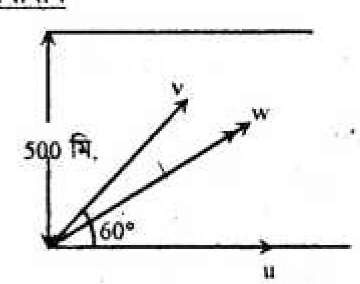
গ. ন্যূনতম সময়ে পাড়ি দিতে চাইলে কত সময় লাগবে? ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি,

স্রোতের বেগ, u = 3 কি.মি./ঘণ্টা

নৌকার বেগ, v = 5 কি.মি./ঘণ্টা

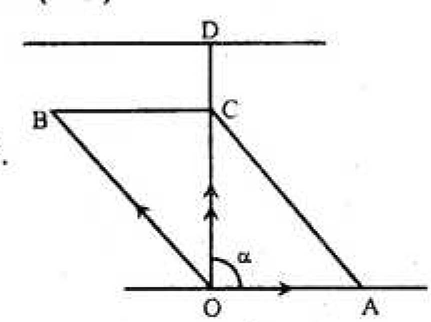


লব্ধি w হলে, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos\theta}$

$= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \times 3 \times 5 \cos 60°}$

$= 7$ কি.মি./ঘণ্টা **(Ans.)**

খ



নদীর প্রস্থ, OD = 500 মি.

$= \frac{500}{1000}$ কি.মি.

$= \frac{1}{2}$ কি.মি.

নৌকার বেগকে OB এবং স্রোতের বেগকে OA দ্বারা সূচিত করা হলো। নৌকাটি ন্যূনতম পথে পাড়ি দিলে তার লব্ধি বেগ OD বরাবর ক্রিয়াশীল এবং OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা সূচিত।

এখন, $BC^2 + OC^2 = OB^2$

বা, $OC^2 = OB^2 - BC^2 = OB^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2$

$= 25 - 9 = 16$

$\therefore OC = 4$

$\therefore$ OC বরাবর নৌকার বেগ ঘণ্টায় 4 কি.মি.

তাহলে ন্যূনতম পথে পাড়ি দেওয়ার সময় $= \frac{\frac{1}{2} \text{ কি.মি.}}{4 \text{ কি.মি./ঘণ্টা}}$

$= \frac{1}{8}$ ঘণ্টা **(Ans.)**

গ ধরি, নৌকাটি ন্যূনতম সময়ে পাড়ি দেওয়ার জন্য তীরের সাথে θ কোণে যাত্রা করে।

তাহলে OD বরাবর তার বেগ $= 3\cos 90^\circ + 5\cos(90^\circ - \theta)$
$= 0 + 5\sin\theta$

$$\text{সময়} = \frac{\frac{1}{2}\text{ কি.মি.}}{5\sin\theta\text{ কি.মি./ঘণ্টা}} = \frac{1}{10\sin\theta}\text{ ঘণ্টা}$$

সময় ন্যূনতম হবে যখন $\sin\theta$ বৃহত্তম হয়। অর্থাৎ $\theta = 90^\circ$

ন্যূনতম সময় $= \frac{1}{10\sin 90^\circ} = \frac{1}{10}$ ঘণ্টা **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩১ দৃশ্যকল্প-১: h উচ্চতাবিশিষ্ট একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে অবাধে পড়ন্ত একখন্ড পাথর 3 মিটার দূরত্বে পৌছলে টাওয়ারের শীর্ষবিন্দুর 4 মিটার নিচে কোন বিন্দু থেকে আর একখন্ড পাথর নিচে ফেলা হল।
দৃশ্যকল্প-২: একজন খেলোয়াড় 3 মিটার উচ্চতা হতে 50 মি./সে. এবং ভূমির সাথে 30° কোণে একটি বল নিক্ষেপ করে।

[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]

ক. একটি কণা u গতিবেগে প্রক্ষিপ্ত হল। যদি কণাটির বৃহত্তম উচ্চতা H হয় তবে দেখাও যে, আনুভূমিক পাল্লা $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ ২

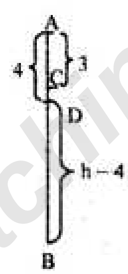
খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে উভয় পাথরখন্ড একই সাথে ভূমিতে পড়লে দেখাও যে, $h = \frac{49}{12}$ মিটার। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে অপর খেলোয়াড় 2 মিটার উচ্চতায় বলটি ধরে ফেলে। খেলোয়াড়দ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৩

খ ধরি, টাওয়ারের চূড়া A বিন্দু থেকে প্রথম পাথরখন্ডটি C বিন্দুতে পৌছালে A বিন্দু থেকে 4 মি. নিচে অবস্থিত D বিন্দু হতে দ্বিতীয় পাথর খন্ডটি ফেলা হলো।



এখানে, AC = 3 মি., AD = 4 মি.,
AB = h, BD = h − 4 মি.
C বিন্দুতে প্রথম পাথর খন্ডটির বেগ v হলে,
$v^2 = 0 + 2g \times 3 \Rightarrow v^2 = 6g$
ধরি, দ্বিতীয় পাথরখন্ডটি ফেলার t সময় পরে উভয় পাথরখন্ড একই সাথে ভূমিতে পড়ে।

১ম পাথরখন্ডটির ক্ষেত্রে, $h - 3 = vt + \frac{1}{2}gt^2$ .... (i)

২য় ,, ,, , $h - 4 = \frac{1}{2}gt^2$ .... (ii)

(i) − (ii) থেকে,

$h - 3 - h + 4 = vt + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2$

বা, $1 = vt$

বা, $t = \frac{1}{v}$

t এর মান (ii) এ বসিয়ে,

$h - 4 = \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{v}\right)^2$

বা, $h - 4 = \frac{1}{2}g\cdot\frac{1}{v^2}$

বা, $h - 4 = \frac{1}{2}g\cdot\frac{1}{6g}$ [∵ $v^2 = 6g$]

বা, $h - 4 = \frac{1}{12}$

∴ $h = \frac{1}{12} + 4 = \frac{1 + 48}{12} = \frac{49}{12}$ **(দেখানো হলো)**

গ ক্রিকেট বল কর্তৃক অতিক্রান্ত উল্লম্ব দূরত্ব = (3 − 2) মি. = 1 মি.
এবং আদিবেগে u = 50 মি./সে. ভূমির সাথে কোণ $\alpha = 30^\circ$
প্রয়োজনীয় সময় t হলে,

$h = -u\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হতে পাই,

$1 = -50(\sin 30)t + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $1 = -50 \times \frac{1}{2} \times t + \frac{1}{2} \times 9.8t^2$

বা, $4.9t^2 - 25t - 1 = 0$

বা, $t = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \times 4.9 \times (-1)}}{2 \times 4.9}$

বা, $t = 5.14, -0.04$

∴ কিন্তু সময় ঋণাত্মক হতে পারে না

∴ $t = 5.14$ সেকেন্ড

খেলোয়াড়দের দূরত্ব $= 50\cos 30^\circ \times 5.14 = 222.56$ মি. (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩২ একটি রেলগাড়ি এক স্টেশন হতে ছেড়ে অপর স্টেশনে গিয়ে থামে। রেলগাড়িটি তার যাত্রা পথের ১ম অংশ x সমত্বরণে এবং পরবর্তী অংশ y মন্দনে চলে। মোট সময় t এবং মোট দূরত্ব s।

[জয়পুরহাট সরকারি কলেজ, জয়পুরহাট]

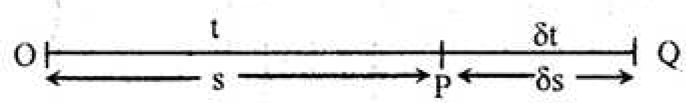
ক. সচরাচর সংকেত মালায় প্রমাণ কর যে, $v^2 = u^2 + 2fs$। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{t^2}{2s} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$। ৪

গ. উদ্দীপকের রেলগাড়িটি যদি স্থির অবস্থা হতে যাত্রা না করে u বেগে f সমত্বরণে t সময়ে s দূরত্ব এবং পরবর্তী t′ সময়ে s′ দূরত্ব অতিক্রম করে, তবে দেখাও যে, $f = 2\left(\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t}\right)/(t + t')$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, কোনো বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদি বেগে f সমত্বরণে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে P বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার বস্তু কণাটি অতিক্ষুদ্র δt সময়ে δs দূরত্ব অতিক্রম করে।
তাহলে বস্তুকণাটি t + δt সময়ে s + δs দূরত্ব অতিক্রম করে Q বিন্দুতে পৌছে v + δv বেগ প্রাপ্ত হয়।
আমরা জানি, সময়ের সাথে বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে। P বিন্দুতে বস্তুকণাটির ত্বরণ,



$f = \lim_{\delta t \to 0}\frac{v + \delta v - v}{t + \delta t - t}$

বা, $f = \lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta v}{\delta t}$

বা, $f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}.v$ [∵ P বিন্দুতে বস্তুকণাটির বেগ, $v = \lim_{\delta t \to 0}\frac{s + \delta s - s}{t + \delta t - t} = \lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$]

বা, $v\,dv = f\,ds$

যখন আদিবেগ v = u তখন s = 0 এবং যখন শেষ বেগ v = v তখন s = s
উক্ত সীমার মধ্যে যোগজীকরণ করে পাই,

$\int_0^s f\,ds = \int_u^v v\,dv$

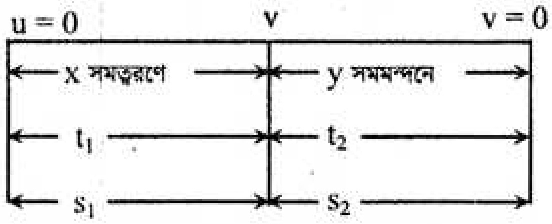
বা, $f[s]_0^s = \left[\frac{v^2}{2}\right]_u^v$

বা, $f[s - 0] = \frac{1}{2}[v^2 - u^2]$

বা, $2fs = v^2 - u^2$

বা, $v^2 = u^2 + 2fs$ **(প্রমাণিত)**

খ মনে করি, রেলগাড়িটি স্থিরাবস্থা হতে x সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার রেলগাড়িটি v বেগে y মন্দনে t_2 সময়ে চলে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে রেলগাড়িটি থামে।



$\therefore t_1 + t_2 =$ মোট সময় $= t$

এবং $s_1 + s_2 =$ মোট দূরত্ব $= s$

১ম ক্ষেত্রে, $v = 0 + xt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{x}$ ...... (i)

এবং $s_1 = \frac{0+v}{2} . t_1$ [$s = \frac{u+v}{2} . t$ সূত্র থেকে]

$= \frac{v}{2} t_1$ .... (ii)

২য় ক্ষেত্রে, $0 = v - yt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v}{y}$ .... (iii)

এবং $s_2 = \frac{v+0}{2} . t_2$

$= \frac{v}{2} . t_2$ .... (iv)

(i) নং ও (iii)নং যোগ করে পাই,

$t_1 + t_2 = \frac{v}{x} + \frac{v}{y}$

বা, $t = v\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ .... (v)

(ii)নং ও (iv) নং যোগ করে পাই,

$s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

বা, $s = \frac{v}{2}.t$

বা, $vt = 2s$

বা, $v = \frac{2s}{t}$

(v) নং এ v এর মান বসিয়ে,

$t = \frac{2s}{t}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

বা, $t^2 = 2s\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

বা, $\frac{t^2}{2s} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ২৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৯১

প্রশ্ন ▶ ৩৩ দৃশ্যকল্প-১ : একজন মোটর সাইকেল আরোহী 15 মিটার দূরে একজন অশ্বারোহীকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে $5 m/sec^2$ ত্বরণে অশ্বারোহীর পশ্চাতে মোটর সাইকেল চালাতে লাগল। অশ্বারোহী 12.5 m/sec সমবেগে যাচ্ছিল।

দৃশ্যকল্প-২ : 60 মিটার উচ্চ স্তম্ভের শীর্ষ হতে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 100 m/sec আদিবেগে একটি বস্তু নিক্ষিপ্ত হলো।

[শেরউড ইন্টারন্যাশনাল (প্রা.) স্কুল এ্যান্ড কলেজ, বগুড়া]

ক. একটি কণা স্থিরাবস্থা থেকে $7 m/sec^2$ ত্বরণে চলতে থাকলে তৃতীয় সেকেন্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে মোটর সাইকেল আরোহী কত দূরে গিয়ে অশ্বারোহীকে ধরতে পারবে? ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে বস্তুটি স্তম্ভ হতে কত দূরে ভূমিতে আঘাত করবে? ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৭নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮১

প্রশ্ন ▶ ৩৪ একটি বস্তুকে u আদিবেগে এবং অনুভূমিকের সাথে α কোণে উলম্ব তলে শূন্যে নিক্ষেপ করা হল। বস্তুটির বৃহত্তম উচ্চতা H এবং আনুভূমিক পাল্লা R।

[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]

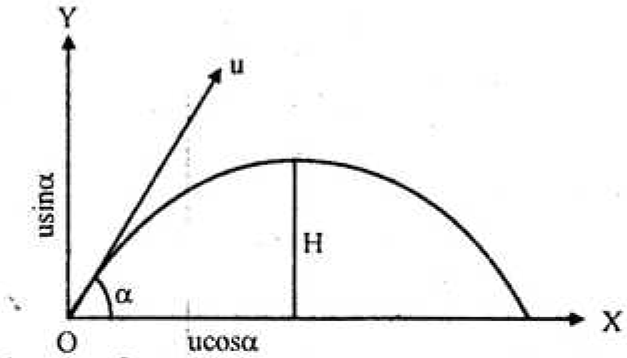
ক. সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছানোর সময় নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $y = x \tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, কোনো বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। O বিন্দুতে u বেগের আনুভূমিক উপাংশ $u\cos\alpha$ এবং উলম্ব উপাংশ $u\sin\alpha$ এবং বস্তুকণাটি সর্বাধিক H উচ্চতায় পৌছে। বেগের উলম্ব উপাংশের উপর অভিকর্ষজ ত্বরণের প্রভাব থাকায় উক্ত বেগ ক্রমান্বয়ে কমতে থাকবে এবং বস্তুকণার সর্বাধিক উচ্চতায় এর মান শূন্য হবে।



সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছানোর সময় T_1 হলে,

T_1 সময়ে বস্তুকণাটির বেগের উলম্ব উপাংশ 0 হবে।

$\therefore 0 = u\sin\alpha - gT_1$ বা, $T_1 = \frac{u}{g}\sin\alpha$

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছানোর সময় $T_1 = \frac{u}{g}\sin\alpha$

খ সৃজনশীল ২০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৯

গ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৩

প্রশ্ন ▶ ৩৫ স্থিরাবস্থা হতে সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণা প্রথমে x অংশ সমত্বরণে এবং পরে y অংশ সমমন্দনে চলে। কণাটি ৪ মিনিটে 4 কিলোমিটার অতিক্রম করে থেমে যায়। *[রাণীভবানী সরকারী মহিলা কলেজ, নাটোর]*

ক. প্রমাণ কর যে, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$. ২

খ. যদি u আদিবেগে অর্ধেক দূরত্ব x সমত্বরণে এবং বাকি অর্ধেক y সমমন্দনে চলে। প্রমাণ কর যে, শেষ বেগের মান একই হবে যদি কণাটি সমস্ত দূরত্ব $\frac{1}{2}(x+y)$ সমত্বরণে চলে। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $x + y = 8xy$. ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২৭(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৯২

খ মনে করি, মোট দূরত্ব = s.

প্রথম $\frac{s}{2}$ দূরত্ব x ত্বরণে অতিক্রম করার পর বেগ v হলে,

$v^2 = u^2 + 2x.\frac{s}{2} = u^2 + xs$

y ত্বরণে শেষ অর্ধেক অর্থাৎ $\frac{s}{2}$ দূরত্ব অতিক্রম করার পর শেষ বেগ v′

হলে, $v'^2 = v^2 + 2y\frac{s}{2} = v^2 + ys$

$\therefore v'^2 = u^2 + xs + ys = u^2 + s(x+y)$ .... (i)

আবার, $\frac{1}{2}(x+y)$ ত্বরণে সমগ্র দূরত্ব অতিক্রম করার পর বেগ v″ হলে,

$v''^2 = u^2 + 2.\frac{1}{2}(x+y)s$

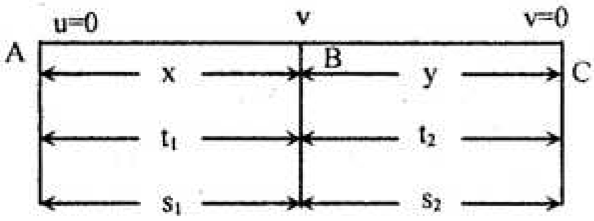
$\therefore v''^2 = u^2 + (x+y)s$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $|v'| = |v''|$

অতএব, উভয় ক্ষেত্রে শেষ বেগ একই হবে। **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, কণাটির সর্বাধিক বেগ = v কি.মি./মিনিট

ধরি, t_1 ও t_2 মিনিট ধরে যথাক্রমে সমত্বরণে ও সমমন্দনে চলে এবং s_1 এবং s_2 কি.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।



তাহলে, $s_1 + s_2 = 4$ কি. মি. এবং $t_1 + t_2 = 8$ মিনিট।

∴ গড়বেগ $\frac{s_1}{t_1} = \frac{0+v}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{v}{2}t_1$

$\frac{s_2}{t_2} = \frac{v+0}{2} \Rightarrow s_2 = \frac{v}{2}t_2$

$\therefore\ s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

বা, $4 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$ $[\because s_1 + s_2 = 4]$

বা, $4 = \frac{v}{2}8$

বা, $8v = 8$

$\therefore\ v = 1$ কি.মি./মিনিট

আবার, $v = u + ft$ সূত্র ব্যবহার করে

$v = 0 + xt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{x}$ $[\because v = 1]$

$0 = v - yt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{y}$ $[\because v = 1]$

$\therefore\ t_1 + t_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

বা, $8 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $[\because t_1 + t_2 = 8]$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8$

বা, $\frac{y+x}{xy} = 8$

$\therefore\ x + y = 8xy$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৬ গোল রক্ষকের 94 মিটার সামনে থেকে একজন ফুটবল খেলোয়াড় আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে এবং 30 মি./সে. বেগে বল নিক্ষেপ করে। একই সময়ে গোলকিপার বলটি ধরার জন্য বলের দিকে 5 মি./সে. সমবেগে দৌড়ে যাবে। *[কারমাইকেল কলেজ, রংপুর]*

ক. 50 মি./সে. বেগে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুর বৃহত্তম পাল্লা নির্ণয় কর। ২

খ. নিক্ষেপ করার 0.5 সেকেন্ড পর বলের বেগ কত? ৪

গ. ভূমিতে পড়ার আগে গোল রক্ষক বলটিকে ধরতে পারবে কিনা তা নির্ণয় কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $u = 50$ মি./সে.

আমরা জানি, বৃহত্তম পাল্লার জন্য $\theta = 45°$

বৃহত্তম পাল্লা, $R_{max} = \frac{u^2 \sin(2 \times 45°)}{g}$

$= \frac{u^2 \sin 90°}{g}$

$= \frac{(50)^2}{9.81}$

$= 254.842$ মিটার

খ দেওয়া আছে,

$V_0 = 30$ মি./সে.

$\theta_0 = 30°$

$V_{x_0} = V_0 \cos\theta_0$

$= 30 \times \cos 30°$

$= 15\sqrt{3}$ মি./সে.

$V_{y_0} = V_0 \sin\theta_0$

$= 30 \times \sin 30°$

$= 15$ মি./সে.

নিক্ষেপ করার 0.5 সেকেন্ড পরে বলের বেগ:

$V_x = V_{x_0} = 15\sqrt{3}$ মি./সে.

$V_y = V_{y_0} - gt$

$= 15 - (9.81 \times 0.5)$

$= 10.095$ মি/সে.

∴ বেগ $= \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

$V = \sqrt{(15\sqrt{3})^2 + (10.095)^2}$

$= 27.873$ মি./সে. **(Ans.)**

এবং তা আনুভূমিকের সাথে

$\theta = \tan^{-1}\frac{V_y}{V_x}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{10.095}{15\sqrt{3}}\right)$

$= 21.23°$ কোণে থাকবে। **(Ans.)**

গ মনে করি, বলটির আনুভূমিক পাল্লা = R

তাহলে গোলকিপার হতে বলটি মাটিতে পড়ার দূরত্ব = (94 − R)

আমরা জানি,	দেওয়া আছে,
$R = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$	$V_0 = 30$ মি./সে.
$= \frac{(30)^2 \times \sin(2 \times 30°)}{9.81}$	$\theta_0 = 30°$
$= 79.452$ মিটার	

বলটির বিচরণকাল, $T = \frac{2\ V_0 \sin\theta}{g}$

$= \frac{2 \times 30 \times \sin 30°}{9.81}$

$= 3.0581$ সেকেন্ড

সুতরাং বলটি গোলকিপারের (94 − 79.452) মিটার সামনে পতিত হয়।

ধরি, d = (94 − 79.452) মি. = 14.548 মি.

সুতরাং গোলকিপার যদি T = 3.0581 সেকেন্ডে d = 14.548 মি. দূরত্ব অতিক্রম করতে পারে। তাহলে বলটি ধরতে পারবে।

গোলকিপারের অতিক্রান্ত দূরত্ব = (5 × 3.0581)

= 15.2905 মিটার

যেহেতু গোলকিপারের অতিক্রান্ত দূরত্ব বেশি, তাই সে বলটি ধরতে পারবে।

প্রশ্ন ▶৩৭ একটি বস্তুকে u আদিবেগে এবং আনুভূমিকের সাথে α কোণে উলম্ব তলে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো যেখানে বস্তুটির বৃহত্তম উচ্চতা H এবং আনুভূমিক পাল্লা R। *[আহমদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]*

ক. প্রাসের বিচরণকাল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, গতিপথের সমীকরণ $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ ৪

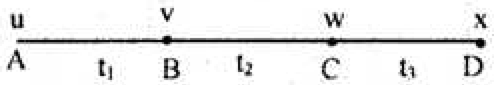
৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৭

খ সৃজনশীল ২০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৯

গ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৩

প্রশ্ন ▶ ৩৮



মনে করি, f সমত্বরণে একটি বস্তুকণা A বিন্দু থেকে u ms^{-1} বেগে যাত্রা করে t_1, t_2, t_3 সেকেন্ডে যথাক্রমে B, C, D বিন্দুতে v, w, x বেগ প্রাপ্ত হল।

[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]

ক. বস্তুটি 15 ms^{-1} বেগে ও 6 ms^{-2} সমত্বরণে চলতে থাকলে বেগ w এর মান নির্ণয় কর যখন $t_1 = 3$ সে. এবং $t_2 = 4$ সে. ২

খ. B, C, D বিন্দুতে গাড়িটির গড়বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$। ৪

গ. AB = BC = CD = s মি.। অর্থাৎ t_1, t_2, t_3 সময়ে বস্তুকণাটি সমান ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করলে দেখাও যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $u = 15\ ms^{-1}$

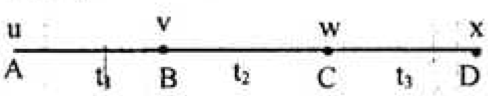
$f = 6\ ms^{-2}$

$t_1 + t_2 = 3 + 4 = 7$ sec

এখন, $w = u + f(t_1 + t_2) = (15 + 6 \times 7)\ ms^{-1}$

$\therefore w = 57\ ms^{-1}$

খ মনে করি, f সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা A বিন্দু থেকে u আদিবেগে যাত্রা করে t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে B, C, D বিন্দুতে v, w, x বেগপ্রাপ্ত হয়



$v = u + ft_1$

$w = v + ft_2 = u + ft_1 + ft_2$

$x = w + ft_3 = u + ft_1 + ft_2 + ft_3$

$\therefore v_1 = \frac{u+v}{2}, v_2 = \frac{v+w}{2}, v_3 = \frac{w+x}{2}$

$\therefore v_1 - v_2 = \frac{u+v}{2} - \frac{v+w}{2} = \frac{u+v-v-w}{2} = \frac{u-w}{2}$

$v_2 - v_3 = \frac{v+w}{2} - \frac{w+x}{2} = \frac{v+w-w-x}{2} = \frac{v-x}{2}$

$\therefore \frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{u-w}{v-x}$

$= \frac{u - u - ft_1 - ft_2}{u + ft_1 - u - ft_1 - ft_2 - ft_3}$

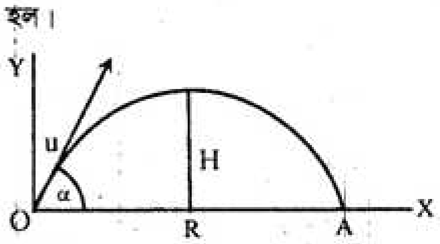
$= \frac{-f(t_1 + t_2)}{-f(t_2 + t_3)} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$

$\therefore \frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$ (প্রমাণিত)

গ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৩৯ দৃশ্যকল্প-১: ভূমি থেকে একটি কণা u ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করার t সে. পর একই স্থান হতে একই বেগে অপর একটি কণা একই দিকে ছোড়া হল।

দৃশ্যকল্প-২:



[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]

ক. একটি প্রক্ষেপক 21 ms^{-1} বেগে এবং আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে শূন্যে প্রক্ষেপ করা হলে এর পাল্লা নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, তারা $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ মিটার উঁচুতে মিলিত হবে। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২: হতে প্রমাণ কর যে, $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

আদিবেগ, $u = 21\ ms^{-1}$

আনুভূমিকের সাথে কোণ, $\alpha = 30°$

$\therefore$ আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha$

$= \frac{(21)^2}{9.8}\sin(2 \times 30°)$

$= 45 \sin 60° = 45 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

= 38.97 মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

খ মনে করি, দ্বিতীয় কণাটি u মি./সে. আদিবেগে ছোঁড়ার t_1 সেকেন্ড পরে h উচ্চতায় প্রথম কণাটির সাথে মিলিত হয়।

কাজেই, $h = ut_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ .... (i)

এখন, প্রশ্নানুসারে, প্রথম কণাটির সাথে u মি./সে. আদিবেগে ছোঁড়ার $(t + t_1)$ সেকেন্ড পরে h উচ্চতায় থাকবে।

$\therefore h = u(t + t_1) - \frac{1}{2}g(t + t_1)^2$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে,

$ut_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = ut + ut_1 - \frac{1}{2}g(t^2 + 2tt_1 + t_1^2)$

বা, $ut_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = ut + ut_1 - \frac{1}{2}gt^2 - gtt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$

বা, $ut - gtt_1 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$

বা, $gt_1 = u - \frac{1}{2}gt$ [উভয়পক্ষকে t দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore t_1 = \frac{2u - gt}{2g}$ .... (iii)

এখন, t_1 এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$h = \frac{u(2u - gt)}{2g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{2u - gt}{2g}\right)^2$

বা, $h = \frac{4u(2u - gt) - (2u - gt)^2}{8g}$

$= \frac{8u^2 - 4ugt - 4u^2 + 4ugt - g^2t^2}{8g}$

$\therefore h = \frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ (দেখানো হলো)

গ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৩

প্রশ্ন ▶ ৪০ u এবং v বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি w, u এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

[চাঁদপুর সরকারি মহিলা কলেজ, চাঁদপুর]

ক. u = v হলে দেখাও যে; $\theta = \frac{\alpha}{2}$। ২

খ. u এর দিক বরাবর w এর লম্বাংশের পরিমাণ v হলে দেখাও যে, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v - u}{v}\right)$ ৪

গ. $u + v = n(u - v)$ এবং $w = \frac{u + v}{2}$ হলে দেখাও যে, $\cos\alpha = \frac{n^2 + 2}{2(1 - n^2)}$ ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, $\theta = \tan^{-1}\frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha} = \tan^{-1}\frac{u\sin\alpha}{u + u\cos\alpha}$

$= \tan^{-1}\frac{u\sin\alpha}{u(1 + \cos\alpha)} = \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$ (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল ১৬(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৭

গ দেওয়া আছে, $u + v = n(u - v)$

ধরি, $u - v = m$

$\therefore \quad u + v = mn \ldots \ldots \ldots \ldots (i)$

আবার, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধির মান $w = \frac{1}{2}(u + v)$

$\therefore \quad \frac{(u+v)^2}{4} = u^2 + v^2 + 2uv \cos\alpha$

বা, $\frac{(u+v)^2}{2} = 2(u^2 + v^2) + 4uv\cos\alpha$

বা, $\frac{(u+v)^2}{2} = \{(u+v)^2 + (u-v)^2\} + \{(u+v)^2 - (u-v)^2\}\cos\alpha$

বা, $\frac{m^2n^2}{2} = m^2n^2 + m^2 + (m^2n^2 - m^2)\cos\alpha$

বা, $\frac{m^2n^2}{2} = m^2n^2 + m^2 + m^2(n^2 - 1)\cos\alpha$

বা, $m^2n^2 = 2m^2n^2 + 2m^2 + 2m^2(n^2 - 1)\cos\alpha$

বা, $n^2 = 2n^2 + 2 + 2(n^2 - 1)\cos\alpha$ [উভয়পক্ষকে m^2 দ্বারা ভাগ করে]

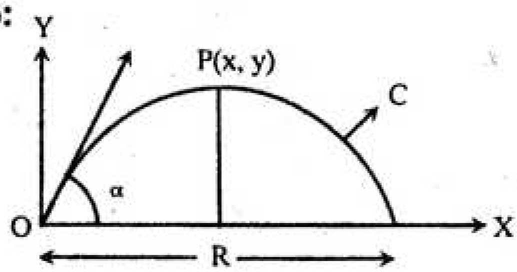
বা, $2(n^2 - 1)\cos\alpha = -(n^2 + 2)$

বা, $-2(1 - n^2)\cos\alpha = -(n^2 + 2)$

বা, $2(1 - n^2)\cos\alpha = n^2 + 2$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{n^2 + 2}{2(1 - n^2)}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪১ দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি কণা t_1, t_2, t_3 সময়ে সমান তিনটি ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

[চট্টগ্রাম সিটি কর্পোরেশন আহ্বর কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে $7 m/sec^2$ ত্বরণে চলতে থাকলে তৃতীয় সেকেন্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ u আদিবেগে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণাটির বৃহত্তম উচ্চতা H হলে দেখাও যে, আনুভূমিক পাল্লা, $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ ৪

গ. উদ্দীপক অবলম্বনে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$ ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২২(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪২ দৃশ্যকল্প-১: একটি নৌকা 5 কি.মি./ঘণ্টা বেগে চলে নদী পাড়ি দিতে চায়। নদীতে স্রোতের বেগ 3 কি.মি./ঘণ্টা এবং 500 মি. চওড়া।

[চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ল্যাবরেটরী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. নৌকাটি স্রোতের বেগের সাথে 60° কোণে যাত্রা করলে লব্ধি বেগ কত? ২

খ. নৌকাটি ন্যূনতম পথে পাড়ি দিতে প্রয়োজনীয় সময় নির্ণয়কর। ৪

গ. নৌকাটি ন্যূনতম সময়ে নদী পাড়ি দিতে চায় তাহলে ন্যূনতম সময় নির্ণয় কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, স্রোতের বেগ, u = 3 কি.মি./ঘণ্টা

নৌকার বেগ, v = 5 কি.মি./ঘণ্টা

নৌকাটি স্রোতের বেগের সাথে 60° কোণে যাত্রা করার ফলে লব্ধি বেগ W হলে,

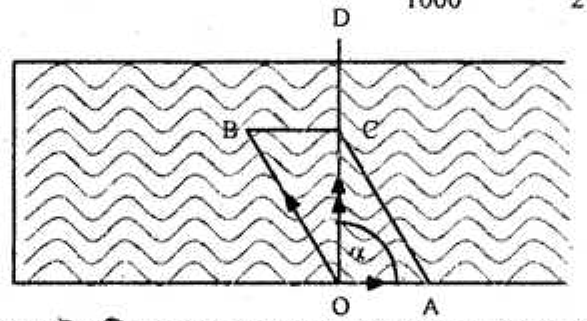
$W = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos 60°}$

$= \sqrt{5^2 + 3^2 + 2.5.3.\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{25 + 9 + 15} = \sqrt{49} = 7$

∴ লব্ধি বেগ 7 কি.মি./ঘণ্টা। **(Ans.)**

খ মনে করি, নদীর প্রস্থ OD = 500 মি. $= \frac{500}{1000}$ কি.মি. $= \frac{1}{2}$ কি.মি.



প্রথম নৌকাটির বেগকে OB দ্বারা এবং স্রোতের বেগকে OA দ্বারা সূচিত করা হলো।

নৌকাটি ন্যূনতম পথে পাড়ি দিলে তার লব্ধি বেগ OD বরাবর ক্রিয়াশীল এবং OACB সামান্তরিকের OC কর্ণ দ্বারা সূচিত।

এখন, $BC^2 + OC^2 = OB^2$

বা, $OC^2 = OB^2 - BC^2 = OB^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9$

বা, $OC^2 = 16 \quad \therefore OC = 4$

∴ OC বরাবর নৌকার লব্ধি বেগ ঘণ্টায় 4 কি.মি.

তাহলে ন্যূনতম পথে পাড়ি দেওয়ার সময় $= \frac{\frac{1}{2} \text{ কি.মি.}}{4 \text{ কি.মি./ঘণ্টা}} = \frac{1}{8}$ ঘণ্টা **(Ans.)**

গ মনে করি, অপর নৌকাটি ন্যূনতম সময়ে পাড়ি দেওয়ার জন্য তীরের সাথে θ কোণে যাত্রা করে।

তাহলে, OD বরাবর তার বেগ $= 3\cos 90° + 5\cos(90° - \theta) = 5\sin\theta$

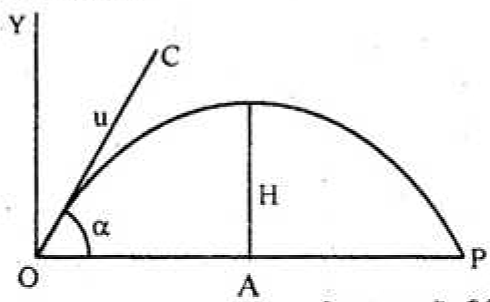
$\therefore$ সময় $= \frac{\frac{1}{2} \text{ কি.মি.}}{5\sin\theta \text{ কি.মি./ঘণ্টা}} = \frac{1}{10\sin\theta}$ ঘণ্টা

সময় ন্যূনতম হবে যখন sin θ বৃহত্তম হয়, অর্থাৎ, θ = 90°

$\therefore$ ন্যূনতম সময় $= \frac{1}{10\sin 90°} = \frac{1}{10}$ ঘণ্টা। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৩ দৃশ্যকল্প-১: সমত্বরণে চলমান একটি কণা t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে 3d, 4d, 5d দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২:



[বাংলাদেশ নৌবাহিনী কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. স্থির অবস্থা থেকে $2.5 ms^{-2}$ সমত্বরণে একটি গাড়ী $16 ms^{-1}$ বেগ প্রাপ্ত হয়। কত সময় পর্যন্ত গাড়িটি সমত্বরণে চলে? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে দেখাও যে, $\frac{3}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{5}{t_3} = \frac{12}{t_1 + t_2 + t_3}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে দেখাও যে, $OP = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, আদিবেগ, $u = 0 ms^{-1}$

শেষ বেগ, $v = 16 ms^{-1}$

ত্বরণ, $f = 2.5 ms^{-2}$

আমরা জানি, $v = u + ft$

$\therefore \quad t = \frac{v - u}{f}$

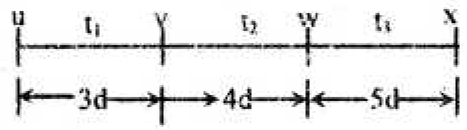
$= \frac{16}{2.5} s = 6.4s$ **(Ans.)**

খ মনে করি, t_1 বিরতির আরম্ভের বেগ = u

t_1 বিরতির শেষে বেগ = v

t_2 বিরতির শেষে বেগ = w

t_3 বিরতির শেষে বেগ = x



ধরি, ত্বরণ = f

$\therefore$ গড়বেগ $\frac{3d}{t_1} = \frac{u+v}{2}$ .... (i)

$\frac{4d}{t_2} = \frac{v+w}{2}$ .... (ii)

$\frac{5d}{t_3} = \frac{w+x}{2}$ .... (iii)

(i) নং ও (iii) নং যোগ অতঃপর (ii) নং বিয়োগ করে,

$$\frac{3d}{t_1} - \frac{4d}{t_2} + \frac{5d}{t_3} = \frac{1}{2}(u + v - v - w + w + x)$$

বা, $\left(\frac{3}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{5}{t_3}\right) = \frac{1}{2}(u + x)$

সমগ্র সময়ের গড়বেগ $= \frac{\text{মোট দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}} = \frac{12d}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{u + x}{2}$

$$\therefore \left(\frac{3}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{5}{t_3}\right) = \frac{12}{t_1 + t_2 + t_3}$$

$\therefore \frac{3}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{5}{t_3} = \frac{12}{t_1 + t_2 + t_3}$ **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, প্রক্ষেপ কোণ = α

তাহলে, $H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ বা, $\sin^2 \alpha = \frac{2gH}{u^2}$

$\therefore \sin\alpha = \sqrt{\frac{2gH}{u^2}}$

আবার, $OP = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2}{g} . 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$$= \frac{2u^2}{g} . \sqrt{\frac{2gH}{u^2}} . \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{2u^2}{g} . \sqrt{\frac{2gH}{u^2}} . \sqrt{1 - \frac{2gH}{u^2}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{u^4}{4g^2} . \frac{2gH}{u^2} \left(\frac{u^2 - 2gH}{u^2}\right)}$$

$= 4\sqrt{\frac{H}{2g}(u^2 - 2gH)} = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪৪ দৃশ্যকল্প-১ : নীল ও লিখন ট্রেনযোগে চট্টগ্রাম হতে ঢাকার উদ্দেশ্যে যাত্রা করল। ট্রেনটি সকাল 7টায় ছেড়ে বিকাল 3 টায় ঢাকা পৌঁছাল। গাড়িটি তার গতিপথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে ও শেষ অংশ y সমমন্দনে যায়।

দৃশ্যকল্প-২ : খাড়া উপরের দিকে নির্দিষ্ট বেগে নিক্ষিপ্ত একটি কণা t_1 সময়ে h উচ্চতায় উঠে এবং আরও t_2 সময় পর উহা ভূমিতে পৌঁছায়।

[স্যার আশুতোষ সরকারি কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. 20m/s বেগে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে একটি বস্তু শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা ও পাল্লা নির্ণয় কর। ২

খ. ঢাকা ও চট্টগ্রামের মধ্যবর্তী দূরত্ব 260 কি.মি. হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{65}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, ৪

(i) কণার আদিবেগ $= \frac{1}{2} g(t_1 + t_2)$ (ii) $h = \frac{1}{2} g t_1 t_2$

(iii) বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{1}{8} g(t_1 + t_2)^2$

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

আদিবেগ $u = 20\ ms^{-1}$

এবং আদিকোণ $\alpha = 30°$

সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$$= \frac{(20)^2 \times (\sin 30°)^2}{2 \times 9.8}$$

$= 5.10$ m **(Ans.)**

পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$$= \frac{(20)^2 \times \sin(2 \times 30°)}{9.8}$$

$= 35.34$ m **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২৯(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৯৪

গ (i) মোট ভ্রমণকাল $= t_1 + t_2 = \frac{2u}{g}$

$\therefore$ আদিবেগ $u = \frac{g(t_1 + t_2)}{2}$ **(প্রমাণিত)**

(ii) উচ্চতা h হলে,

$h = ut_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2} t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{1}{2} g t_1 t_2$ **(প্রমাণিত)**

(iii) বৃহত্তম উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{\left\{\frac{g(t_1 + t_2)}{2}\right\}^2}{2g} = \frac{g(t_1 + t_2)^2}{8}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৫ একটি ট্রেন রেলপথের S দূরত্বের ব্যবধানে দুইটি স্টেশনে থামে। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশনে পৌঁছাতে সময় লাগে t, ট্রেন এর গতিপথের OA অংশ X সমত্বরণে এবং AC অংশ y সমমন্দনে চলে।

[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]

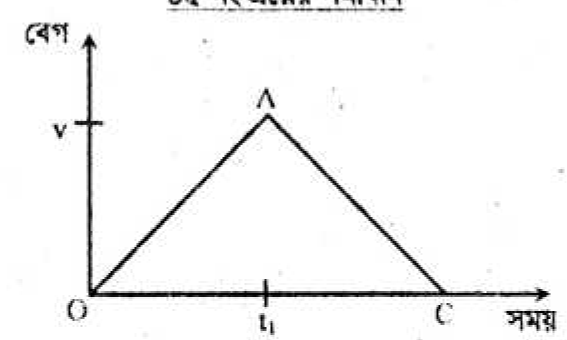
ক. ট্রেনটির সর্বোচ্চ গতিবেগ v হলে বেগ সময় লেখচিত্রে ট্রেনটির গতিপথ প্রদর্শন করে OA অংশের ত্বরণ নির্ণয় কর। ২

খ. s = 192 মিটার, $x = 25\ ms^{-2}$, $y = 5\ ms^{-2}$ হলে বেগ-সময় চিত্র হতে t এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. s = 2 কি.মি., t = 4 মিনিট হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



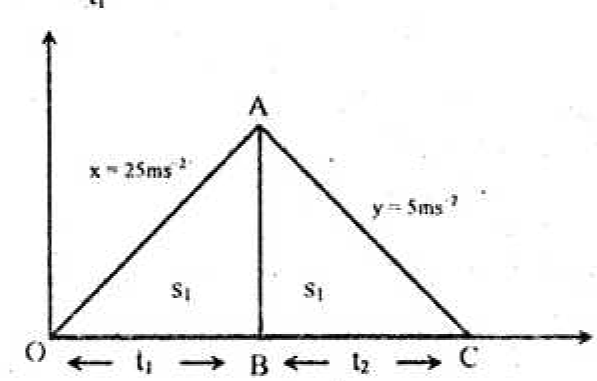
সর্বোচ্চ গতিবেগ A বিন্দুতে v

ধরি, OA অংশ যেতে সময় লাগে t_1

$\therefore$ OA অংশের ত্বরণ $= \frac{v - 0}{t_1}$

$\therefore x = \frac{v}{t_1}$

খ



ধরি, s_1 দূরত্ব যেতে t_1 সময় এবং s_2 যেতে t_2 সময় লাগে এবং A বিন্দুতে সর্বোচ্চ বেগ v লাভ করে,

$s_1 + s_2 = 192m$

$t = t_1 + t_2$

ΔOAB হতে পাই,

$\frac{v}{t_1} = 25 \quad \therefore t_1 = \frac{v}{25}$

$\frac{1}{2} t_1 v = s_1$

ΔABC হতে পাই,

$\frac{v}{t_2} = 5 \quad \therefore t_2 = \frac{v}{5}$

$\frac{1}{2} t_2 v = s_2$

এখন, $t_1 + t_2 = v\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{5}\right) = \frac{6v}{25}$

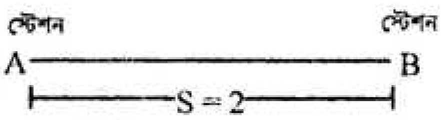
$s_1 + s_2 = \frac{1}{2} v (t_1 + t_2)$

বা, $192 = \frac{1}{2} v \times \frac{6v}{25}$

$\therefore v = 40ms^{-1}$

$\therefore t = t_1 + t_2 = \frac{6v}{25} = 6 \times \frac{40}{25} = 9.6$ s **(Ans.)**

গ



মনে করি, ট্রেনটির সর্বাধিক বেগ = v একক

ধরি, t_1 ও t_2 মিনিট ধরে যথাক্রমে সমত্বরণে ও সমমন্দনে চলে এবং s_1 এবং s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।

তাহলে, $s_1 + s_2 = 2$ এবং $t_1 + t_2 = 4$ মিনিট।

$\therefore$ গড়বেগ $\frac{s_1}{t_1} = \frac{0 + v}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{v}{2} t_1$

$\frac{s_2}{t_2} = \frac{v + 0}{2} \Rightarrow s_2 = \frac{v}{2} t_2$

$\therefore \quad s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

বা, $\quad 2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$ $[\because s_1 + s_2 = 2]$

বা, $\quad 2 = \frac{v}{2} 4$

বা, $\quad 4v = 4 \quad \therefore v = 1$

আবার, $v = u + ft$ সূত্র ব্যবহার করে

$v = 0 + xt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{x}$ $\quad [\because v = 1]$

$0 = v - yt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{y}$ $[\because v = 1]$

$\therefore \quad t_1 + t_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

বা, $\quad 4 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $\quad [\because t_1 + t_2 = 4]$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৬ দৃশ্যকল্প-১: সমত্বরণে চলন্ত কোনো বিন্দু t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে সমান সমান ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২ : বায়ুহীন অবস্থায় আনুভূমিকের সাথে কোনো নির্দিষ্ট কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা R।

[illegible] ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট

ক. দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির n গুণ। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধিবেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়। দেখাও যে, $\cos\alpha = -\frac{n^2 + 2}{2(n^2 - 1)}$ ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$ । ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত প্রক্ষেপকের গতিপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, বেগ দুইটির মান u ও v $(u > v)$

$\therefore$ এদের বৃহত্তম লব্ধি $= u + v$

এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= u - v$

শর্তমতে, $u + v = n(u - v)$

ধরি, $u - v = m$

$\therefore \quad u + v = mn$ ... ... (i)

আবার, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধির মান $= \frac{1}{2}(u + v)$

$\therefore \quad \frac{(u+v)^2}{4} = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

বা, $\quad \frac{(u+v)^2}{2} = 2(u^2 + v^2) + 4uv\cos\alpha$

বা, $\quad \frac{(u+v)^2}{2} = \{(u+v)^2 + (u-v)^2\} + \{(u+v)^2 - (u-v)^2\}\cos\alpha$

বা, $\quad \frac{m^2n^2}{2} = m^2n^2 + m^2 + (m^2n^2 - m^2)\cos\alpha$

বা, $\quad \frac{m^2n^2}{2} = m^2n^2 + m^2 + m^2(n^2 - 1)\cos\alpha$

বা, $\quad m^2n^2 = 2m^2n^2 + 2m^2 + 2m^2(n^2 - 1)\cos\alpha$

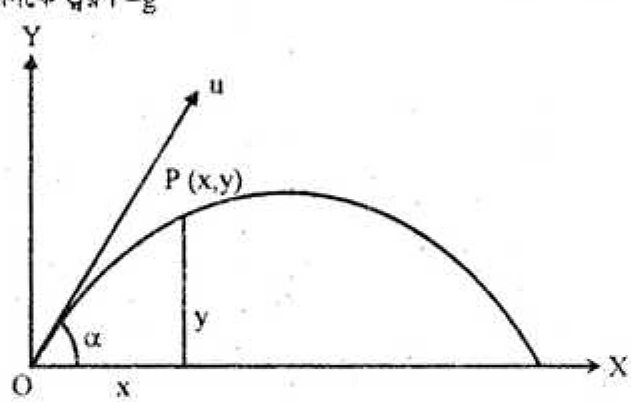
বা, $\quad n^2 = 2n^2 + 2 + 2(n^2 - 1)\cos\alpha$ [উভয়পক্ষকে m^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\quad 2(n^2 - 1)\cos\alpha = -(n^2 + 2)$

$\therefore \quad \cos\alpha = -\frac{n^2 + 2}{2(n^2 - 1)}$ **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৫

গ মনে করি, একটি বস্তুকণা O বিন্দু থেকে u আদিবেগে আনুভূমিকের সঙ্গে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। O বিন্দুগামী আনুভূমিক ও উল্লম্ব OX ও OY রেখাদ্বয় যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরলে t সময়ে বস্তুকণাটি P(x, y) বিন্দুতে অবস্থান করে। O বিন্দুতে u এর আনুভূমিক লম্বাংশ $u\cos\alpha$ এবং উল্লম্ব লম্বাংশ $u\sin\alpha$. আনুভূমিকের দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ শূন্য এবং উল্লম্ব দিকে ত্বরণ $-g$



t সময়ে আনুভূমিক সরণ, $x = u\cos\alpha.t \quad \therefore t = \frac{x}{u\cos\alpha}$

t সময়ে উল্লম্ব সরণ, $y = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$ ...... (i)

(i) নং এ t এর মান বসিয়ে পাই,

$y = u\sin\alpha.\frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}$

$= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

$= x\tan\alpha\left(1 - \frac{gx\cos\alpha}{2u^2\cos^2\alpha\sin\alpha}\right)$

$= x\tan\alpha\left(1 - \frac{gx}{u^2\sin 2\alpha}\right)$

$\therefore y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left[\because R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\right]$

ইহাই প্রক্ষেপকের গতিপথের সমীকরণ।

প্রশ্ন ▶ ৪৭ দৃশ্যকল্প-১: স্থিরাবস্থা হতে সরল রেখায় চলন্ত একটি বস্তুকণা প্রথমে a সমত্বরণে এবং পরে b সমমন্দনে চলে। কণাটি 5 সেকেন্ড সময়ে 10 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২: 60 মিটার উচ্চ স্তম্ভের শীর্ষ হতে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 20 m/sec আদিবেগে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হল। *[সিলেট সরকারি মহিলা কলেজ, সিলেট]*

ক. 60 মিটার উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর ছেড়ে দিলে ভূমিতে পড়তে কত সময় লাগবে? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{4}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে বস্তুটি স্তম্ভ হতে কত দূরে ভূমিকে আঘাত করবে? ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

আদিবেগ $u = 0\ ms^{-1}$

উচ্চতা $h = 60$ মিটার

সময় $t = ?$

আমরা জানি, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $60 = 0 \times t + \frac{1}{2} \times 9.8\ t^2$

বা, $60 = 4.9t^2$

বা, $t^2 = \frac{60}{4.9}$

$t = 3.5$ s (প্রায়) **(Ans.)**

খ মনে করি, বস্তু কণাটির সর্বাধিক বেগ = v একক

ধরি, t_1 ও t_2 মিনিট ধরে যথাক্রমে সমত্বরণে ও সমমন্দনে চলে এবং s_1 এবং s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।

তাহলে, $s_1 + s_2 = 10$ এবং $t_1 + t_2 = 5$ সেকেন্ড।

$\therefore$ গড়বেগ $\frac{s_1}{t_1} = \frac{0+v}{2}$ বা, $s_1 = \frac{v}{2}t_1$

এবং $\frac{s_2}{t_2} = \frac{v+0}{2}$ বা, $s_2 = \frac{v}{2}t_2$

$\therefore\quad s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)$

বা, $10 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2)\ [\because s_1 + s_2 = 10]$

বা, $10 = \frac{v}{2}5$ বা, $5v = 20\ \therefore\ v = 4$

আবার, $v = u + ft$ সূত্র ব্যবহার করে

$v = 0 + at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{4}{a}\quad [\because v = 4]$

$0 = v - bt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{b}\ [\because v = 4]$

$\therefore\quad t_1 + t_2 = \frac{4}{a} + \frac{4}{b}$

বা, $5 = \frac{4}{a} + \frac{4}{b}\quad [\because t_1 + t_2 = 5]$

$\therefore\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{5}{4}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

স্তম্ভের উচ্চতা, $h = 60$ মিটার

কোণ $\alpha = 30°$

আদিবেগ $u = 20ms^{-1}$

পতনকাল t হলে,

$h = -u \sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $60 = -20 \sin 30° \times t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

বা, $6 = -10t + 4.9t^2$

বা, $4.9t^2 - 10t - 6 = 0$

$\therefore\ t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 4.9 \times (-6)}}{2 \times 4.9}$

$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 117.6}}{9.8}$

$= \frac{10 \pm 14.75}{9.8}$

$= 2.52$ বা, -0.484

$t \neq -0.484\ \therefore\ t = 2.526s$

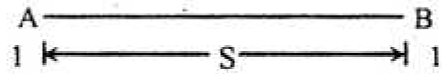
$\therefore$ স্তম্ভের পাদদেশ থেকে যে বিন্দুতে আঘাত করবে তার দূরত্ব

$= u \cos\alpha \times t$

$= 20 \times \cos 30° \times 2.526$

$= 43.75$ m (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৮



[মৌলভীবাজার সরকারি মহিলা কলেজ, মৌলভীবাজার]

ক. সচরাচর সংকেতমালায় প্রমাণ কর যে, $v = u + ft$. ২

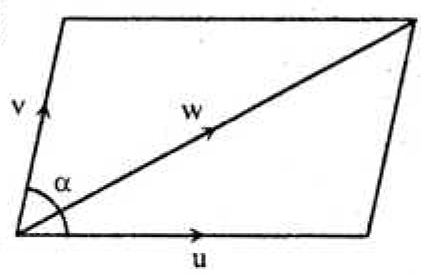
খ. স্থিরাবস্থা হতে একটি ট্রেন A স্টেশন হতে 4 মিনিটে B স্টেশনে গিয়ে থামে। যদি উহা পথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ y সমমন্দনে চলে তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ (যখন S = 2) ৪

গ. যদি দুইটি রেলগাড়ি A ও B এর বিপরীত দিক হতে u_1 ও u_2 গতিবেগে অগ্রসর হওয়ার সময় একে অপরকে দেখতে পায় তখন তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব x। সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য রেলগাড়ি দুইটি সর্বোচ্চ মন্দন যথাক্রমে a_1 ও a_2 প্রয়োগ করে। তাহলে দেখাও যে, কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2a_2 + u_2^2a_1 \leq 2a_1a_2x$ হয়। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭৮

প্রশ্ন ▶ ৪৯



চিত্রে u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং u > v।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে একটি সরলরেখায় সমত্বরণে চলমান কোন বিন্দুর t_1, t_2, t_3 সময়ের গড়বেগ যথাক্রমে v_1, v_2 ও v_3। *[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]*

ক. বাংলাদেশ-পাকিস্তান মধ্যকার ক্রিকেট খেলায় সাকিব একটি বলকে ব্যাটের সাহায্যে আঘাত করায় বলটি 60° কোণে এবং 25 ms^{-1} বেগে বোলারের মাথার উপর দিয়ে ছক্কায় পরিণত হয়। বলটির বিচরণকাল নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকে u এর দিক বরাবর w এর লম্বাংশের পরিমাণ v হলে প্রমাণ কর যে, $w = \sqrt{v^2 + 2uv - u^2}$। ৪

গ. দ্বিতীয় ক্ষেত্র থেকে দেখাও যে, $(v_1 - v_2)(t_2 + t_3) = (t_1 + t_2)(v_2 - v_3)$। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

আদিবেগ, $u = 25\ ms^{-1}$

আনুভূমিকের সাথে কোণ, $\alpha = 60°$

$\therefore$ বিচরণকাল, $T = \frac{2u \sin\alpha}{g}$

$= \frac{2 \times 25 \sin 60°}{9.8}$

$= \frac{50 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{9.8} = \frac{25\sqrt{3}}{9.8}$

$= 4.42s$ (প্রায়) **(Ans.)**

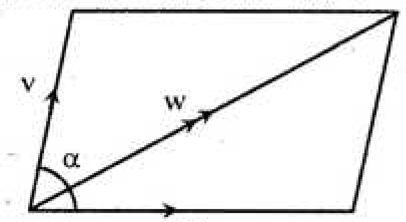
খ মনে করি, u ও v বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α।

সুতরাং, u বেগের ক্রিয়ারেখা বরাবর u ও v বেগের লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল

$= u \cos 0° + v \cos \alpha$

$= u + v \cos \alpha$

u এর দিক বরাবর w বেগের লম্বাংশক = v [শর্ত অনুযায়ী]



যেহেতু যে কোনো রেখা বরাবর লব্ধির লম্বাংশক এবং অংশক বেগগুলোর লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল পরস্পর সমান।

অতএব, $u + v \cos \alpha = v$

বা, $v \cos \alpha = v - u$

$\therefore \cos \alpha = \frac{v-u}{v}$

আবার, প্রদত্ত বেগ দুইটির লব্ধির মান

$w = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu \cos\alpha} = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\left(\frac{v-u}{v}\right)}$

$= \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu - 2u^2}$

$\therefore w = \sqrt{v^2 + 2uv - u^2}$ (প্রমাণিত)

গ সৃজনশীল ১৯(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৯

প্রশ্ন ▶ ৫০ **দৃশ্যকল্প-১:** সমত্বরণে চলমান একটি কণা 50 সেকেন্ডে A বিন্দু হতে B বিন্দুতে এবং একই পরিমাণ সময়ে B বিন্দু হতে C বিন্দুতে পৌঁছে।

দৃশ্যকল্প-২: গোলরক্ষকের 120 মিটার সামনে থেকে একজন খেলোয়াড় 30 মিটার/সেকেন্ড বেগে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে একটি বলে লাথি মারল।

[সরকারি বি এল কলেজ, খুলনা]

ক. একজন লোক 50 মিটার/মিনিট বেগে চলছে। যদি বৃষ্টি 50 মিটার/মিনিট বেগে খাড়া নিচের দিকে পড়ে তবে লোকটির কোন দিকে ছাতা ধরতে হবে। ২

খ. A হতে B এর দূরত্ব 500 মিটার এবং এবং B হতে C বিন্দুর দূরত্ব 750 মিটার হলে A ও C বিন্দুতে গাড়ির গতিবেগ কিলোমিটার /ঘণ্টায় নির্ণয় কর। ৪

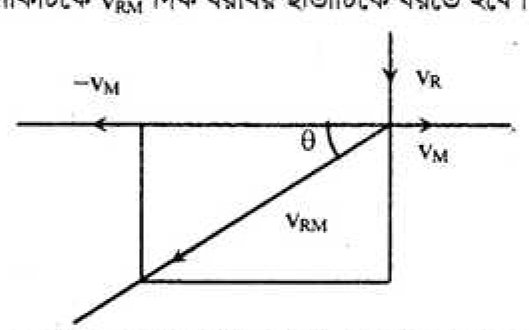
গ. গোলরক্ষক 12 মিটার/সেকেন্ড সমবেগে দৌড়ে বলটি ভূমিতে পড়ার আগে ধরতে পারবে কি? ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে লোকটির বেগ v_M = 50 মিটার/মিনিট এবং বৃষ্টির বেগ v_R = 50 মিটার/মিনিট।

লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ হবে $v_{RM} = v_R - v_M$

লোকটিকে v_{RM} দিক বরাবর ছাতাটিকে ধরতে হবে।



মনে করি, লোকটি বিপরীত বেগের সাথে θ কোণে ছাতাটি ধরবে।

$\therefore \tan\theta = \frac{v_R \sin \alpha}{v_M + v_R \cos\alpha}$ $[\because \alpha = 90°]$ $= \frac{50 \sin 90°}{50 + 50 \cos 90°} = \frac{50}{50}$

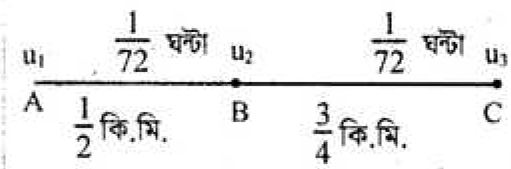
$= 1 = \tan 45°$ $\therefore \theta = 45°$

সুতরাং লোকটিকে আনুভূমিকের সাথে 45° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

খ মনে করি, A, B, C বিন্দুতে রেলগাড়িটির বেগ যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 কিলোমিটার/ ঘণ্টা।

50 সে. $= \frac{50}{60 \times 60} = \frac{1}{72}$ ঘণ্টা, 500 মি. $= \frac{500}{1000}$ কি.মি. $= \frac{1}{2}$ কি.মি.

এবং 750 মি. $= \frac{750}{1000}$ কি.মি. $= \frac{3}{4}$ কি.মি.



AB দূরত্বের ক্ষেত্রে,

$\frac{1}{72}$ ঘণ্টায় $\frac{1}{2}$ কিলোমিটার পথ অতিক্রম করে

$\therefore \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{72}}$

বা, $u_1 + u_2 = 72$ .... (i)

BC দূরত্বের ক্ষেত্রে,

$\frac{1}{72}$ ঘণ্টায় $\frac{3}{4}$ কিলোমিটার পথ অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{u_2 + u_3}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{72}}$

বা, $u_2 + u_3 = 108$ .... (ii)

AC দূরত্বের ক্ষেত্রে, $\frac{u_1 + u_3}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{72} + \frac{1}{72}}$

বা, $\frac{u_1 + u_3}{2} = \frac{5}{4} \times 36$

বা, $u_1 + u_3 = 90$ .... (iii)

(i) + (ii) + (iii) ⇒

$2(u_1 + u_2 + u_3) = 72 + 108 + 90$

বা, $2(u_1 + u_2 + u_3) = 270$

বা, $u_1 + u_2 + u_3 = 135$ .... (iv)

(iv) − (ii) ⇒

$u_1 + u_2 + u_3 - u_2 - u_3 = 135 - 108$

$\therefore u_1 = 27$

(iv) − (i) ⇒

$u_1 + u_2 + u_3 - u_1 - u_2 = 135 - 72$

বা, $u_3 = 63$

∴ A বিন্দুতে গাড়ির বেগ 27 কিলোমিটার/ঘণ্টা এবং C বিন্দুতে গাড়ির বেগ 63 কিলোমিটার/ঘণ্টা **(Ans.)**

গ এখানে, $V_0 = 30$ m/s

$\theta = 30°$

বিচরণকাল, $T = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}$

$= \frac{2 \times 30 \times \sin 30}{9.8}$

$= 3.06$s

পাল্লা, $R = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$

$= \frac{30^2 \times \sin 60°}{9.8} = 79.53$ m

∴ বলটি 3.06 সেকেন্ডে 79.53 মিটার দূরে গিয়ে পড়বে। বলটি ধরতে হলে গোলরক্ষককে 3.06 সেকেন্ডের কম সময়ে (120 − 79.53) = 40.47 এর বেশি দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে।

দেওয়া আছে, V = 12 মি./সেকেন্ড

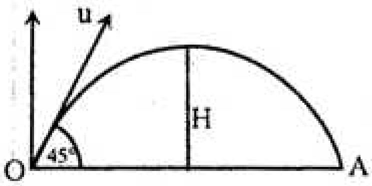
∴ অতিক্রান্ত দূরত্ব = Vt = 12 × 3.06 = 36.72

যা 40.47 এর চেয়ে কম।

∴ গোলরক্ষক ভূমিতে পড়ার আগে বলটি ধরতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶ ৫১ দৃশ্যকল্প-১: ত্বরণে চলন্ত কোন বিন্দু t′, t″, t‴ সময়ে যথাক্রমে সমান সমান ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২:



[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]

ক. 20 মি./সে. বেগে ঊর্ধ্বগামী একটি বেলুন থেকে পতিত একটি বস্তু 5 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়, বস্তুটি বেলুন থেকে পড়ার মুহূর্তে বেলুনের উচ্চতা কত ছিল? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{t'} - \frac{1}{t''} + \frac{1}{t'''} = \frac{3}{t' + t' + t'''}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা 4.9 মিটার হলে এর আনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$। ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যে মুহূর্তে বস্তুটি পড়ে যায়, তখন বস্তুটি বেলুনের গতিবেগই, অর্থাৎ 20 মি./সে. এ উপরের দিকে চলতে থাকে। সুতরাং ঐ মুহূর্তে নিচের দিকে বস্তুটির বেগ –20 মি./সে. এবং সাথে সাথে বস্তুটির উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ g ক্রিয়াশীল হবে।

ধরি, বস্তুটি পড়ার মুহূর্তে আনুভূমিক তল থেকে বেলুনটির উচ্চতা h

$\therefore h = -20 \times 5 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2$

[নিচের দিকে ধনাত্মক এবং $g = 9.8$ মি./সে.^{2} ধরে]

$= -100 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 25 = 22.5$

$\therefore$ উচ্চতা = 22.5 মিটার **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৫

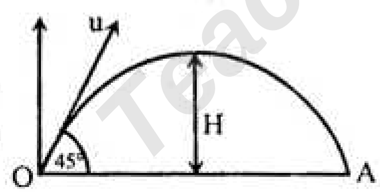
গ মনে করি, কণাটি u আদিবেগে

$\alpha = 45°$ কোণে নিক্ষেপ করা হলো।

দেওয়া আছে, সর্বাধিক উচ্চতা, H = 4.9 মি.

অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = 9.8$ মি./সে.^{2}

তাহলে, $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$



বা, $4.9 = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2 \times 9.8}$

বা, $2 \times 4.9 \times 9.8 = u^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

বা, $2 \times 4.9 \times 9.8 = u^2 \times \frac{1}{2}$

বা, $2 \times (9.8)^2 = u^2$

$\therefore u = 9.8\sqrt{2}$ মি./সে.

আবার, আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$= \frac{(9.8\sqrt{2})^2 \sin(2 \times 45°)}{9.8}$

$= \frac{(9.8\sqrt{2})^2 \sin 90°}{9.8}$

$= \frac{9.8 \times 9.8 \times 2 \times 1}{9.8} = 19.6$ মি. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫২ একজন স্যাটার 9.8 মি. দূরে 2.45 মিটার উঁচু দেয়ালে রাখা একটি বস্তুকে লক্ষ্য করে বুলেট ছুড়লে, বুলেটটি লক্ষ্যভ্রষ্ট হয়ে দেয়ালে লেগে এর মধ্যে 2cm প্রবেশ করার পর অর্ধেক বেগ হারায়।

[পিরোজপুর সরকারি মহিলা কলেজ, পিরোজপুর]

ক. u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। ২

খ. বুলেটটির বেগ শূন্য হওয়ার পূর্বে দেওয়ালের ভিতর কতদূর প্রবেশ করবে? ৪

গ. বুলেটটি দেয়ালের ঠিক উপর দিয়ে আনুভূমিকভাবে চলে গেলে ঐ মুহূর্তে বুলেটটির বেগের মান নির্ণয় কর। ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২০(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮৯

খ মনে করি, বুলেটটি u গতিবেগে দেয়ালে আঘাত করে।

প্রশ্নমতে, 2 সে.মি. ঢুকবার পর বুলেটটির গতিবেগ দাঁড়ায় $\frac{u}{2}$ এবং সৃষ্ট মন্দন f হলে আমরা পাই, $\left(\frac{u}{2}\right)^2 = u^2 - 2f \times 2$

বা, $\frac{u^2}{4} = u^2 - 4f$ বা, $4f = \frac{3u^2}{4}$

$\therefore f = \frac{3u^2}{16}$

ধরি, বুলেটটির শেষ বেগ শূন্য হবার পূর্বে আরও s দূরত্ব অতিক্রম করবে।

$\therefore 0^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 - 2fs$

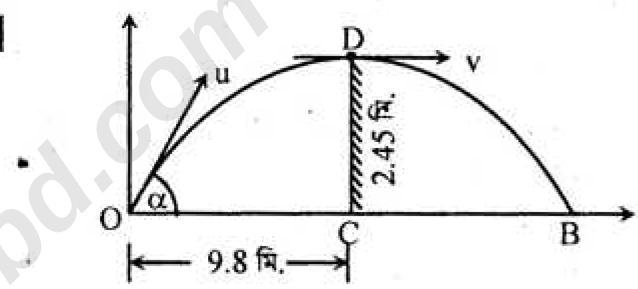
বা, $2fs = \frac{u^2}{4}$ বা, $2 \times \frac{3}{16} u^2 \times s = \frac{u^2}{4}$

$\therefore s = \frac{2}{3}$ সে.মি.

$\therefore$ দেওয়ালের ভিতর মোট প্রবেশ করতে পারবে

$= 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ সে.মি. **(Ans.)**

গ



$\because$ বুলেটটি দেয়ালের ঠিক উপর দিয়ে আনুভূমিকভাবে চলে যায় সেহেতু দেয়ালের উচ্চতা হবে সর্বাধিক উচ্চতা, H.

$\therefore H = 2.45$

বা, $\frac{(u \sin\alpha)^2}{2g} = 2.45$

বা, $u^2 \sin^2\alpha = 2.45 \times 2 \times 9.8$

$\therefore u \sin\alpha = 6.9296$ ….. … (i)

আবার, $R = 9.8 \times 2$

বা, $\frac{u^2}{g} \sin 2\alpha = 19.6$

বা, $2u^2 \sin\alpha \cos\alpha = 19.6g$

বা, $(u \sin\alpha)(u \cos\alpha) = 9.8 g$

বা, $u \cos\alpha = \frac{9.8g}{6.9296}$ [(i) হতে]

$\therefore u \cos\alpha = 13.8594$

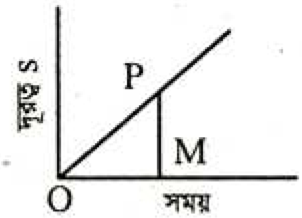
$\therefore$ D বিন্দুতে বেগ, v = আনুভূমিক বেগ = $u \cos\alpha$

$= 13.8594$ m/s **(Ans.)**

[$\because$ সর্বোচ্চ উচ্চতায় উল্লম্ব বেগ শূন্য]

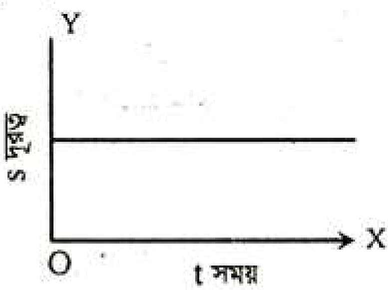
★ সরণ, বেগ, ত্বরণ

১. নিচের কোনটি স্কেলার রাশি? (সহজ)
ক সরণ   খ বেগ
গ ত্বরণ   ঘ দূরত্ব   **ঘ**

২. 

চিত্রে ঢাল কোনটি? (সহজ)
ক $\frac{PM}{OM}$ খ $\frac{OM}{PM}$
গ PM.OM   ঘ PM + OM   **ক**

৩. নিচের দূরত্ব-সময় গ্রাফটি কী নির্দেশ করে? (সহজ)



ক সমবেগ   খ বস্তুটি স্থির
গ সুষম বেগ   ঘ পরিবর্তনশীল বেগ   **খ**

৪. এক ব্যক্তি 7 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার মাঠ এক পাক ঘুরলে তার সরণ কত মিটার হবে? (সহজ)
ক 7   খ 6
গ 2   ঘ 0   **ঘ**

৫. একটি সুষম বেগে চললে এর ত্বরণ কি হবে? (সহজ)
ক ধনাত্মক   খ ঋণাত্মক
গ সুষম   ঘ কোন ত্বরণ হবে না   **ঘ**

৬. সমবেগে চলন্ত কোনো বস্তুকণার ত্বরণ— (সহজ)
ক শূন্য   খ ঋণাত্মক
গ সুষম   ঘ সুষম নয়   **ক**

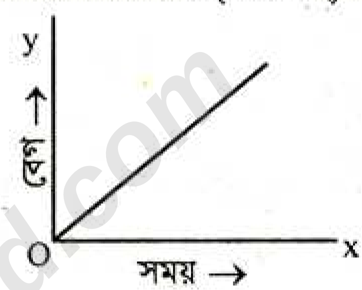
৭. চলমান একটি বস্তু সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম না করলে তার দ্রুতিকে কি বলে? (সহজ)
ক সুষম দ্রুতি   খ অসম দ্রুতি
গ সুষম ত্বরণ   ঘ সুষম বেগ   **খ**

৮. নির্দিষ্ট দ্রুতিতে আঁকাবাঁকা পথে চলন্ত কোন কণা কিরূপ হয়? (মধ্যম)
ক সমদ্রুতি বিশিষ্ট   খ সমবেগ বিশিষ্ট
গ সমবেগ ও সমদ্রুতি বিশিষ্ট
ঘ সমত্বরণ ও অসমত্বরণ বিশিষ্ট   **ক**

৯. অসমবেগ ও অসমত্বরণ—
i. সময়ের সাথে ভিন্ন ভিন্ন হয়
ii. উভয়ই ভেক্টর রাশি
iii. সময়ের সাথে পরিবর্তন হয় না
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii   খ i ও iii
গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii   **ক**

১০. দূরত্ব-সময় লেখ এর—
i. কোন বিন্দুতে ঢাল ঐ মুহূর্তের দ্রুতি নির্দেশ করে
ii. ঢাল সংখ্যাগতভাবে বস্তুর বেগের সমান
iii. ঢাল যত খাড়া হয় দ্রুতি তত বেশি হয়
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii   খ i ও iii
গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii   **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১১ ও ১২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

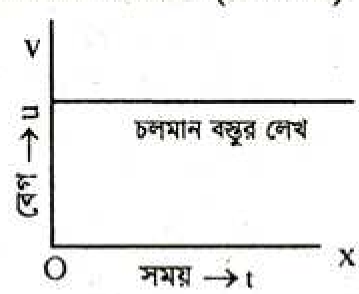


চিত্রে একটি বস্তুর বেগ-সময় লেখ দেখানো হয়েছে:

১১. বস্তুটি কি বেগে চলছে? (সহজ)
ক সমবেগে   খ অসমবেগে
গ শূন্য বেগে   ঘ কৌণিক বেগে   **খ**

১২. বস্তুটি কি ত্বরণে চলছে? (সহজ)
ক সমত্বরণ   খ অসমত্বরণ
গ শূন্য ত্বরণ   ঘ কৌণিক ত্বরণ   **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (১৩ ও ১৪)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



১৩. বস্তুটি কি বেগে চলছে? (সহজ)
ক শূন্য বেগে   খ অসমবেগ
গ সমবেগ   ঘ কোণিক বেগ   **গ**

১৪. বস্তুটি কি ত্বরণে চলছে? (সহজ)
ক সমত্বরণ   খ অসমত্বরণ
গ কোণিক ত্বরণ   ঘ শূন্য ত্বরণ   **ঘ**

★ একাধিক বেগের লব্ধি ও আপেক্ষিক বেগ

১৫. একই সময়ে কোন বস্তুর উপর 5 মি./সে. ও 6 মি./সে. বেগদ্বয় একই দিকে ক্রিয়ারত হলে তাদের লব্ধি বেগ কত মি./সে.? (সহজ)

ⓚ 12 ⓚ 11
ⓖ 7 ⓖ 1 **খ**

(ক) 12 (খ) 11
(গ) 7 (ঘ) 1 **খ**

১৬. একই সময়ে একটি কণার উপর প্রতি সেকেন্ডে 3, 5, 7 একক মানের তিনটি বেগ বিভিন্ন দিক থেকে কার্যরত থাকায় কণাটি স্থিতিশীল রয়েছে। ছোট দুইটি বেগের মধ্যকার কোণটির পরিমাণ কত? (কঠিন)

(ক) 25° (খ) 60°
(গ) 30° (ঘ) 45° **খ**

ব্যাখ্যা: কণাটি স্থিতিশীল থাকায় 3 ও 5 এর লব্ধি 7 এর সমান হবে।
সুতরাং $7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \times 3 \times 5 \times \cos\alpha$
বা, $49 = 9 + 25 + 30 \times \cos\alpha$
বা, $\cos\alpha = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
$\therefore \alpha = 60°$

১৭. একই বিন্দুতে সমকোণে ক্রিয়ারত u ও v বেগের লব্ধির মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $u + v$ (খ) $\sqrt{u^2 - v^2}$
(গ) $\sqrt{u^2 + v^2}$ (ঘ) $u - v$ **গ**

ব্যাখ্যা: লব্ধি, $W = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 90°}$
$= \sqrt{u^2 + v^2}$

১৮. AB সরলরেখার সাথে 60° কোণে A বিন্দু হতে একটি কণা যাত্রা করে। BA সরলরেখার সাথে 30° কোণে B বিন্দু হতে একই সময়ে অপর একটি কণা ঘণ্টায় 10 km সমবেগে যাত্রা করে এবং কিছুক্ষণ পর প্রথম কণার সাথে মিলিত হয়। প্রথম কণার বেগ নির্ণয় কর। (কঠিন)

(ক) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ km/hr (খ) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ km/hr
(গ) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ km/hr (ঘ) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ km/hr **গ**

১৯. কোনো কণার বেগ $5ms^{-1}$, $10ms^{-1}$ দ্বারা পরস্পরের সাথে $\frac{2\pi}{3}$ কোণ করে, লব্ধির মান — (মধ্যম)

(ক) $5\sqrt{3}$ (খ) $3\sqrt{5}$
(গ) 5.3^2 (ঘ) $5^2.3$ **ক**

২০. দুইটি বেগের লব্ধি 20km/h এবং লব্ধি 15km/h বেগের সাথে লম্ব। অপর বেগটির মান হবে? (মধ্যম)

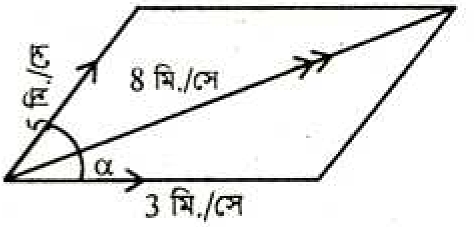
(ক) 35 km/h (খ) 30 km/h
(গ) 25 km/h (ঘ) 10 km/h **গ**

ব্যাখ্যা: $20^2 + 15^2 = x^2$
$\therefore x = 25$ km/h

২১. এক বিন্দুগামী দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধির ক্ষেত্রে বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত ডিগ্রি হবে? (সহজ)

(ক) 90° (খ) 60°
(গ) 30° (ঘ) 0° **ঘ**

২২.



উপরের চিত্র হতে বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে— (কঠিন)

(ক) 0° (খ) 30°
(গ) 60° (ঘ) 120° **ক**

ব্যাখ্যা: মনে করি, বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α
$\therefore 8^2 = 3^2 + 5^2 + 2.3.5 \cos\alpha$
বা, $64 = 34 + 30 \cos\alpha$
বা, $30 \cos\alpha = 30$
বা, $\cos\alpha = 1$
বা, $\cos\alpha = \cos 0°$
$\therefore \alpha = 0°$

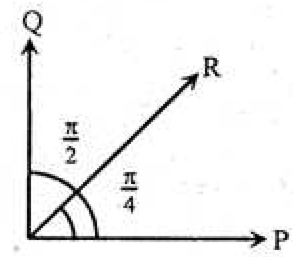
২৩. 3u, 2u বলের লব্ধি v; যদি প্রথমটি দ্বিগুণ করা হয়, তবে লব্ধি ও দ্বিগুণ হয়ে যায় তবে বলদ্বয়ের মধবর্তী কোণ। (মধ্যম)

(ক) 30° (খ) 60°
(গ) 120° (ঘ) 90° **গ**

২৪. দুইটি বেগ P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{2}$, লব্ধি R যা P এর সাথে $\frac{\pi}{4}$ কোণ করে। তবে R : P : Q হবে? (কঠিন)

(ক) $1 : \sqrt{2} : 1$ (খ) $\sqrt{2} : 1 : 1$
(গ) $1 : 1 : \sqrt{2}$ (ঘ) $2 : 2 : \sqrt{3}$ **খ**

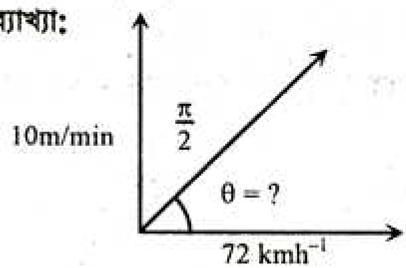
ব্যাখ্যা: $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\therefore P = Q$
$\therefore R = \sqrt{2}P$
অর্থাৎ R ঃ P ঃ Q
$= \sqrt{2}$ ঃ 1 ঃ 1



২৫. RAB যখন সন্ত্রাসীকে ধরার জন্য ট্রেনে অভিযান চালাল তখন সন্ত্রাসী ট্রেন হতে 10 m/min বেগে নিয়ে ট্রেনটির দিকের সাথে লম্বভাবে লাফ দিল। যদি ট্রেনের বেগ 72 km/hr হয় তবে সন্ত্রাসী লাফ দিয়ে যেদিকে পড়ে তা ট্রেনের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে? (কঠিন)

ⓚ $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{120}\right)$ ⓛ $\cos^{-1}(-120)$
ⓜ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{120}\right)$ ⓝ $\tan^{-1}(120)$ **(গ)**

ব্যাখ্যা:



$\tan\theta = \frac{.6\sin 90°}{72 + .6\cos 90°}$ | $10 \text{ m/min} = \frac{10 \times 10^{-3}}{\frac{1}{60}} = .6 \text{ kmh}^{-1}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{120}\right)$

২৬. নৌকার বেগ 8 কি.মি./ঘন্টা এবং স্রোতের বেগ 4 কি.মি./ঘন্টা হলে নদীর এ পাড় থেকে ঠিক সোজাসুজি অপর পাড়ে যেতে হলে নৌকাটি স্রোতের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করবে? (কঠিন)

ⓚ 30° ⓛ 60°
ⓜ 90° ⓝ 120° **(ঘ)**

ব্যাখ্যা: নদীর স্রোতের বেগ বরাবর বল গুলির লম্বাংশ নিয়ে,

$4\cos 0° + 8\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow 8\cos\alpha = -4$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$

২৭. নদীর স্রোতের বেগ 3 km/h নৌকার বেগ কত হলে নৌকাটি 4 km/h বেগে সোজা পথে নদী পাড়ি দিতে পারবে? (কঠিন)

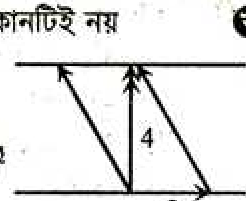
ⓚ 4 km/h ⓛ 5 km/h
ⓜ 4.5 km/h ⓝ কোনটিই নয় **(খ)**

ব্যাখ্যা: লব্ধি = 4 km/h

স্রোতের বেগ = 3 km/h

নৌকার বেগ $= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= 5$ km/h



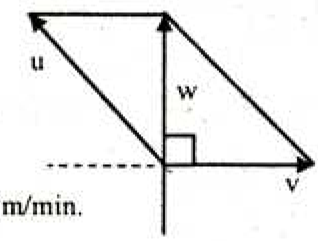
২৮. একজন সাঁতারু স্রোতের দ্বিগুণ বেগে সাঁতার দিয়ে একটি নদীর অপর তীরে যাত্রাবিন্দুর ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌছাল। স্রোতের সাথে তার নতি কত? (মধ্যম)

ⓚ 60° ⓛ 90°
ⓜ 120° ⓝ 150° **(গ)**

২৯. স্রোত না থাকলে একটি লোক 5 মিনিটে সাতার কেটে সোজাসুজিভাবে 80 মিটার প্রশস্ত একটি খাল পার হতে পারে এবং স্রোত থাকলে তার দ্বিগুণ সময় লাগে। স্রোতের বেগ কত মি./মিনিট? (কঠিন)

ⓚ 15 ⓛ 12
ⓜ 16.5 ⓝ 13.86 **(ঘ)**

ব্যাখ্যা:



সাঁতারুর বেগ, $u = \frac{80}{5} = 16$ m/min.

স্রোতের বেগ = v

$w = \frac{80}{10} = 8$ m/min

পিথাগোরাসের সূত্র হতে, $w^2 + v^2 = u^2$

বা, $v = \sqrt{16^2 - 8^2} = 13.86$ m/min.

৩০. 8 kmh⁻¹ বেগে চলন্ত একটি গাড়ি থেকে 16kmh⁻¹ বেগে একটি বস্তু কোনদিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি গাড়ির বেগের সাথে সমকোণে চলবে? (কঠিন)

ⓚ 60° ⓛ 100°
ⓜ 120° ⓝ 135° **(গ)**

ব্যাখ্যা: $\tan 90° = \frac{16\sin\alpha}{8 + 16\cos\alpha}$

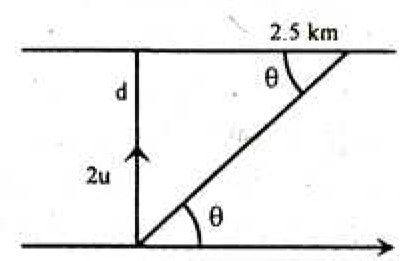
বা, $8 + 16\cos\alpha = 0$ বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

বা, $\alpha = 120°$

৩১. নদীর স্রোতের দ্বিগুণ বেগে ও স্রোতের সাথে সমকোণে একটি নৌকার দাঁড় টেনে নৌকাটি অপর তীরে মাত্রাবিন্দুর বিপরীত বিন্দু থেকে 2.5 km ভাটিতে পৌছাল। নদীর প্রস্থ কত? (কঠিন)

ⓚ 2.5 ⓛ 4
ⓜ 3 ⓝ 5 **(ঘ)**

ব্যাখ্যা:



$\tan\theta = \frac{2u\sin 90°}{u + 2u\cos 90°}$

বা, $\tan\theta = 2$

$\tan\theta = \frac{d}{2.5} = 2$

বা, d = 5km

৩২. একবিন্দুতে ক্রিয়াশীল u ও v দুইটি বেগের লব্ধি w. যদি u = v = w হয়, তবে বেগ দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? (মধ্যম)

ⓚ 30°   ⓛ 60°
ⓜ 190°   ⓝ 120°   ঘ

ব্যাখ্যা: $u^2 = u^2 + u^2 + 2u^2 \cos\alpha$

বা, $1 + 2\cos\alpha = 0 \quad \therefore \alpha = 120°$

৩৩. 150 মিটার প্রশস্থ একটি নদীতে স্রোত না থাকলে তা সোজাসুজি পার হতে 5 মিনিট সময় লাগলে সাতারুর বেগ কত মিটার/মিনিট? (সহজ)

ⓚ 20   ⓛ 25
ⓜ 30   ⓝ 35   গ

ব্যাখ্যা: সাতারুর বেগ $= \frac{150}{5} = 30$ মিটার/মিনিট

৩৪. স্রোতের বেগ v_1 এবং নৌকার বেগ $v_2(v_2 > v_1)$ স্রোতের বিপরীতে নৌকা চললে, স্রোতের সাপেক্ষে নৌকার আপেক্ষিক বেগ কত? (মধ্যম)

ⓚ $\frac{v_1 + v_2}{2}$ ⓛ $v_2 - v_1$
ⓜ $v_1 + v_2$ ⓝ $2v_2$ গ

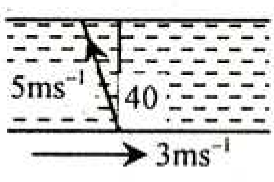
৩৫. এক ব্যক্তি $5ms^{-1}$ বেগ নিয়ে স্থির পানিতে সাতার কাটতে পারে, সে $3ms^{-1}$ বেগে প্রবাহিত 40m প্রশস্থ একটি নদী সোজাসুজি পার হতে চায়। লোকটির নদী পার হতে সময় লাগবে? (কঠিন)

ⓚ 8s   ⓛ 5s
ⓜ 6s   ⓝ 10s   ঘ

ব্যাখ্যা: নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়,

$t = \frac{d}{\text{নৌকার লব্ধি বেগ, } w}$

$w = \sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4ms^{-1}$



$\therefore t = \frac{d}{w} = \frac{40}{4} = 10s$

৩৬. একজন সাইকেল আরোহী সমতলে রাস্তার উপর দিয়ে কত বেগে চললে উলম্বের সাথে 30° কোণে 7 মি./সে. বেগে পড়ন্ত বৃষ্টির ফোঁটা তার গায়ে খাড়াভাবে পড়বে? (কঠিন)

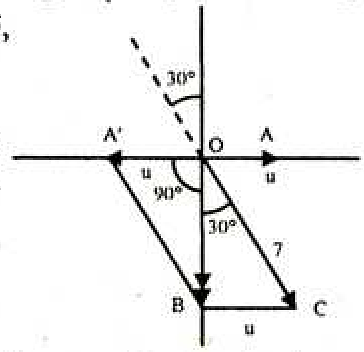
ⓚ $5\sqrt{3}$ মি./সে.   ⓛ $6\sqrt{3}$ মি./সে.
ⓜ 3.5 মি./সে.   ⓝ $8\sqrt{3}$ মি./সে.   গ

ব্যাখ্যা: ΔOBC হতে,

$\sin 30° = \frac{u}{7}$

বা, $u = 7 \times \sin 30°$

$\therefore u = 3.5$ মি./সে.



৩৭. সুন্দরবন ও সুর্বণা ট্রেনদ্বয় ঢাকা থেকে খুলনার দিকে 12 মি./সে. ও 19 মি./সে. বেগে রওনা দিল? সুন্দরবন ট্রেনের সাপেক্ষে সুর্বণা ট্রেনের আপেক্ষিক বেগ কত? (সহজ)

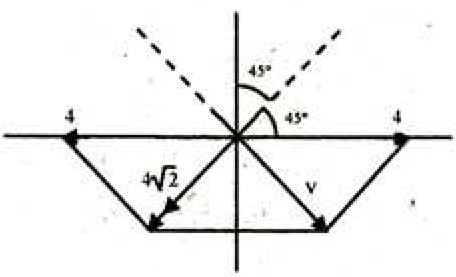
ⓚ 31   ⓛ 19
ⓜ 12   ⓝ 7   ঘ

৩৮. একটি লোক 4 km/h বেগে সোজা পূর্বদিকে যাওয়ার সময় দেখল বাতাস উত্তর পূর্বদিক হতে $4\sqrt{2}$ km/h বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। বাতাসের প্রকৃত গতিবেগ— (মধ্যম)

ⓚ 4 km/h   ⓛ 3 km/h
ⓜ 3.5 km/h   ⓝ 5 km/h   ক

ব্যাখ্যা: বাতাসের প্রকৃত বেগ হবে 135° কোণে ক্রিয়ারত 4 ও $4\sqrt{2}$ বেগদ্বয়ের লব্ধি,

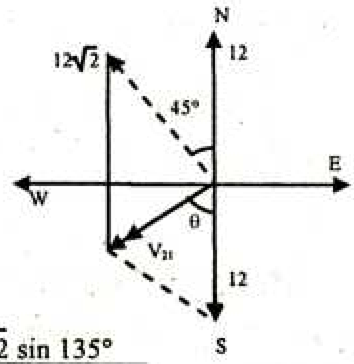
$v = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2 + 2.4.4\sqrt{2}\cos 135°}$
$= 4$ km/hr



৩৯. একটি নৌকা 12 km/h বেগে উত্তর দিকে যাচ্ছে। অপর একখানি নৌকা $12\sqrt{2}$ km/h বেগে উত্তর পশ্চিমে যাচ্ছে। প্রথম নৌকার সাপেক্ষে দ্বিতীয় নৌকার বেগ ও দিক — (মধ্যম)

ⓚ 12 km/h (w)   ⓛ 13 km/h (w)
ⓜ 12 km/h (E)   ⓝ 11 km/h (w)   ক

ব্যাখ্যা: $V_{21} = \sqrt{12^2 + (12\sqrt{2})^2 + 2.12.12\sqrt{2}\cos 135°}$
$= 12$ km/hr



$\tan\theta = \dfrac{12\sqrt{2}\sin 135°}{12 + 12\sqrt{2}\cos 135°}$

$= \dfrac{12\sqrt{2}\sin 135°}{0} = \infty$

$\therefore \theta = 90°$

$\therefore V_{21}$ এর দিক w বরাবর

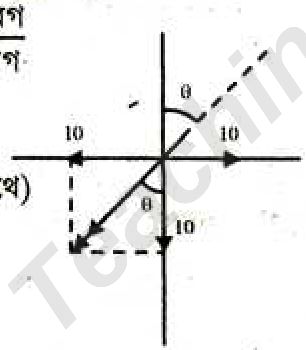
৪০. বৃষ্টি চলাকালীন সময়ে একজন লোক 10 মি./সে. বেগে চলছে। যদি বৃষ্টি 10 মি./সে. বেগে খাড়া নিচের দিকে পড়ে তবে ঐ লোকটিকে উলম্বের সাথে কোন দিকে ছাতা ধরতে হবে? (কঠিন)

ⓚ 30° ⓛ 45°
ⓜ 60° ⓝ 90° **খ**

ব্যাখ্যা: $\tan\theta = \dfrac{\text{ব্যক্তির বেগ}}{\text{বৃষ্টির বেগ}}$

$= \dfrac{10}{10} = 1$

$\therefore \theta = 45°$ (উলম্বের সাথে)

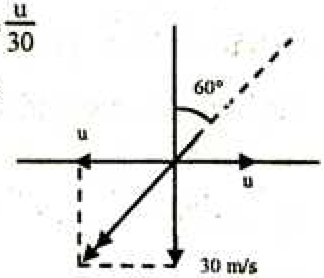


৪১. বৃষ্টি 30 m/s বেগে খাড়াভাবে পড়ছে। একজন রেলগাড়ির যাত্রীর কাছে তা খাড়ারেখার সাথে 60° কোণে পড়ছে বলে হয়। রেলগাড়ির বেগ — (কঠিন)

ⓚ $3\sqrt{3}$ ⓛ $30\sqrt{2}$ m/s
ⓜ $30\sqrt{3}$ m/s ⓝ $15\sqrt{3}$ m/s **গ**

ব্যাখ্যা: $\tan 60° = \dfrac{u}{30}$

$\therefore u = 30\sqrt{3}$ m/s



৪২. এক ব্যক্তি 3 km/h বেগে উত্তর দিকে 12 km হাঁটার পর পশ্চিম দিকে 150 মিনিটে 5 km পথ হাঁটল। ঐ ব্যক্তির গড় বেগ কত? (কঠিন)

ⓚ $\dfrac{11}{6}$ ⓛ $\dfrac{2}{3}$
ⓜ 2 ⓝ 2.5 **গ**

ব্যাখ্যা: উত্তর দিকে সরণ = 12 km
পশ্চিম দিকে সরণ = 5 km
লব্ধি সরণ $= \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ km
মোট সময় $= 4h + \dfrac{150}{60}h = 6.5h$
গড়বেগ $= \dfrac{13km}{6.5h} = 2km/h$

৪৩. দুইটি প্লেন একই দিকে পাশাপাশি ঘন্টায় 30 কি.মি. বেগে চলছে। এদের যে কোনো একটির সাপেক্ষে অপরটির বেগ কত? (মধ্যম)

ⓚ 30 কি.মি./ঘন্টা ⓛ 60 কি.মি./ঘন্টা
ⓜ 15 কি.মি./ঘন্টা ⓝ শূন্য **ঘ**

৪৪. একজন ব্যক্তি কোন স্থান যাওয়ার সময় ঘন্টায় 4 মাইল বেগে যায় এবং আসার সময় ঘন্টায় 5 মাইল বেগে ফেরত আসে। তার গড় গতিবেগ কত? (মধ্যম)

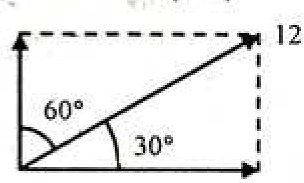
ⓚ 4.44 ⓛ 4.50
ⓜ 4.54 ⓝ 5.0 **ক**

৪৫. 200 মিটার ও 300 মিটার দৈর্ঘ্যের দুইটি ট্রেন একটি স্টেশন থেকে একই সময়ে একই দিকে দুইটি সমান্তরাল রেলপথে যথাক্রমে 40 কি.মি./ঘ. ও 30 কি.মি./ঘ. বেগে যাত্রা করলো। কত সময় পরে এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে? (মধ্যম)

ⓚ 2 মিনিট ⓛ 3 মিনিট
ⓜ 4 মিনিট ⓝ 4.5 মিনিট **খ**

৪৬. 12 ms^{-1} বেগের দুই পার্শ্বে 30° ও 60° কোণে কার্যরত অংশকদ্বয় নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $6\sqrt{3}, 6$
ⓛ $6, 6\sqrt{3}$
ⓜ $24, 24\sqrt{3}$
ⓝ $24\sqrt{3}, 24$ **ক**



ব্যাখ্যা: $12\cos 30° = 6\sqrt{3}$
এবং $12\sin 30° = 6$

৪৭. দুইটি বাস A ও B পরস্পর সমকোণে মিলিত দুইটি সোজা রাস্তা দিয়ে যথাক্রমে 40 km/h ও 30 km/h বেগে চলছে। B বাসের সাপেক্ষে A বাসের আপেক্ষিক বেগ কত? (কঠিন)

ক 25 km/h খ 35 km/h
গ 45 km/h ঘ 50 km/h **ঘ**

ব্যাখ্যা: B বাসের সাপেক্ষে A বাসের আপেক্ষিক বেগ হবে, $\sqrt{40^2+30^2} = 50$ km/h

৪৮. দুইটি সরলরেখা পরস্পর 60° কোণে ছেদ করেছে। ছেদবিন্দু থেকে দুইটি কণা প্রত্যেকটি 25 km/h বেগে যাত্রা করল। এদের একটির তুলনায় অপরটির আপেক্ষিক বেগ কত? (কঠিন)

ক 20 km/h খ 25 km/h
গ 27 km/h ঘ 30 km/h **খ**

ব্যাখ্যা: আপেক্ষিক বেগ

$= \sqrt{25^2+25^2+2\times 25\times 25\cos 120°}$
$= 25$ km/h

৪৯. P ও Q বস্তু দুইটির বেগ V_P ও V_Q ($V_P > V_Q$) এবং Q এর সাপেক্ষে P এর আপেক্ষিক বেগ V_{PQ} এর ক্ষেত্রে —

i. বস্তুদ্বয় একই দিকে গতিশীল হলে, $V_{PQ} = V_P - V_Q$.
ii. বস্তুদ্বয় পরস্পর বিপরীত দিকে গতিশীল হলে, $V_{PQ} = V_P + V_Q$.
iii. বস্তুদ্বয় পরস্পর α কোণে ছেদকারী দুইটি সরলরেখা বরাবর গতিশীল হলে, $V_{PQ} = \sqrt{V_P^2 + V_Q^2 - 2V_PV_Q\cos\alpha}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৫০. যদি স্রোতের বেগ নৌকার বেগের দ্বিগুণ হয়, তবে —

i. তীরের সাথে 120° কোণে নৌকা চালালে সোজাসুজি নদী পার হওয়া যাবে
ii. নদী সোজাসুজি পার হওয়া যাবে না
iii. ক্ষুদ্রতম সময়ে নদী পার হওয়া যাবে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i খ ii
গ i ও iii ঘ ii ও iii **খ**

৫১. পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বেগদ্বয়ের লব্ধি $3\sqrt{3}$ —

i. সমান বেগদ্বয়ের প্রত্যেকটির মান 3 একক
ii. লব্ধি 3 একক বেগের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে
iii. বেগদ্বয়ের সমষ্টি লব্ধি বেগের সমান

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৫২. চলন্ত ট্রেনে দুইজন মুখোমুখি বসে থাকলে—

i. একজনের সাপেক্ষে অন্যজন গতিশীল।
ii. লাইনের পাশে দাঁড়ানো ব্যক্তির সাপেক্ষে তারা উভয়ই গতিশীল।
iii. সময়ের সাথে তাদের দুজনের মধ্যবর্তী দূরত্ব পরিবর্তন হচ্ছে না।

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

৫৩. পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি u সমমানের বেগ —

i. বেগদ্বয়ের লব্ধি $= \sqrt{2}u$
ii. লব্ধি বেগ অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে
iii. বেগ দুইটি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান শূন্য

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

নিচের অনুচ্ছেদটি পড় এবং (৫৪ ও ৫৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একই স্থান হতে যখন একটি ক্রিকেট বল যে বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হলো তখন একজন লোক একই বেগে দৌড়াতে শুরু করল।

৫৪. লোকটি বলটিকে কোন দিকে যেতে দেখবে? (মধ্যম)

ক তার বিপরীত দিকে
খ খাড়া উপরের দিকে
গ তার বেগের বিপরীত দিকের সাথে 45° কোণে
ঘ তার বেগের দিকের সাথে 45° কোণে **গ**

৫৫. যদি বলের আপেক্ষিক বেগ $\sqrt{2}$ m/s হয় তবে —

i. বলের প্রকৃত বেগ 1 m/s
ii. লোকটির প্রকৃত বেগ 1 m/s
iii. লোকটির আপেক্ষিক বেগ $\sqrt{2}$ m/s

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও iii খ ii
গ i ও ii ঘ i, ii ও iii **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে ৫৬ ও ৫৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
কোন বিন্দুতে সমকোণে ক্রিয়ারত দুইটি বেগের লব্ধি 13 একক; তাদের একটি 5 একক হলে বেগদ্বয়ের—

৫৬. বৃহত্তম লব্ধি কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 18 (খ) 8
(গ) 17 (ঘ) 7 **(গ)**

ব্যাখ্যা: মনে করি, বেগদ্বয় যথাক্রমে u এবং v = 5 একক। ইহাদের লব্ধি 13 একক এবং বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°।

∴ লব্ধি বেগ, $13 = \sqrt{u^2 + 5^2 + 2u.5\cos 90°}$

বা, $(13)^2 = u^2 + 5^2$ বা, $u^2 = 169 - 25$ বা, $u^2 = 144$

∴ u = 12 একক

∴ বৃহত্তম লব্ধি = u + v = 12 + 5 = 17

৫৭. ক্ষুদ্রতম লব্ধি কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 17 (খ) 7
(গ) 3 (ঘ) 8 **(খ)**

ব্যাখ্যা: ক্ষুদ্রতম লব্ধি = u − v = 12 − 5 = 7

উদ্দীপকের আলোকে (৫৮ ও ৫৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
1.5 km প্রশস্ত একটি নদী 5 km/h বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। একজন সাঁতারু 6 km/h বেগে সাঁতার কেটে ন্যূনতম সময়ে নদী পাড়ি দিতে চায়।

৫৮. ন্যূনতম সময়ে নদী পাড়ি দেয়ার জন্য তীরের সাথে কত ডিগ্রী কোণে সাঁতার কাটতে হবে? (মধ্যম)

(ক) 60° (খ) 90°
(গ) 100° (ঘ) 120° **(খ)**

ব্যাখ্যা: ন্যূনতম সময়ে নদী পার হওয়ার ক্ষেত্রে তীরের সাথে 90° কোণে সাঁতার কাটতে হবে।

৫৯. ন্যূনতম কত সময়ে সাঁতারু নদী পাড়ি দিতে পারবে? (মধ্যম)

(ক) 10 মি. (খ) 12 মিনিট
(গ) 15 মি. (ঘ) 18 মি. **(গ)**

ব্যাখ্যা:

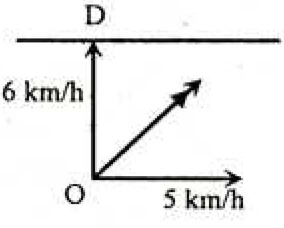
∴ ন্যূনতম সময় $= \frac{1.5}{6 \sin\theta}$

$= \frac{1.5}{6}$ [∵ θ = 90°]

$= \frac{1}{4}$ ঘণ্টা

$= \frac{1}{4} \times 60$

= 15 মিনিট (Ans.)



নিচের তথ্যের আলোকে (৬০ ও ৬১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
দুইটি বস্তুকণার বৃহত্তম লব্ধিবেগ হতে পারে 14 মি./সে. ও ক্ষুদ্রতম লব্ধিবেগ হতে পারে 2 মি./সে.। বেগ দুইটি 90° কোণে ক্রিয়া করে।

৬০. বস্তু কণাদ্বয়ের বেগ কত মি./সে. হবে? (সহজ)

(ক) 10 ও 8 (খ) 8 ও 6
(গ) 8 ও 5 (ঘ) 6 ও 4 **(খ)**

৬১. বেগদ্বয়ের লব্ধি কত মি.সে.? (কঠিন)

(ক) 6 (খ) 8
(গ) 10 (ঘ) 12 **(গ)**

★ সরলরেখায় সমত্বরণে চলমান বস্তুকণার গতিসূত্রসমূহ

৬২. একটি বুলেট কোনো লক্ষ্য বস্তুতে 3cm ভেদ করে এর অর্ধেক বেগ হারায়। এটি আরও কতটা ভেদ করবে? (কঠিন)

(ক) 1 cm (খ) 1.5 cm
(গ) 2 cm (ঘ) 3 cm **(ক)**

ব্যাখ্যা: $S_2 = \frac{S_1}{3} = 1$ cm

৬৩. একটি ট্রেন 22.5 মি./সে. গতিবেগ নিয়ে যাত্রা করে 10 সেকেন্ডে এ 325 মিটার গেল। এর ত্বরণ কত? (কঠিন)

(ক) $1\ ms^{-2}$ (খ) $2\ ms^{-2}$
(গ) $3\ ms^{-2}$ (ঘ) $4\ ms^{-2}$ **(খ)**

৬৪. দুইটি ট্রেন একই রেলপথে বিপরীত দিক হতে 44 ft/sec ও 66 ft/sec গতিবেগে অগ্রসর হচ্ছে। ট্রেন দুইটি 1573 ft দূরত্বে থাকাকালে সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য উভয় ইঞ্জিনে ব্রেক করা হলো। উভয় ইঞ্জিনের মন্দন সমান হলে মন্দনের সর্বনিম্ন মান কত? (কঠিন)

(ক) $1.5\ ft/sec^2$ (খ) $2\ ft/sec^2$
(গ) $134.3\ ft/sec^2$ (ঘ) $22\ ft/sec^2$ **(খ)**

ব্যাখ্যা: ধরি, ১ম ট্রেন ও ২য় ট্রেন কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব যথাক্রমে S_1 ও S_2 এবং উভয়ের মন্দন f, কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো যাবে যদি

$S_1 + S_2 = 1573$

বা, $\frac{44^2 - 0^2}{2f} + \frac{66^2 - 0^2}{2f} = 1573$

বা, $\frac{1}{2f} = \frac{1}{4}$ ∴ $f = 2\ ft/s^2$

৬৫. যদি $s = 6 + 4t - t^2$ হয়, তবে 2 সে. পর এর ত্বরণ কত? (মধ্যম)

(ক) $4\ m/s^2$ (খ) $-4\ m/s^2$
(গ) $2\ m/s^2$ (ঘ) $-2\ m/s^2$ **(ঘ)**

ব্যাখ্যা: $v = \frac{ds}{dt} = 4 - 2t$

$a = \frac{dv}{dt} = -2$

ব্যাখ্যা: $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$= \frac{32^2 \times \sin 60°}{32}$

$= 32 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 16\sqrt{3}$ ফুট।

১৭২. একটি রাইফেলের পাল্লা 1000 মিটার। চন্দ্রের মধ্যাকর্ষণ শক্তি পৃথিবীর মধ্যাকর্ষণ শক্তির $\frac{1}{6}$ হলে চন্দ্র পৃষ্ঠে রাইফেলের পাল্লা কত মিটার হবে? (মধ্যম)

ক 4000 খ 5000
গ 5500 ঘ 6000 **ঘ**

ব্যাখ্যা: মনে করি, রাইফেলের গুলির নিক্ষেপণ বেগ = u মি./সে. এবং নিক্ষেপন কোণ = α

$R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$ সূত্র হতে, $\frac{R_m}{R_e} = \frac{g_e}{g_m}$

বা, $R_m = 1000 \times \frac{1}{\frac{1}{6}}$

$\therefore R_m = 6000$ m

১৭৩. 9.8 ft/s বেগে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তু সর্বাধিক কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? (মধ্যম)

ক 1.5 ft খ 3 ft
গ 4.9 ft ঘ 9.8 ft **খ**

ব্যাখ্যা: $R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$

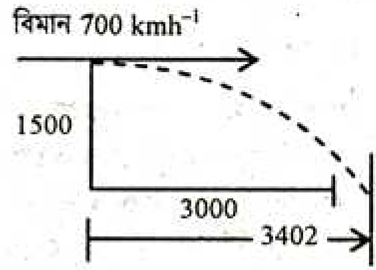
$= \frac{(9.8)^2}{32} \sin (2 \times 45°)$

$= 3.001$ ft

১৭৪. একটি মার্কিন যুদ্ধ বিমান 700 km/h বেগে আনুভূমিকভাবে যাওয়ার সময় একটি শত্রু ঘাটিকে লক্ষ্য করে বোমা ছেড়ে দিল। বিমানটি ভূমি থেকে 1500 m উপরে ছিল। যেই মুহূর্তে বোমা ছাড়ছিল শত্রু ঘাটি এর থেকে 3000 m দূরে থাকলে বোমাটি ঘাটির উপর পড়বে কি? (সহজ)

ক হ্যাঁ
খ না
গ বলা সম্ভব না
ঘ ঘাটি থেকে অনেক আগেই বোমা বিস্ফোরিত হবে **খ**

ব্যাখ্যা:



এখন, $1500 = \frac{1}{2} gt^2$

$\therefore t = 17.496$s

$\therefore$ আনুভূমিক দূরত্ব $x = ut$

$= 3402$m

$\therefore$ বোমাটি ঘাটি থেকে $(3402 - 3000) = 402$ m দূরে গিয়ে ভূমিতে পড়বে।

১৭৫. আনুভূমিক পাল্লা ও বৃহত্তম পাল্লা যদি যথাক্রমে R ও D হয়, তাহলে এদের মাঝে সম্পর্ক নিচের কোনটি? (মধ্যম)

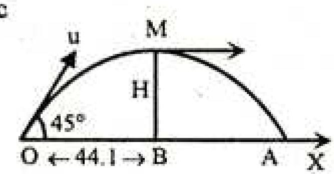
ক $R = D \sin\alpha$ খ $R = D \sin 2\alpha$
গ $D = R \sin 2\alpha$ ঘ $D = R\sin\alpha$ **খ**

ব্যাখ্যা: $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$, $D = \frac{u^2}{g}$

$\therefore R = D \sin 2\alpha$

১৭৬. পাশের চিত্রে নিক্ষেপণ বেগ u এর মান কত? (মধ্যম)

যখন g = 9.8 m/sec



ক 20m/sec
খ 22 m/sec
গ 25.4 m/sec
ঘ 29.4 m/sec **ঘ**

১৭৭. একটি বস্তু ভূমির সাথে 60° কোণে 20 মি./সে. বেগে নিক্ষেপ করা হলো। সর্বোচ্চ উচ্চতায় এর আনুভূমিক বেগ কত? (মধ্যম)

ক 20 m/s খ 10 m/s
গ 0 m/s ঘ $10\sqrt{3}$ m/s **খ**

১৭৮. ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক 30 মিটার দূরে 15m উচ্চতা বিশিষ্ট একটি দেওয়াল স্পর্শ করে আনুভূমিকভাবে চলে যায়। প্রক্ষেপকের প্রক্ষেপণ বেগ কত? (কঠিন)

ক $\sqrt{544}$ms^{-1} খ $\sqrt{488}$ms^{-1}
গ $\sqrt{588}$ms^{-1} ঘ $\sqrt{111}$ms^{-1} **গ**

৭৫. স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা করে একটি কণা 3 সেকেন্ডে 18 মিটার অতিক্রম করলে চতুর্থ সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে? (মধ্যম)

ⓚ 12 মি. ⓛ 14 মি.
ⓜ 16 মি. ⓝ 20 মি. ⓛ

৭৬. বস্তুকণার গতিপথের সমীকরণ $s = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t$ হলে—

i. ১ম সেকেন্ডে অর্জিত বেগ 6 একক
ii. ১ম সেকেন্ডে অর্জিত ত্বরণ 4 একক
iii. বস্তুটি 2 একক ত্বরণে যাত্রা শুরু করে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii ⓝ

৭৭. কোন ব্যক্তি উত্তর দিকে 4 সেকেন্ডে 20 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করলে ব্যক্তিটির—

i. সরণ 20 মি.
ii. দ্রুতি 5 মি./সে
iii. গড়বেগ 5 মি./সে.

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii ⓝ

৭৮. 15 মি./সে. বেগে চলন্ত গাড়িতে 5 সেকেন্ড যাবত 4 মি./সে.^{2} ত্বরণ প্রয়োগ হলে গাড়িটির—

i. শেষ বেগ 35 মি./সে.
ii. অতিক্রান্ত দূরত্ব 125 মিটার
iii. আদিবেগ 15 মি./সে.

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii ⓝ

৭৯. একটি বস্তু স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা করে 2 মিটার/সেকেন্ড^2 সমত্বরণে চলে —

i. 3 সেকেন্ড পর বেগ হবে 6 মিটার/সেকেন্ড
ii. 5 সেকেন্ডে বস্তুটি 25 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে
iii. 20 সেকেন্ড পর এর বেগ 50 মিটার/সেকেন্ড হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii ⓚ

৮০. সম মন্দনে গতিশীল একটি বস্তুর প্রথম 4 সেকেন্ড পর গড় বেগ 30 cm/s পরবর্তী 4 সেকেন্ডে গড় বেগ 10 cm/s হলে—

i. প্রথম 8 সেকেন্ড এর গড় বেগ 20 cm/s
ii. বস্তুটির মন্দন 5 cm/s^2
iii. আদি বেগ 40 cm/s

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii
ⓜ i ও iii ⓝ i, ii ও iii ⓝ

নিচের তথ্যের আলোকে আলোকে (৮১ ও ৮২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি গাড়ি 50 ms^{-1} বেগে চলছিল। গাড়ির চালক ব্রেক চাপায় 5 ms^{-2} মন্দন সৃষ্টি হলো।

৮১. 8 সেকেন্ড পর গাড়িটির বেগ কত? (মধ্যম)

ⓚ 10 m/s ⓛ 40 m/s
ⓜ 60 m/s ⓝ 90 m/s ⓚ

ব্যাখ্যা: $v = 50 - 5 \times 8$
বা, $v = 50 - 40$
$\therefore$ $v = 10$ m/s

৮২. থামার পূর্বে গাড়িটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? (মধ্যম)

ⓚ 5 মিটার ⓛ 10 মিটার
ⓜ 200 মিটার ⓝ 250 মিটার ⓝ

নিচের তথ্যের আলোকে আলোকে (৮৩ ও ৮৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি মোটর গাড়ি সরলরেখা বরাবর 20 ms^{-1} বেগে চলছে। গাড়ির চালক 100 m দূরে 36 kmh^{-1} গতিসীমা নির্দেশক চিহ্ন দেখতে পেলেন।

৮৩. ব্রেক কষে গাড়িটিতে কত মন্দন সৃষ্ট করলে ঐ স্থানে গাড়িটি নির্দেশিত বেগ প্রাপ্ত হবে? (কঠিন)

ⓚ 1.5 ms^{-2} ⓛ 3 ms^{-2}
ⓜ 4.48 ms^{-2} ⓝ 6 ms^{-2} ⓚ

৮৪. নির্দেশিত বেগ নিয়ে ঐ নির্দেশক চিহ্ন পর্যন্ত পৌঁছাতে গাড়িটির কত সময় লাগবে? (কঠিন)

ⓚ 3.57 s ⓛ 6.67 s
ⓜ 15s ⓝ 20s ⓛ

নিচের তথ্যের আলোকে (৮৫ ও ৮৬)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

54 কিমি/ঘন্টা বেগে চলন্ত গাড়িতে 5 সেকেন্ড ধরে 4 মি/সে^{2} ত্বরণ প্রয়োগ করা হলো।

৮৫. গাড়িটির আদিবেগ কত মি./সেকেন্ড? (মধ্যম)

ⓚ 10 ⓛ 15
ⓜ 20 ⓝ 25 ⓛ

ব্যাখ্যা: $u = 54$ km/h $= \frac{54 \times 1000}{3600} = 15$ মি./সে

৮৬. **অতিক্রান্ত দূরত্ব কত মিটার?** (মধ্যম)

ক 130 খ 125

গ 120 ঘ 115 **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৮৭ ও ৮৮) প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি কণা 1.5 মি./সে.^{2} মন্দনে A বিন্দু হতে ৪ মি./সে. বেগে যাত্রা করে যখন B বিন্দুতে পৌঁছায়, তখন তার বেগ 2 মি./সে. হলে-

৮৭. **A বিন্দু হতে B বিন্দুতে যাওয়ার সময় কত?** (মধ্যম)

ক 5 সে. খ 3 সে.

গ 6 সে. ঘ 4 সে. **ঘ**

৮৮. **AB এর দূরত্ব কোনটি?** (মধ্যম)

ক 24 মি. খ 20 মি.

গ 18 মি. ঘ 30 মি. **খ**

একজন সাইকেল আরোহী স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা আরম্ভ করে প্রথম সেকেন্ডে 1 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে (৮৯ ও ৯০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৮৯. **সাইকেল আরোহী কত ত্বরণে চলবে?** (মধ্যম)

ক 1 খ 2

গ 4 ঘ 5 **খ**

৯০. **পরবর্তী 1 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করতে তার সময় লাগবে কত সেকেন্ড?** (মধ্যম)

ক 0.41 খ 0.45

গ 0.46 ঘ 0.48 **ক**

★ বিশেষ এক সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং গড়বেগ

৯১. **একটি কণা স্থির অবস্থা হতে 10 মি/সে^{2} ত্বরণে চলতে শুরু করলে ৪-তম সেকেন্ডে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত মিটার?** (মধ্যম)

ক 70 খ 72

গ 75 ঘ 78 **গ**

ব্যাখ্যা: $S_{th} = u + \frac{1}{2} f (2t - 1)$

$= 0 + \frac{1}{2} . 10 (2 \times 8 - 1)$

= 75 মিটার

৯২. **একটি কণা সরলরেখা বরাবর চলিয়া কোন এক সেকেন্ডে 10m পথ অতিক্রম করে এবং পরবর্তী 4 সেকেন্ডে উহা 60m পথ অতিক্রম করে। কণাটির সমত্বরণ কোনটি?** (কঠিন)

ক 2 ms^{-2} খ 6 ms^{-2}

গ 9 ms^{-2} ঘ 15 ms^{-2} **ক**

৯৩. **কোনো কণার বেগ v, যা সময়ের ঘনের সমানুপাতিক। যদি 4 sec পরে কণাটির বেগ 8ms^{-1} হয় বেগ v = ?** (মধ্যম)

ক $\frac{1}{4}t^3$ খ $\frac{1}{8}t^3$

গ t^3 ঘ $2t^3$ **খ**

ব্যাখ্যা: $v \propto t^3$

$v = kt^3$

$k = \frac{v}{t^3}$

এখন, $8 = k \times 4^3$ বা, $k = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

$\therefore v = \frac{1}{8}t^3$

৯৪. **একটি বস্তু পঞ্চম সেকেন্ডে 50 মিটার এবং দশম সেকেন্ডে 100 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করলে বস্তুটির —**

i. ত্বরণ 10 ms^{-2}

ii. আদিবেগ 5 ms^{-1}

iii. 20 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব 2100 m

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৯৫. **ঘণ্টায় 40 km বেগে চলন্ত একটি গাড়িকে 6s যাবৎ 1.5 ms^{-2} হারে ত্বরান্বিত করা হলে —**

i. এর শেষবেগ 20.11 ms^{-1}

ii. ত্বরণকালে এটি 93.66 m দূরত্ব অতিক্রম করবে

iii. তৃতীয় সেকেন্ডে এটি 35.61 m দূরত্ব অতিক্রম করবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: এখানে, $u = 40\ kmh^{-1}$

$= \frac{40 \times 1000}{60 \times 60} ms^{-1}$

$= \frac{100}{9} ms^{-1}$

(i) $v = u + ft = \frac{100}{9} + 1.5 \times 6 = 20.11$ m/s

(ii) $S = ut + \frac{1}{2}ft^2 = \frac{100}{9} \times 6 + \frac{1}{2} \times 1.5 \times (6)^2$

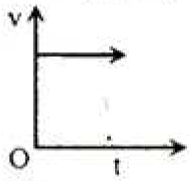
$= 93.66$ m

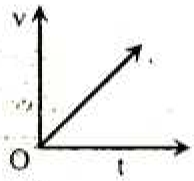
(iii) $S_3 = u + \frac{1}{2}f(2.3 - 1) = \frac{100}{9} + \frac{1}{2} \times 1.5 \times 5$

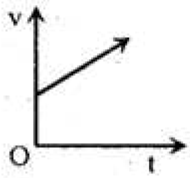
$= \frac{100}{9} + 3.75 = 14.86$ m

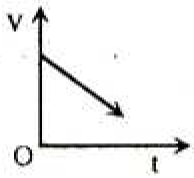
★★ বস্তুকণার গতিপথের লেখচিত্র, লেখচিত্র হতে বস্তুকণার বেগ ও ত্বরণ নির্ণয়

৯৬. সমবেগের ক্ষেত্রে গতিশীল বস্তুকণার t বনাম v লেখ কোনটি? (মধ্যম)

ক 

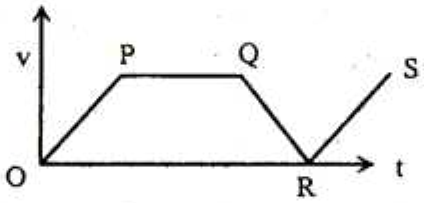
খ 

গ 

ঘ 

ক

৯৭.



উপরের চিত্রে কোনটি সমবেগ? (সহজ)

ক OP   খ PQ

গ QR   ঘ RS

খ

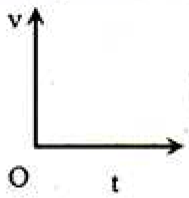
৯৮. f = 0 হলে, t বনাম s লেখচিত্র কিরূপ হয়? (সহজ)

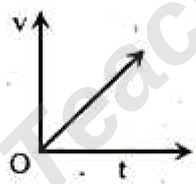
ক সরলরেখা   খ বক্ররেখা

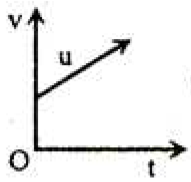
গ পরাবৃত্ত   ঘ অধিবৃত্ত

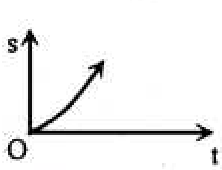
ক

৯৯. স্থির অবস্থান হতে সুষম ত্বরণে গতিশীল বস্তুকণার t বনাম v লেখ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক 

খ 

গ 

ঘ 

খ

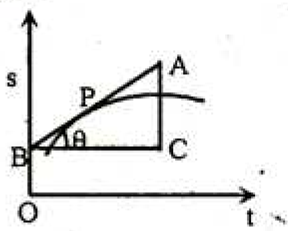
১০০. সুষম ত্বরণের ক্ষেত্রে বেগ বনাম সময় লেখ এর প্রকৃতি কিরূপ? (সহজ)

ক সরলরেখা   খ পরাবৃত্ত

গ উপবৃত্ত   ঘ অধিবৃত্ত

ক

১০১. লেখচিত্রে—



i. $\frac{ds}{dt}$ হলো বক্ররেখার ঢাল

ii. $\frac{AC}{BC}$ হলো বক্ররেখার ঢাল

iii. $\frac{AC}{BC}$ হলো ঐ মুহূর্তের বেগ

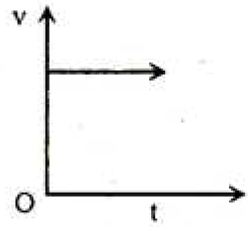
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

ঘ

১০২. লেখচিত্রে—



i. বস্তুটির ত্বরণ হচ্ছে না

ii. বস্তুটির বেগের পরিবর্তন হচ্ছে

iii. বস্তুটি সমবেগে চলছে

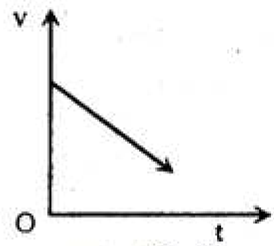
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

খ

১০৩. লেখচিত্রে বস্তুটির—



i. বেগের পরিবর্তন হচ্ছে

ii. মন্দন হচ্ছে

iii. ত্বরণ হচ্ছে

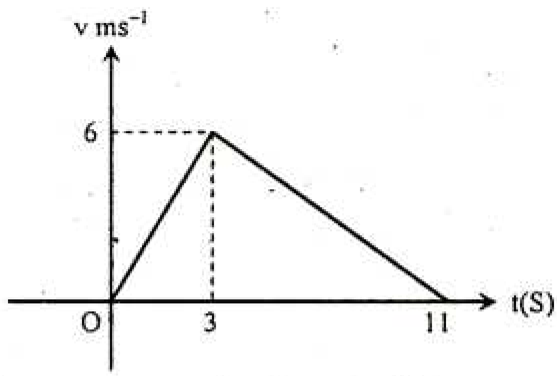
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii   খ i ও iii

গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

ক

১০৪.



উপরের বেগ-সময় লেখ চিত্রের একটি বস্তু কণার গতিপথ দেখানো হয়েছে।

i. কণাটি প্রথম 3 সেকেন্ড সমত্বরণে চলে 6 মি./সে. বেগ প্রাপ্ত হয় অত:পর পরবর্তী ৪ সেকেন্ড সমমন্দনে চলে থেমে যায়

ii. প্রথম 3 সেকেন্ড কণাটি 0.5 মি./সে.^{2} সমত্বরণে চলে

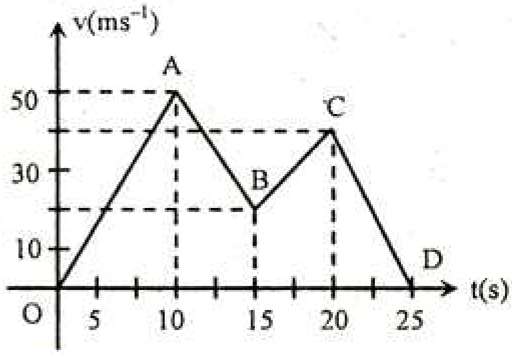
iii. কণাটি কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব = 33 মি.

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

উদ্দীপকের আলোকে (১০৫-১০৬)নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

পাশে বেগ-সময় লেখচিত্রে সোজা রাস্তায় একটি বস্তুকণার গতিপথকে দেখানো হয়েছে।



১০৫. BC অংশের ত্বরণ কত মিটার/সে.^{2}? (কঠিন)

ক 1/4 খ 4
গ 1/2 ঘ 2 **খ**

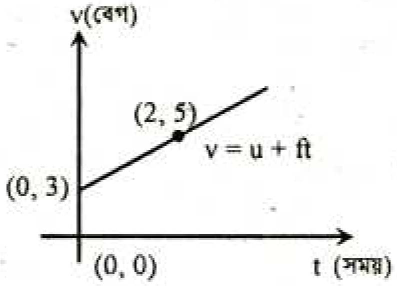
ব্যাখ্যা: $f = \frac{40 - 20}{20 - 15}$ $\therefore$ $f = 4\ ms^{-2}$

১০৬. C বিন্দুতে বেগ কত মিটার/সে.? (কঠিন)

ক 2 খ 20
গ 40 ঘ 1/2 **গ**

উদ্দীপকের আলোকে (১০৭ ও ১০৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

পাশে বেগ-সময় লেখচিত্রে সোজা রাস্তায় একটি বস্তুকণার গতিপথকে দেখানো হয়েছে।



বেগ-সময় লেখচিত্র

১০৭. 2 একক সময়ে বস্তুকণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত একক? (মধ্যম)

ক 2 খ 5
গ 8 ঘ 16 **গ**

ব্যাখ্যা: $s = \left(\frac{u + v}{2}\right) \times t = \frac{3 + 5}{2} \times 2 = 8$ একক

১০৮. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে —

i. বস্তুকণাটির আদিবেগ 0 একক

ii. বস্তুকণাটির ত্বরণ 1 একক

iii. 1 একক সময়ে বস্তুকণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব 4 একক

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i খ ii
গ iii ঘ ii ও iii **খ**

ব্যাখ্যা: এখানে,

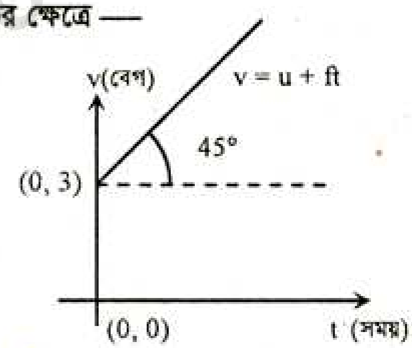
আদিবেগ = 3 একক, ত্বরণ, $\frac{5 - 3}{2} = 1$ একক

$s = ut + \frac{1}{2} ft^2 = 3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 = 3.5$ m

উদ্দীপকের আলোকে (১০৯ ও ১১০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

পাশে বেগ-সময় লেখচিত্রে সোজা রাস্তায় একটি বস্তুকণার গতিপথকে দেখানো হয়েছে।

১০৯. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে —



বেগ-সময় লেখচিত্র

i. বস্তুকণাটির আদিবেগ 3 একক

ii. বস্তুকণাটির ত্বরণ 1 একক

iii. 3 একক শেষে বস্তুকণাটির বেগ 6 একক

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: আদিবেগ = 3 একক

ত্বরণ, f = tan 45° = 1 একক

3 একক সময় শেষে বেগ = 3 + 1 × 3 = 6 একক

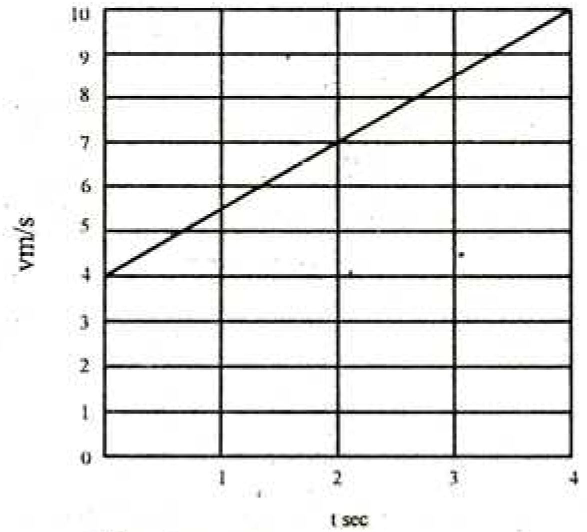
১১০. 2 একক সময়ে বস্তুকণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত একক? (মধ্যম)

ক 2 খ 4
গ 8 ঘ 10 **গ**

ব্যাখ্যা: $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$

$= 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 = 8$ একক

নিচের চিত্রের আলোকে আলোকে (১১১ ও ১১২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১১১. আদি বেগ কত? (সহজ)

(ক) 0 m/s (খ) 2 m/s
(গ) 4 m/s (ঘ) 6 m/s — (গ)

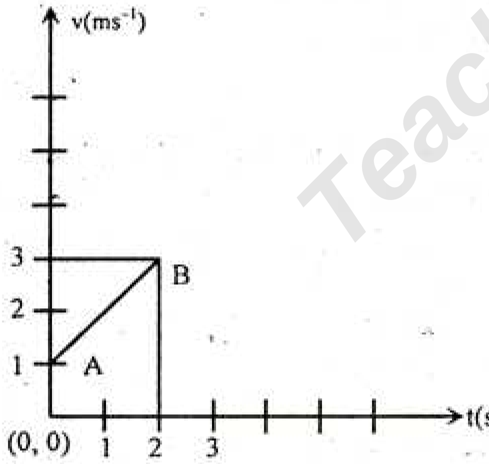
১১২. ত্বরণ কত? (মধ্যম)

(ক) $1.5\ m/s^2$ (খ) $4.5\ m/s^2$
(গ) $6\ m/s^2$ (ঘ) $8\ m/s^2$ — (ক)

ব্যাখ্যা: উদ্দীপকে লেখচিত্র থেকে পাই,

ত্বরণ $= \frac{v-u}{t} = \frac{10-4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5\ ms^{-2}$

নিচের চিত্রের আলোকে আলোকে (১১৩ ও ১১৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



১১৩. B বিন্দুতে বেগ কত? (মধ্যম)

(ক) 0 m/s (খ) 1 m/s
(গ) 2 m/s (ঘ) 3 m/s — (ঘ)

১১৪. AB অংশে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব কত? (মধ্যম)

(ক) 2 m (খ) 3 m
(গ) 4 m (ঘ) 6 m — (গ)

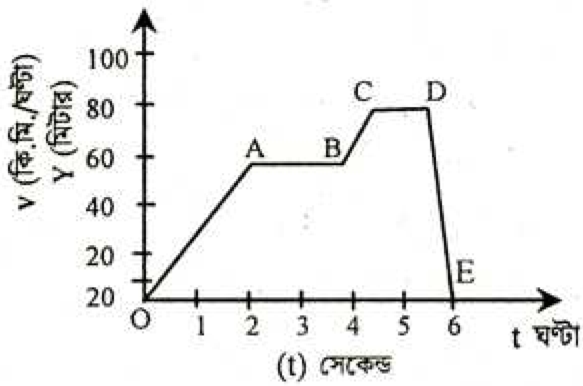
ব্যাখ্যা: $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$u = 1\ ms^{-1}, t = 2\ sec, f = 1\ ms^{-2}$

$\therefore s = 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 = 2 + 2 = 4\ m$

নিচের তথ্যের আলোকে (১১৫ ও ১১৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

পাঁচ ঘণ্টাব্যাপী চলা একটি গাড়ির সময় বনাম বেগ লেখচিত্রটি নিচে দেওয়া হলো:



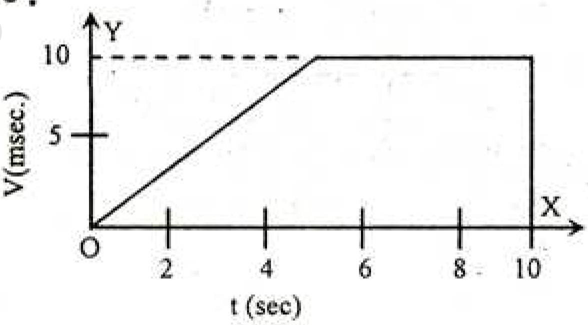
১১৫. OA ও BC অংশে গাড়িটি কিভাবে চলছে? (সহজ)

(ক) মন্দনে (খ) সমবেগে
(গ) ত্বরণে (ঘ) কৌণিক বেগে — (গ)

১১৬. AB ও CD অংশে গাড়িটি কিভাবে চলছে? (সহজ)

(ক) সমবেগে (খ) অসম ত্বরণে
(গ) মন্দনে (ঘ) কৌণিক বেগে — (ক)

পাশের লেখচিত্রে একটি বস্তুর গতিপথ দেখানো হলো। লেখচিত্র থেকে নিচের (১১৭ ও ১১৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১১৭. প্রথম 5 সেকেন্ড সময়ে বস্তুটির ত্বরণ কত? (মধ্যম)

(ক) $1.5\ m/sec^2$ (খ) $2\ m/sec^2$
(গ) $2.4\ m/sec^2$ (ঘ) কোনটিই নয় — (খ)

ব্যাখ্যা: ঢাল $= \frac{10-0}{5-0} = 2\ ms^{-2}$

১১৮. বস্তুটির 10 সেকেন্ড সময়ে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব কত? (মধ্যম)

(ক) 50 m (খ) 60 m
(গ) 70 m (ঘ) 75 m — (ঘ)

★★ উল্লম্ব গতির ক্ষেত্রে ত্বরণ সম্পর্কিত সূত্রসমূহ

১১৯. FPS পদ্ধতিতে g এর মান কত ফুট/সেকেন্ড^2? (সহজ)

(ক) 981 (খ) 320
(গ) 32 (ঘ) 9.81 — (গ)

১২০. 29.4 মি.সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে একটি বস্তু নিক্ষেপ করলে তার সর্বোচ্চ উচ্চতা কোনটি? (মধ্যম)

ক 22 মিটার খ 44.1 মিটার

গ 29.4 মিটার ঘ 33.3 মিটার **খ**

ব্যাখ্যা: সর্বোচ্চ উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(29.4)^2}{2 \times 9.81}$

$= 44.1$ মিটার

১২১. প্রক্ষেপকের উত্থানকাল t এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা H হলে, $\frac{H}{t^2}$ এর মান কত? (সহজ)

ক $\frac{g}{2}$ খ $\frac{2g}{3}$

গ $\frac{3g}{2}$ ঘ $\frac{3}{2g}$ **ক**

১২২. একটি পাথরকে 30 ms^{-1} আদিবেগে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। পাথরটি সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌছাতে কত সময় লাগবে? (মধ্যম)

ক 0.326 sec খ 3.26 sec

গ 30.6 sec ঘ 3.06 sec **ঘ**

ব্যাখ্যা: $t = \frac{u}{g} = \frac{30}{9.8} = 3.06s.$

১২৩. একজন ক্রিকেটার একটি বলকে সর্বোচ্চ 100m অনুভূমিক দূরত্বে ছুঁড়তে পারে। একই বলকে ঐ ক্রিকেটার মাটি থেকে উপরের দিকে কত উচ্চতায় ছুঁড়তে পারবে? (কঠিন)

ক 50 m খ 75 m

গ 100 m ঘ 125 m **ক**

১২৪. একটি মিনারের শীর্ষ থেকে 19.6 মি./সে. বেগে খাঁড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একখন্ড পাথর 5 সেকেন্ড সময়ে ভূমিতে পতিত হলে, মিনারের উচ্চতা কত? (কঠিন)

ক 18 মি. খ 20.5 মি.

গ 24.5 মি. ঘ 29.5 মি. **গ**

১২৫. h মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের ছাদ থেকে খাড়া উপরের দিকে এক টুকরা পাথর ছোড়া হলে তা 10 সেকেন্ড পর 58 মি./সে. বেগে ভূমিতে আঘাত করলে h এর মান কত? (কঠিন)

ক 95 মি. খ 90 মি.

গ 80 মি. ঘ 70 মি. **খ**

১২৬. টাওয়ারের শীর্ষ হতে পড়ার সময় একটি বস্তু শেষ সেকেন্ডে মোট উচ্চতার অর্ধেক দূরত্ব অতিক্রম করলে, টাওয়ারের উচ্চতা কত? (কঠিন)

ক 37.1 খ 57.1

গ 47.1 ঘ 49 **খ**

ব্যাখ্যা: মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা = h

শেষ (t তম) সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= 0 + \frac{1}{2} \times g(2t-1) = \frac{1}{2}g(2t-1)$

প্রশ্নমতে, $\frac{h}{2} = \frac{1}{2}g(2t-1)$

বা, $h = g(2t-1)$

বা, $\frac{1}{2}gt^2 = g(2t-1)$

[∵ স্থির অবস্থা থেকে পড়ন্ত বস্তুর t

বা, $t^2 = 4t - 2$ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $h = \frac{1}{2}gt$]

∴ $t = 3.4142s$

∴ $h = \frac{1}{2}gt^2 = 57.1$ m

১২৭. একটি বস্তু একটি মিনারের চূড়া থেকে u বেগে খাড়া নিম্নদিকে ছোড়া হলে তা 4u বেগে ভূমিতে পতিত হলো। বস্তুটির পতন কাল কত? (মধ্যম)

ক $\frac{u}{g}$ খ $\frac{2u}{g}$

গ $\frac{3u}{g}$ ঘ কোনোটিই নয় **গ**

ব্যাখ্যা: $t = \frac{v-u}{g} = \frac{4u-u}{g} = \frac{3u}{g}$

১২৮. একটি বস্তুকণা খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুকণাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P তে পৌছতে t সময় লাগে এবং আরও t_1 সময়ে তা ভূমিতে পতিত হয়। বস্তুটির সর্বাধিক উচ্চতা কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{2}g(t+t_1)^2$ খ $\frac{1}{2}g(t^2+t_1^2)$

গ $\frac{1}{8}g(t^2+t_1^2)$ ঘ $\frac{1}{8}g(t+t_1)^2$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $T = t + t_1 = \frac{2u}{g}$ বা, $u = \frac{g(t+t_1)}{2}$

$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{g^2(t+t_1)^2}{4 \times 2g} = \frac{g(t+t_1)^2}{8}$

১২৯. একটি বালক একটি বল খাড়া 60m উর্ধ্বে নিক্ষেপ করতে পারে বলটির বিচরণ কাল কত? (মধ্যম)

ক 6.99s খ 7.99s

গ 8.99s ঘ 10s **ক**

১৩০. স্থিতাবস্থায় ভূপৃষ্ঠ 4 মি./সে.^{2} সমত্বরণে উর্ধ্বগামী একটি লিফট 8 সেকেন্ডে উঠার মুহূর্তে একটি বস্তু নিচে ফেলা হলে কত সময়ে তা ভূ-পৃষ্ঠে পড়বে? (মধ্যম)

ক 5 সেকেন্ড খ 4 সেকেন্ড

গ 6 সেকেন্ড ঘ 7 সেকেন্ড

[বি:দ্র: অপশনে সঠিক উত্তর নেই]

✍ ব্যাখ্যা: $f = 4m/s^2$

$\therefore v = 0 + ft = 4 \times 8 = 32$ m/s

$\therefore h = \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 8^2 = 128m$

$h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $128 = -32t + \frac{1}{2} \times 9.8t^2$

বা, $4.9t^2 - 32t - 128 = 0$

$\therefore t = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \times 4.9 \times (-128)}}{2 \times 4.9} = 9.53s$

১৩১. 24m উঁচু একটি টাওয়ার থেকে একটি বলকে ফেলা হলো। একই সময় অপর একটি বল $8ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বল দুইটি কতক্ষণ পর মিলিত হবে? (কঠিন)

(ক) 1s (খ) 2s

(গ) 3s (ঘ) 4s **গ**

✍ ব্যাখ্যা: মনে করি, t সময় পর মিলিত হবে।

$t = \frac{h}{u} = \frac{24}{8} = 3s$

১৩২. একটি টাওয়ার চূড়া থেকে খাড়া নিচের দিকে v বেগে একটি ফুটবলকে নিক্ষেপ করা হলো। এটি ভূমিকে 4v বেগে স্পর্শ করে। বলটির ভূমি স্পর্শ করতে প্রয়োজনীয় সময়? (কঠিন)

(ক) $\frac{v}{g}$ (খ) $\frac{2v}{g}$

(গ) $\frac{3v}{g}$ (ঘ) $\frac{4v}{g}$ **গ**

✍ ব্যাখ্যা: শেষ বেগ = 4v, আদিবেগ = v

$\therefore 4v = v + gt$ [খাড়া নিচের দিক ধনাত্মক ধরে]

$\therefore t = \frac{3v}{g}$

১৩৩. $9.8ms^{-1}$ বেগে একটি বল 50m উচ্চতা থেকে খাড়া নিচে নিক্ষিপ্ত হয়। বলটি ভূমিকে স্পর্শ করতে সময়? (মধ্যম)

(ক) 2 sec (খ) 3.34 sec

(গ) 2.34 sec (ঘ) 3.5 sec **গ**

✍ ব্যাখ্যা: বলটি ভূমিকে স্পর্শ করতে প্রয়োজনীয় সময় t হলে, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $50 = 9.8 \times t + \frac{1}{2} \times 9.8t^2$

বা, $4.9t^2 + 9.8t - 50 = 0$

$\therefore t = 2.34s$

১৩৪. একটি বস্তুকণা খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হলে উত্থান বেগ পতন বেগের কি রূপ হবে? (সহজ)

(ক) সমান (খ) দ্বিগুণ

(গ) অর্ধেক (ঘ) তিনগুণ **ক**

১৩৫. 64 মিটার উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর ছেড়ে দিলে ভূমিতে পড়তে কত সময় লাগবে? (কঠিন)

(ক) 2.3 (খ) 2.6

(গ) 3.6 (ঘ) 4.2 **গ**

✍ ব্যাখ্যা: $h = ut + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 64 = 0 \times t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{64 \times 2}{9.8}} \Rightarrow t = 3.6$ সেকেন্ড

১৩৬. অবাধে পড়ন্ত কোন বস্তু 4th সেকেন্ডে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে? (মধ্যম)

(ক) 50.2 (খ) 44.3

(গ) 39.2 (ঘ) 34.3 **ঘ**

✍ ব্যাখ্যা: দূরত্ব, $h = \frac{1}{2}g(2t - 1)$

$= \frac{1}{2} \times 9.8 (2 \times 4 - 1) = 34.3$ মিটার

১৩৭. 10 মিটার/সে. বেগে উর্ধ্বগামী কোন বেলুন হতে পতিত এক টুকরা পাথর 10 সে. পরে মাটিতে পড়ল। যখন পাথরের টুকরা মাটিতে পতিত হয়, তখন বেলুনের উচ্চতা কত? (মধ্যম)

(ক) 49 m (খ) 98 m

(গ) 490 m (ঘ) 980 m **গ**

✍ ব্যাখ্যা: $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $h + ut = \frac{1}{2}gt^2$

$= \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2 = 490$ m

১৩৮. ভূমি থেকে 19.6 m/sec বেগে এক টুকরা পাথর খাড়া উপরে নিক্ষেপ করলে তা কত সময়ে ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসবে? (কঠিন)

(ক) 2 sec (খ) 3 sec

(গ) 4 sec (ঘ) 5 sec **গ**

✍ ব্যাখ্যা: $T = \frac{2u}{g} = \frac{2 \times 19.6}{9.8} = 4s$

১৩৯. একটি বস্তু 64 ft/sec বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করার 1 সে. পরে অপর একটি বস্তু একই স্থান থেকে একই দিকে u বেগে নিক্ষেপ করা হলে তা প্রথম বস্তুটির বৃহত্তম উচ্চতায় মিলিত হয়। u এর মান —— (মধ্যম)

(ক) 70 ft/sec (খ) 80 ft/sec

(গ) 85 ft/sec (ঘ) 90 ft/sec **খ**

✍ ব্যাখ্যা: $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(64)^2}{2 \times 32} = 64ft$

উত্থানকাল, $t_1 = \frac{64}{32} = 2s$

$\therefore$ ২য় বস্তু 1s এ 64 ft উপরে ওঠে

দ্বিতীয় বস্তুর ক্ষেত্রে, $64 = ut - \frac{1}{2}gt^2$

u = 80 ft/s

১৪০. একটি পাথর খন্ড 27.72 মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে 19.6 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করার পর শেষ বেগ কত মিটার/সেকেন্ড হবে? (কঠিন)

ক 9.8 খ 19.6
গ 27.2 ঘ 39.6 **খ**

ব্যাখ্যা: $v^2 = u^2 - 2gh$
$\Rightarrow v^2 = (27.72)^2 - 2 \times 9.8 \times 19.6$
$\Rightarrow v = \sqrt{384.24} = 19.6$ মি./সে.

১৪১. কুয়ার মুখ থেকে একখন্ড পাথর এর তলদেশে পৌঁছতে 3 সেকেন্ড সময় লাগলে, তলদেশ থেকে কুয়ার মুখের উচ্চতা কত মিটার? (মধ্যম)

ক 52.2 খ 49.6
গ 45.4 ঘ 44.1 **ঘ**

১৪২. একটি পাথরকে 50 মিটার গভীর একটি কুয়ার মধ্যে ফেলা হলো। শব্দের বেগ 327 মি./সে. হলে পাথর পড়ার শব্দ কত সময় পরে শোনা যাবে? (মধ্যম)

ক 5.71 খ 4.33
গ 3.88 ঘ 3.35 **ঘ**

ব্যাখ্যা: সময়, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{9.8}} + \frac{50}{327}$
$= 3.35$ সেকেন্ড

১৪৩. একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি পাথরের টুকরা ছেড়ে দেয়ার পর তা 19.6 মি/সে. বেগে কূপের তলদেশে পতিত হয়। পাথর খণ্ডটি ছেড়ে দেওয়ার $2\frac{2}{35}$ সেকেন্ড পরে পতনের শব্দ শোনা গেলে শব্দের বেগ কত মিটার/সেকেন্ড হবে? (কঠিন)

ক 343 খ 350
গ 360 ঘ 400 **ক**

১৪৪. উর্ধ্বমুখে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তু বিচরণ পথের —
i. সর্বোচ্চ বিন্দুতে একবার অবস্থান করে
ii. সকল বিন্দুতে দুইবার অবস্থান করে
iii. মধ্যবিন্দুতে দুইবার অবস্থান করে
নিচের কোনটি সঠিক?

ক i খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

১৪৫. 50m উপর হতে একটি বস্তু ছেড়ে দেওয়া হলে বস্তুটির —
i. ভূমিতে পৌছানোর প্রাক্কালে বেগ 31.3 ms^{-1}
ii. ভূমিতে পড়তে 3.19s সময় লাগবে
iii. ভূমির কাছাকাছি আসতে বেগ ক্রমান্বয়ে বাড়বে
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১৪৬. একটি প্রস্তরখন্ডকে 30 ms^{-1} বেগে খাড়াভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো এবং g = 10 ms^{-2} হলে এটি —
i. সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে 3s সময় লাগবে
ii. সর্বোচ্চ 45 m উচ্চতায় উঠবে
iii. সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠে মুহূর্তকালের জন্য স্থির থাকবে
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১৪৭. 150 m উচু হতে একটি পাথর ভূমিতে পতিত হয়। তাহলে —
i. ভূমি স্পর্শ করার মুহূর্তে এর বেগ হবে 54.2 ms^{-1}
ii. ভূমিতে পৌছতে এর 5.53s সময় লাগে
iii. ভূমি স্পর্শ করার মুহূর্তে এর বেগ সর্বনিম্ন হবে
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

নিচের অনুচ্ছেদটি পড় এবং (১৪৮ ও ১৪৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একই সময়ে h উচ্চতা হতে একটি বস্তু ছেড়ে দেওয়া হলো এবং ভূমি থেকে u বেগে একটি বস্তু একই সরলরেখায় খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো —

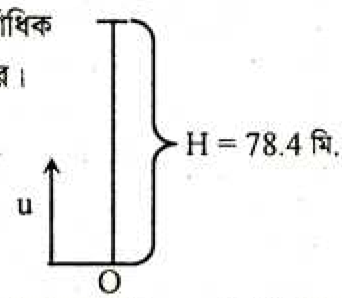
১৪৮. বস্তু দুইটি একই সময়ে ভূমিতে পতিত হলে উচ্চতা কত? (মধ্যম)

ক $h = \frac{2u}{g}$ খ $h = \frac{2u^2}{g}$
গ $h = \frac{u^2}{2g}$ ঘ $h = \frac{u}{g}$ **খ**

১৪৯. যদি নিক্ষিপ্ত বস্তুটির সর্বোচ্চ উচ্চতা h হয় তবে—
i. $h = \frac{u^2}{2g}$
ii. কণা দুইটি $\sqrt{\frac{h}{2g}}$ সময় পর পরস্পর মিলিত হবে
iii. কণা দুইটি $\frac{h}{4}$ উচ্চতায় পরস্পর মিলিত হবে
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

পার্শ্বের চিত্রের সর্বাধিক উচ্চতা 78.4 মিটার।



উপরের তথ্যের আলোকে (১৫০ - ১৫১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৫০. বস্তু কণাটি কত বেগে নিক্ষিপ্ত হয়েছিল? (মধ্যম)

ক 29.4 মি./সে. খ 36.2 মি./সে.
গ 39.2 মি./সে. ঘ 18.6 মি./সে. **গ**

১৫১. বস্তু কণাটি নিক্ষিপ্ত বিন্দুতে ফিরে আসতে এর মোট কত সময় লেগেছিল? (মধ্যম)

ক 8 সে. খ 4 সে.
গ 2 সে. ঘ 3 সে. **ক**

একটি শূন্য কূপের মধ্যে একখণ্ড পাথরের টুকরা ছেড়ে দেয়ার পর তা 19.6 মিটার/সে বেগে কূপের তলদেশে পতিত হয়। উপরের তথ্য থেকে (১৫২ ও ১৫৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

১৫২. কূপের গভীরতা কত মিটার? (মধ্যম)

ক 10 খ 15.5
গ 16.5 ঘ 19.6 **ঘ**

ব্যাখ্যা: কূপের গভীরতা h হলে $v^2 = u^2 + 2gh$ সূত্র হতে $(19.6)^2 = 2 \times 9.8 \times h$

$\Rightarrow h = 19.6$ মিটার

১৫৩. কত সেকেন্ড পর পাথর খণ্ডটি কূপের তলদেশে পতিত হবে? (মধ্যম)

ক 2 খ 3
গ 4 ঘ 5 **ক**

ব্যাখ্যা: মনে করি, কূপের তলদেশে পাথর খণ্ডটি পতিত হওয়ার সময় t তাহলে $v = u + gt$ সূত্র হতে

$19.6 = 0 + 9.8 \times t \Rightarrow = 2$ সেকেন্ড

নিচের তথ্যের আলোকে (১৫৪-১৫৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

ভূমি হতে 39.6 মি./সে. আদিবেগে একটি বস্তু খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত করা হলো।

১৫৪. 2 সেকেন্ড পরে বেগ কত মি./সে. হবে? (মধ্যম)

ক 10 খ 20
গ 25 ঘ 26 **খ**

ব্যাখ্যা: বেগ, $v = u - gt = 39.6 - 9.8 \times 2$
$= 20$ মি./সে.

১৫৫. 1 সেকেন্ড পরে বস্তুটি কত মিটার উচ্চতায় থাকবে? (কঠিন)

ক 34.7 খ 32.5
গ 19.6 ঘ 9.8 **ক**

ব্যাখ্যা: উচ্চতা, $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$= 39.6 \times 1 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 1^2 = 34.7$ মিটার

★ বায়ুশূন্য অবস্থায় উলম্ব তলে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার গতিপথ, নির্দিষ্ট সময়ে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার অবস্থান ও বেগ

১৫৬. নির্দিষ্ট সময়ে প্রক্ষিপ্ত কোন বস্তুকণার উল্লম্ব সরণ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $y = u\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

খ $y = \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

গ $y = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$

ঘ $y = t - \frac{1}{2}gt^2$ **গ**

১৫৭. প্রক্ষেপকের গতি কি ধরনের? (সহজ)

ক ত্রিমাত্রিক খ দ্বিমাত্রিক
গ সরলরৈখিক ঘ উল্লম্ব গতি **খ**

১৫৮. একটি বস্তুকে 29.4 মিটার/সেকেন্ড আদিবেগে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক কত মিটার উচ্চতায় উঠবে? (কঠিন)

ক 10 খ 11
গ 12 ঘ 15 **খ**

১৫৯. একটি ক্রিকেট বলকে 40 মিটার/সেকেন্ড বেগে ভূমি হতে 60° কোণে ব্যাট দ্বারা আঘাত করলে ক্রিকেট বলটির বিচরণ কাল কত সেকেন্ড হবে? (কঠিন)

ক 5 খ 6
গ 7 ঘ 8 **গ**

ব্যাখ্যা: $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 40}{9.8}\sin 60°$

$= 8.16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$ সেকেন্ড

১৬০. 30 মিটার/সেকেন্ড বেগে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের পাল্লা 60 মিটার হলে নিক্ষেপণ কোণ কত হবে? (মধ্যম)

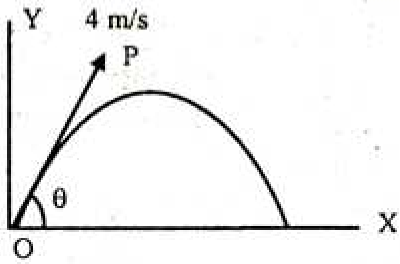
ক 20.39° খ 25°
গ 30° ঘ 32.35° **ক**

ব্যাখ্যা: $60 = \frac{(30)^2}{9.8} \times \sin 2\alpha \Rightarrow \alpha = 20.39°$

১৬১. সর্বাধিক আনুভূমিক পাল্লার ক্ষেত্রে প্রক্ষেপ কোণ কত ডিগ্রি হবে? (সহজ)

ক 30° খ 45°
গ 60° ঘ 90° **খ**

১৬২. উদ্দীপক থেকে নিক্ষেপণ কোণ θ = কত ডিগ্রী? যখন আনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক উচ্চতার সমান। (মধ্যম)



ⓚ 30° ⓛ 45°
ⓖ 76° ⓘ 90° **গ**

১৬৩. একটি কণা v বেগে নিক্ষিপ্ত হলে, তার আনুভূমিক পাল্লা এর সর্বোচ্চ উচ্চতার 4 গুণ। প্রক্ষেপণ কোণের মান কত? (কঠিন)

ক 30° খ 45°
গ 60° ঘ 80° **খ**

১৬৪. একই আদিবেগে নিক্ষিপ্ত দুইটি প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা সমান। একটির নিক্ষেপণ কোণ 25° হলে অন্যটির নিক্ষেপণ কোণ কত? (মধ্যম)

ক 45° খ 55°
গ 65° ঘ 70° **গ**

ব্যাখ্যা: একই আদিবেগে নিক্ষিপ্ত দুইটি প্রক্ষেপকের অনুভূমিক পাল্লা সমান। একটি কোণ α হলে অপরটি 90 – α।
এখানে, একটি কোণ 25°।
∴ অন্যটি (90 – 25)° = 65°

১৬৫. 19.6 ms^{-1} বেগে এবং আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হল। এর আনুভূমিক পাল্লা কত? (মধ্যম)

ক 1.73 m খ 19.6 m
গ 16.98 m ঘ 33.95 m **ঘ**

ব্যাখ্যা: আনুভূমিক পাল্লা
$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(19.6)^2 \sin 60°}{9.8}$$
$$= \frac{384.16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{9.8} = \frac{192.08 \times 1.732}{9.8}$$
$= 33.95m$

১৬৬. আনুভূমিক তলের পাল্লা সর্বোচ্চ পাল্লার অর্ধেক হলে প্রক্ষিপ্ত কোণ কত? (মধ্যম)

ক 45° খ 35°
গ 20° ঘ 15° **ঘ**

ব্যাখ্যা: অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ ... ... (1)

এবং সর্বাধিক পাল্লা $R_{max} = \frac{u^2}{g}$ ... .. (2)

অনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক পাল্লার অর্ধেক হলে $R = \frac{u^2}{g}/2$

∴ $R = \frac{u^2}{2g}$ ... ... (3)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2}{2g}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 30° \Rightarrow 2\alpha = 30°$

∴ $\alpha = 15°$

১৬৭. যদি কোনো বস্তুর আনুভূমিক দূরত্ব R অতিক্রম করতে Tsec সময় লাগে তবে আনুভূমিকের সাথে নিক্ষেপ কোণ কত? (সহজ)

ক $\tan^{-1}\left(\frac{g}{R^2}\right)$ খ $\tan^{-1}\left(\frac{gT}{R^2}\right)$
গ $\tan^{-1}\left(\frac{T^2}{R^2}\right)$ ঘ $\tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$ **ঘ**

১৬৮. α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর কখন সর্বাধিক উচ্চতা ও আনুভূমিক পাল্লা সমান হবে? (কঠিন)

ক sinα = 3 খ tanα = 4
গ tanα = 2 ঘ sinα = 4 **খ**

ব্যাখ্যা: $\tan\alpha = \frac{4H}{R}$

১৬৯. অনুভূমির সাথে 30° কোণে এবং 39.2 মি./সে. বেগে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু কতক্ষণ পর তার আদি নিক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে? (কঠিন)

ক 7 সেকেন্ড খ 8 সেকেন্ড
গ 6 সেকেন্ড ঘ 10 সেকেন্ড **খ**

ব্যাখ্যা: $t = \frac{u}{g \sin\alpha} = \frac{39.2}{9.8 \times \frac{1}{2}}$

∴ t = 8s

১৭০. একটি কণা 78.4 মিটার উচু কোনো স্থান থেকে অনুভূমিকভাবে প্রক্ষেপ করা হলে t সেকেন্ড পরে তা ভূমিতে পতিত হয়। t এর মান কত? (মধ্যম)

ক 4 সেকেন্ড খ 8 সেকেন্ড
গ 6 সেকেন্ড ঘ 9 সেকেন্ড **ক**

১৭১. 32 ফুট/সেকেন্ড আদিবেগ এবং 30° কোণে বস্তু নিক্ষেপ করা হলে আনুভূমিক পাল্লা কত ফুট হবে? (মধ্যম)

ক 16 খ $21\sqrt{3}$
গ 32 ঘ $16\sqrt{3}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$= \frac{32^2 \times \sin 60°}{32}$

$= 32 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 16\sqrt{3}$ ফুট।

১৭২. একটি রাইফেলের পাল্লা 1000 মিটার। চন্দ্রের মধ্যাকর্ষণ শক্তি পৃথিবীর মধ্যাকর্ষণ শক্তির $\frac{1}{6}$ হলে চন্দ্র পৃষ্ঠে রাইফেলের পাল্লা কত মিটার হবে? (মধ্যম)

ক 4000 খ 5000
গ 5500 ঘ 6000 **ঘ**

ব্যাখ্যা: মনে করি, রাইফেলের গুলির নিক্ষেপণ বেগ = u মি./সে. এবং নিক্ষেপন কোণ = α

$R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$ সূত্র হতে, $\frac{R_m}{R_e} = \frac{g_e}{g_m}$

বা, $R_m = 1000 \times \frac{1}{\frac{1}{6}}$

$\therefore R_m = 6000$ m

১৭৩. 9.8 ft/s বেগে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তু সর্বাধিক কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? (মধ্যম)

ক 1.5 ft খ 3 ft
গ 4.9 ft ঘ 9.8 ft **খ**

ব্যাখ্যা: $R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$

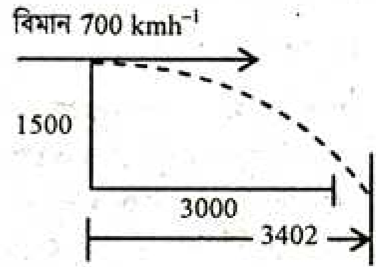
$= \frac{(9.8)^2}{32} \sin (2 \times 45°)$

$= 3.001$ ft

১৭৪. একটি মার্কিন যুদ্ধ বিমান 700 km/h বেগে আনুভূমিকভাবে যাওয়ার সময় একটি শত্রু ঘাটিকে লক্ষ্য করে বোমা ছেড়ে দিল। বিমানটি ভূমি থেকে 1500 m উপরে ছিল। যেই মুহূর্তে বোমা ছাড়ছিল শত্রু ঘাটি এর থেকে 3000 m দূরে থাকলে বোমটি ঘাটির উপর পড়বে কি? (সহজ)

ক হ্যাঁ
খ না
গ বলা সম্ভব না
ঘ ঘাটি থেকে অনেক আগেই বোমা বিস্ফোরিত হবে **খ**

ব্যাখ্যা:



এখন, $1500 = \frac{1}{2} gt^2$

$\therefore t = 17.496$s

$\therefore$ আনুভূমিক দূরত্ব $x = ut$

$= 3402$m

$\therefore$ বোমাটি ঘাটি থেকে $(3402 - 3000) = 402$ m দূরে গিয়ে ভূমিতে পড়বে।

১৭৫. আনুভূমিক পাল্লা ও বৃহত্তম পাল্লা যদি যথাক্রমে R ও D হয়, তাহলে এদের মাঝে সম্পর্ক নিচের কোনটি? (মধ্যম)

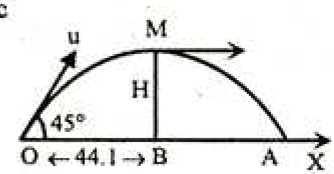
ক $R = D \sin\alpha$ খ $R = D \sin 2\alpha$
গ $D = R \sin 2\alpha$ ঘ $D = R\sin\alpha$ **খ**

ব্যাখ্যা: $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$, $D = \frac{u^2}{g}$

$\therefore R = D \sin 2\alpha$

১৭৬. পাশের চিত্রে নিক্ষেপণ বেগ u এর মান কত? (মধ্যম)

যখন g = 9.8 m/sec



ক 20m/sec
খ 22 m/sec
গ 25.4 m/sec
ঘ 29.4 m/sec **ঘ**

১৭৭. একটি বস্তু ভূমির সাথে 60° কোণে 20 মি./সে. বেগে নিক্ষেপ করা হলো। সর্বোচ্চ উচ্চতায় এর আনুভূমিক বেগ কত? (মধ্যম)

ক 20 m/s খ 10 m/s
গ 0 m/s ঘ $10\sqrt{3}$ m/s **খ**

১৭৮. ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক 30 মিটার দূরে 15m উচ্চতা বিশিষ্ট একটি দেওয়াল স্পর্শ করে আনুভূমিকভাবে চলে যায়। প্রক্ষেপকের প্রক্ষেপণ বেগ কত? (কঠিন)

ক $\sqrt{544}\text{ms}^{-1}$ খ $\sqrt{488}\text{ms}^{-1}$
গ $\sqrt{588}\text{ms}^{-1}$ ঘ $\sqrt{111}\text{ms}^{-1}$ **গ**

১৭৯. প্রক্ষেপকের ভ্রমণকাল T, আনুভূমিক পাল্লা R এবং প্রক্ষেপ কোণ α হলে $\frac{T^2}{R}$ এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

ⓚ $\frac{2}{g}\tan\alpha$ ⓛ $\frac{2}{g}\cot\alpha$

ⓖ $\frac{g}{2}\tan\alpha$ ⓘ $\frac{g}{2}\cot\alpha$ **ক**

ব্যাখ্যা: $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$, $R = \frac{u^2 2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$

$\therefore \frac{T^2}{R} = \frac{4u^2\sin^2\alpha/g^2}{\frac{u^2 2\sin\alpha\cos\alpha}{g}} = \frac{2}{g}\tan\alpha$

১৮০. একটি টাওয়ারের চূড়া থেকে 16 ফুট/সেকেন্ড বেগে আনুভূমিকভাবে একখন্ড পাথর নিক্ষেপ করা হলে তা এর পাদদেশ থেকে 80 ফুট দূরে ভূমিতে পড়ে। টাওয়ারের উচ্চতা কত? [$g = 32$ ft/sec^2] (কঠিন)

ⓚ 250 ফুট ⓛ 300 ফুট

ⓖ 350 ফুট ⓘ 400 ফুট **ঘ**

ব্যাখ্যা: $x = ut$

বা, $80 = 16 \times t$

$\therefore t = 5$

$h = \frac{1}{2} \times 32 \times 5^2 = 400$ ফুট

১৮১. একজন ক্রিকেটার ব্যাটের আঘাতে একটি বলকে সর্বাধিক 100 m আনুভূমিক দূরত্বে নিক্ষেপ করতে পারে। সে একই বেগে ও একই কোণে ভূমি থেকে বলটি সর্বাধিক কত উঁচুতে নিক্ষেপ করতে পারবে? (কঠিন)

ⓚ 25 ⓛ 75

ⓖ 80 ⓘ 100 **ক**

ব্যাখ্যা: $R_{max} = \frac{u^2}{g}$

বা, $100 = \frac{u^2}{g}$

বা, $u^2 = 100 \times g$

$H = \frac{u^2 \times \sin^2 45°}{2g} = \frac{100g \times \frac{1}{2}}{2g} = 25$ m

১৮২. একটি প্রাসের সর্বাধিক আনুভূমিক পাল্লা 200 মিটার। প্রাসটির সর্বাধিক উচ্চতা কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ 5 m ⓛ 50 m

ⓖ 75 m ⓘ 100 m **ঘ**

ব্যাখ্যা: $R_{max} = 200$

বা, $\frac{u^2}{g} = 200$

বা, $u^2 = 200g$

$H_{max} = \frac{u^2}{2g} = \frac{200g}{2g} = 100$m

১৮৩. শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর খন্ডের সর্বাধিক পাল্লার মান 80 ft. এই নিক্ষেপ কোণের জন্য ইহার সর্বাধিক উচ্চতা কত? (মধ্যম)

ⓚ 20.5 ft ⓛ 40.5 ft

ⓖ 40 ft ⓘ 20 ft **গ**

১৮৪. চারটি বল একই বেগে ভূমি থেকে একই সাথে 20°, 30°, 40°, 60° বিভিন্ন নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষেপ করা হলো। কোন বলটি সবার আগে ভূমিতে ফিরে আসবে? (কঠিন)

ⓚ 20° কোণে নিক্ষিপ্ত বল

ⓛ 30° কোণে নিক্ষিপ্ত বল

ⓖ 40 কোণে নিক্ষিপ্ত বল

ⓘ 60 কোণে নিক্ষিপ্ত বল **ক**

১৮৫. একটি বস্তু 19.6 m/s বেগে এবং 30° কোণে নিক্ষেপ করার এক সেকেন্ড পরে এর বেগের উল্লম্ব উপাংশ কত হবে। (মধ্যম)

ⓚ 0 ⓛ 8.8

ⓖ 9.8 ⓘ 19.6 **ক**

ব্যাখ্যা: $V_y = u\sin\alpha - gt = 19.6\sin30° - 9.8 \times 1 = 0$

১৮৬. একজন ব্যক্তি একটি পাথরকে তির্যকভাবে নিক্ষেপ করে ভূমি বরাবর সর্বোচ্চ 80 মিটার দূরে পাঠাতে পারে, একই বেগে খাড়া ওপরে নিক্ষেপ করলে পাথরের সর্বোচ্চ উচ্চতা কত মিটার হবে? (মধ্যম)

ⓚ 20 ⓛ 40

ⓖ 80 ⓘ 160 **ঘ**

১৮৭. যদি a ও b ধ্রুবক হয় তাহলে $y = ax^2 + bx$ কিসের সমীকরণ নির্দেশ করে? (সহজ)

ⓚ উপবৃত্ত ⓛ সরলরেখা

ⓖ পরাবৃত্ত ⓘ অধিবৃত্ত **গ**

১৮৮. একটি উচ্চ স্তম্ভ হতে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 128 মি./সে. আদিবেগে একটি বস্তু নিক্ষিপ্ত হলে 14 সেকেন্ড পরে বস্তুটি স্তম্ভ হতে কত মিটার দূরে আঘাত করবে? (মধ্যম)

ⓚ 1450.51 ⓛ 1551.92

ⓖ 1575.11 ⓘ 1650.85 **খ**

১৮৯. একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ থেকে ভূমি বরাবর 147 মিটার দূরত্বে কোন বিন্দু থেকে একটি বস্তু 49 মি./সে. বেগে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে ছোড়া হলো। বস্তুটি যে দেয়ালে আঘাত করবে তার উচ্চতা কত মিটার? (কঠিন)

ⓚ 75.03 ⓚ 78.21
ⓖ 150.10 ⓖ 165.02 **খ**

ব্যাখ্যা: $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

$= 147 \times \tan60° - \frac{9.8 \times (147)^2}{2 \times (49)^2 \times \cos^2 60°}$

= 78.21 মিটার

১৯০. একটি উচ্চ টাওয়ারের শীর্ষ হতে 21 মি./সে. একটি বল আনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করার ফলে এটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 84 মিটার দূরে ভূমিতে কত সময় পরে আঘাত করবে? (সহজ)

ক 6 খ 4
গ 3 ঘ 2 **খ**

ব্যাখ্যা: $x = u\cos\alpha.t$

$\Rightarrow t = \frac{84}{21 \times \cos0°} = 4$ সেকেন্ড

১৯১. 44.1m উঁচু একটি স্তম্ভ হতে একটি বস্তু 7m/sec বেগে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হলে, তা কত সময়ে ভূমিতে পড়বে? (কঠিন)

ক 2 sec খ 3 sec
গ 4 sec ঘ 4.5 sec **খ**

ব্যাখ্যা: $44.1 = -u\sin\alpha \times t + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $44.1 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$ [$\alpha = 0$]

$\therefore t = 3s$

১৯২. আনুভূমিকের সাথে কত ডিগ্রি কোণে একটি বস্তু শূন্যে নিক্ষেপ করলে এর আনুভূমিক পাল্লা, সর্বোচ্চ উচ্চতার 3 গুণ হবে? (মধ্যম)

ক 45° খ 50°
গ 53° ঘ 60° **গ**

১৯৩. ভূমিতে পতিত একটি বোমা ফাটালে তার কণাগুলো u গতিবেগে বিভিন্ন দিকে ছুটতে থাকে। ভূমির সর্বোচ্চ যে অংশ নিয়ে কণাগুলি ছড়িয়ে পড়বে তার ক্ষেত্রফল কোনটি? (কঠিন)

ক $\frac{\pi u^4}{g^2}$ খ $\frac{\pi u^2}{g^2}$
গ $\frac{\pi u^2}{g}$ ঘ $\frac{\pi u^4}{g}$ **ক**

১৯৪. একটি পাথর খণ্ডকে 30° কোণে 19.62 মিটার/সেকেন্ড বেগে নিক্ষেপ করা হলো। পাথর খণ্ডটির—

i. বৃহত্তম উচ্চতা = 4.9 মিটার
ii. মোট বিচরণকাল = 3 সেকেন্ড
iii. অনুভূমিক পাল্লা = 34.02 মিটার (প্রায়)

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১৯৫ ও ১৯৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একজন বৈমানিক 4900 মিটার উপর দিয়ে 35 মি./সে. বেগে উড়ে যাবার সময় একটি বোমা ফেলে দিল।

১৯৫. কত সময় পরে বোমাটি ভূমিতে পড়বে? (কঠিন)

ক 31.62 সেকেন্ড খ 29.60 সেকেন্ড
গ 19.06 সেকেন্ড ঘ 9.80 সেকেন্ড **ক**

ব্যাখ্যা: $h = u\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 4900 = 35\sin0° \times t + \frac{1}{2} \times 9.8t^2$

$\Rightarrow 4900 = 0 + 4.9t^2 \Rightarrow t = 31.62$ সেকেন্ড

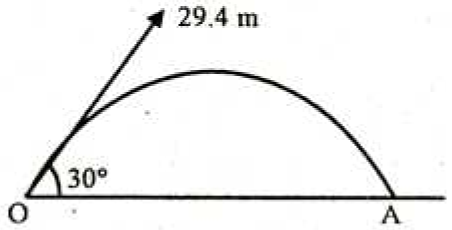
১৯৬. বোমাটি যে বস্তুতে আঘাত করবে, তার আনুভূমিক দূরত্ব কত? (মধ্যম)

ক 798.08 মিটার খ 1002.32 মিটার
গ 1106.70 মিটার ঘ 1906.60 মিটার **গ**

ব্যাখ্যা: $x = u\cos\alpha \times t = 35 \times \cos0° \times 31.62$

= 1106.70 মিটার

নিচের তথ্যের আলোকে (১৯৭–১৯৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



১৯৭. প্রক্ষেপকটির বিচরণকাল কত? (মধ্যম)

ক 2 খ 3
গ 4 ঘ 4.5 **খ**

ব্যাখ্যা: $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 29.4 \times \sin30°}{9.8} = 3$ sec

১৯৮. O এবং A এর মধ্যবর্তী দূরত্ব? (মধ্যম)

ক 74 খ 76.38

গ 78 ঘ 78.4 **খ**

ব্যাখ্যা: $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(29.4)^2 \times \sin(2 \times 30°)}{9.8}$

$= 76.38 m$

নিচের তথ্যের আলোকে আলোকে (১৯৯ ও ২০০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা 79.53 m এবং বিচরণকাল 5.3 সেকেন্ড।

১৯৯. প্রক্ষেপকটি কত সময়ে সর্বাধিক উচ্চতায় উঠবে? (মধ্যম)

ক 1.65 সেকেন্ড খ 2.65 সেকেন্ড

গ 3.65 সেকেন্ড ঘ 4.65 সেকেন্ড **খ**

ব্যাখ্যা: এখানে, বিচরণকাল $T = 2t = 5.3$

$\therefore t = \frac{5.3}{2} = 2.65$ সেকেন্ড

সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে সময় লাগে 2.65 সেকেন্ডে।

২০০. প্রক্ষেপকটির —

i. নিক্ষেপণ বেগ $30\ ms^{-1}$

ii. নিক্ষেপণ কোণ 60°

iii. সর্বোচ্চ উচ্চতা 34.44 m

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\frac{T^2}{R} = \frac{2}{g}\tan\alpha$

বা, $\tan\alpha = \frac{9.8 \times 5.3^2}{2 \times 79.53}$

$\therefore \alpha = 60°$

আবার, $T = \frac{2u \sin 60°}{9.8} = 5.3$

$\therefore u = 30$ m/s এবং $H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{g} = 34.44$ m

নিচের তথ্যের আলোকে (২০১–২০২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একজন খেলোয়াড় 2 মিটার উচ্চতায় ভূমির সাথে 30° কোণে 20 মি/সে বেগে একটি ক্রিকেট বল ছুঁড়ে মারলে অপর একজন খেলোয়াড় 1 মিটার উঁচুতে ধরে ফেলে।

২০১. ক্রিকেট বল অতিক্রান্ত উল্লম্ব দূরত্ব কত মিটার? (সহজ)

ক 4 খ 3

গ 2 ঘ 1 **ঘ**

ব্যাখ্যা: দূরত্ব = 2 − 1 = 1 মিটার

২০২. খেলোয়াড়টি বলটি কত সময় পরে ধরবে? (কঠিন)

ক 5.13 খ 3.12

গ 2.14 ঘ 1.73 **গ**

ব্যাখ্যা: $y = -u\sin\alpha.t + \frac{1}{2}gt^2$

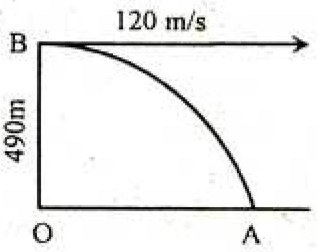
$\Rightarrow 1 = -20 \sin 30° \times t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

$\Rightarrow 4.9t^2 - 10t - 1 = 0$

$\therefore t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 4.9(-1)}}{2 \times 4.9}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $t = 2.14$ সেকেন্ড

উদ্দীপকটি পড়ে নিচের (২০৩ ও ২০৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



একটি বোমারু বিমান ভূমি হতে 490m উচ্চতায় ভূমির সমান্তরালে 120 m/s বেগে একটি বোমা ফেলে দিল। ভূ-পৃষ্ঠের উপর A একটি বিন্দু।

২০৩. বোমাটি কত সময়ে A বিন্দুতে আঘাত করবে? (মধ্যম)

ক 2 sec খ 3.5 sec

গ 5 sec ঘ 10 sec **ঘ**

ব্যাখ্যা: $490 = \frac{1}{2}gt^2$

বা, $t^2 = 100$

$\therefore t = 10s$

২০৪. O এবং A এর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? (মধ্যম)

ক 400 m খ 490 m

গ 900 m ঘ 1200 m **ঘ**

ব্যাখ্যা: $OA = 120 \times 10 = 1200$ m

অধ্যায়-১০: বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা

প্রশ্ন ▶ ১ $S = \{1, 2, 3, ..., 50\}$ [ঢা. বো. ১৭]

ক. তিনটি মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর। ২

খ. S এর যে কোনো একটি সংখ্যা 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। ৪

গ. S এর জোড় সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক তিনটি মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র নিম্নরূপ :

S		দুইটি মুদ্রা			
		HH	HT	TH	TT
একটি মুদ্রা	H	HHH	HHT	HTH	HTT
	T	THH	THT	TTH	TTT

$\therefore S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $S = \{1, 2, 3, ..., 50\}$

মনে করি, সংখ্যাটির 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা = P(A)

এখন, 1 থেকে 50 পর্যন্ত মোট সংখ্যা = 50টি

এখানে, 1 থেকে 50 এর মধ্যে 3 এর গুণিতক = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48 = 16টি

এবং 1 থেকে 50 এর মধ্যে 5 এর গুণিতক = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 = 10টি

আবার, 3 এর গুণিতক ও 5 এর সাধারণ গুণিতক = 15, 30, 45 = 3টি

সুতরাং সংখ্যাটি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা, P(A)

= P(সংখ্যাটি 3 এর গুণিতক) + P(সংখ্যাটি 5 এর গুণিতক) – P(সংখ্যাটি 3 ও 5 এর সাধারণ গুণিতক)

$= \frac{^{16}C_1}{^{50}C_1} + \frac{^{10}C_1}{^{50}C_1} - \frac{^{3}C_1}{^{50}C_1}$

$= \frac{16}{50} + \frac{10}{50} - \frac{3}{50} = \frac{16 + 10 - 3}{50} = \frac{23}{50}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $S = \{1, 2, 3, ..., 50\}$

মনে করি, S এর জোড় সংখ্যাগুলির চলক,

$x_i = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50$

এখানে, মোট সদস্য, n = 25

$\therefore \Sigma x_i = 2 + 4 + 6 + ... + 50$

$= 2(1 + 2 + 3 + ... + 25)$

$= 2.\frac{25(25+1)}{2} = 25.26 = 650$

আবার, $\Sigma x_i^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 50^2$

$= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 25^2)$

$= 4 . \frac{25(25+1)(2.25+1)}{6}$

$= \frac{4.25.26.51}{6} = 22100$

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$

$= \frac{22100}{25} - \left(\frac{650}{25}\right)^2$

$= 884 - 676 = 208$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২ দৃশ্যকল্প-১: তুলি ও পলির এককভাবে একটি অংক সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$। [রা. বো. ১৭]

দৃশ্যকল্প-২: কোন কোম্পানীর দশজন শ্রমিকের দৈনিক আয় যথাক্রমে:

210, 220, 225, 230, 235, 238, 240, 242, 245, 248।

ক. একটি ব্যাগে 4টি সাদা ও 5টি কালো বল রয়েছে। নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল তোলা হল। তিনটি বলই কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। ২

খ. পলি ও তুলির একত্রে অংকটি সমাধান করার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে ভেদাংক ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ব্যাগে 4টি সাদা ও 5টি কালো বল রয়েছে। মোট বল রয়েছে 9টি। নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল তোলা হলে তিনটি বলই কালো হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{42}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, তুলির অঙ্কটি সমাধান করতে পারার ঘটনা = A

এবং পলির অঙ্কটি সমাধান করতে পারার ঘটনা = B

সুতরাং, $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$

তারা একত্রে অঙ্কটির সমাধান করার চেষ্টা করলে সমাধান করার সম্ভাবনা—

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

[যেহেতু A ও B স্বাধীন ঘটনা সুতরাং $P(A \cap B) = P(A).P(B)$]

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{4 + 3 - 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

গ আমরা জানি, পরিমিত ব্যবধান,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\Sigma x_i\right)^2}$$

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের গণনা তালিকা :

আয় (x_i)	x_i^2
210	44100
220	48400
225	50625
230	52900
235	55225
238	56644
240	57600
242	58564
245	60025
248	61504
$\Sigma x_i = 2333$	$\Sigma x_i^2 = 545587$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{10} \times 545587 - \left(\frac{2333}{10}\right)^2}$

$= \sqrt{54558.7 - 54428.89}$

$= \sqrt{129.81} = 11.39$ (প্রায়)

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক $= \sigma^2 = (11.39)^2 = 129.81$ (প্রায়)

প্রশ্ন ▶ ৩ [দি. বো. ১৭]

নম্বর	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
শিক্ষার্থী	10	20	15	10	5

ক. প্রদত্ত সারণির জন্য পরিসর কত? ২

খ. উদ্দীপকে বর্ণিত তথ্যাদির সারণি থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে গড় ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উচ্চসীমা = 100, নিম্নসীমা = 51

$\therefore$ পরিসর, R = 100 – 51 = 49 **(Ans.)**

খ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের তালিকা:

শ্রেণী সীমা	মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	f_ix_i	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$, a=75.5, c=10	f_id_i	$f_id_i^2$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
51-60	55.5	10	555	-2	-20	40	16.66	166.7
61-70	65.5	20	1310	-1	-20	20	6.66	133.3
71-80	75.5	15	1132.5	0	0	0	3.33	49.95
81-90	85.5	10	855	1	10	10	13.33	133.4
91-100	95.5	5	477.5	2	10	20	23.33	116.65
মোট		N=60	$\Sigma f_ix_i = 4330$		$\Sigma f_id_i = -20$	$\Sigma f_id_i^2 = 90$		$\Sigma f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 600$

পরিমিতি ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\left[\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left\{\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right\}^2\right]} \times c^2$

$= \sqrt{\left[\frac{90}{60} - \left(\frac{-20}{60}\right)^2\right]} \times 10^2 = \sqrt{138.89} = 11.785$ **(Ans.)**

গ গড় ব্যবধান নির্ণয়ের তালিকা:

শ্রেণী সীমা	মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	$f_i x_i$	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$ a=75.5 c=10	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
51-60	55.5	10	555	-2	-20	40	16.66	166.7
61-70	65.5	20	1310	-1	-20	20	6.66	133.3
71-80	75.5	15	1132.5	0	0	0	3.33	49.95
81-90	85.5	10	855	1	10	10	13.33	133.4
91-100	95.5	5	477.5	2	10	20	23.33	116.65
মোট		N=60	$\Sigma f_i x_i = 4330$		$\Sigma f_i d_i = -20$	$\Sigma f_i d_i^2 = 90$		$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert = 600$

$\therefore$ গড় ব্যবধান, $MD = \frac{\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert}{N} = \frac{600}{60} = 10$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ উপাত্ত: /কু. বো. ১৭/

রং এর নাম	বলের সংখ্যা
সাদা	3
কালো	6
লাল	7
সবুজ	5
হলুদ	4
বেগুনি	9
নীল	8

ক. দুইটি নির্ভরশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুণন সূত্রটি প্রতিপাদন কর। ২

খ. উদ্দীপকের বলগুলি একটি বাক্সে থাকলে এবং বাক্সটি থেকে 3 টি করে বল দৈবভাবে উত্তোলন করা হলে, তিনটি বলই লাল অথবা সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত সাতটি সংখ্যার ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **বর্ণনা:** দুইটি অধীন ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা তাদের যেকোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এবং অপরটির শর্তাধীন সম্ভাবনার গুণফলের সমান। প্রতীকের সাহায্যে A ও B দুইটি অধীন ঘটনা হলে,

$P(A \cap B) = P(A).\ P(B|A)$ অথবা, $P(A \cap B) = P(B).\ P(A|B)$

অর্থাৎ, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো দৈব পরীক্ষা E এর ঘটন জগত S. পরীক্ষাটির সাথে সংশ্লিষ্ট দুইটি ঘটনা A ও B। ধরি, S, A, B এবং $A \cap B$ এর উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে n(S), n(A), n(B) এবং $n(A \cap B)$, তাহলে A ও B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা যথাক্রমে $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ও $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$

A ঘটনা ঘটেছে এমন শর্তে B ঘটার সম্ভাবনা

$P(B|A) = \frac{(A \cap B) \text{ এর উপাদান সংখ্যা}}{A \text{ এর উপাদান সংখ্যা}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

সুতরাং, A এবং B ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতা

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \times \frac{n(A)}{n(S)} = P(B|A) \times P(A)$

খ উদ্দীপকে মোট বলের সংখ্যা = 3 + 6 + 7 + 5 + 4 + 9 + 8 = 42

তিনটি বলই লাল অথবা সবুজ হবার সম্ভাবনা

$= \frac{^7C_3}{^{42}C_3} + \frac{^5C_3}{^{42}C_3} = \frac{35}{11480} + \frac{10}{11480} = \frac{45}{11480} = \frac{9}{2296}$ **(Ans.)**

গ

বলের সংখ্যা, x_i	x_i^2
3	9
6	36
7	49
5	25
4	16
9	81
8	64
$\Sigma x_i = 42$	$\Sigma x_i^2 = 280$

ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 = \frac{280}{7} - \left(\frac{42}{7}\right)^2$

$= 40 - 6^2 = 40 - 36 = 4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫ দৃশ্যকল্প-১ : /চ. বো. ১৭/

দ্বাদশ শ্রেণির 55 জন ছাত্রের গণিতের নম্বরের একটি ডাটা নিম্নে দেওয়া হল :

নম্বর	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
ছাত্র সংখ্যা	7	18	15	10	5

দৃশ্যকল্প-২:

একটি ব্যাগে 9টি লাল ও 7টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে 6টি বল তোলা হলো।

ক. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{4}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A \cap B)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে 3টি বল লাল ও 3টি বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{3}$ এবং $P(B) = \frac{3}{4}$

এখানে, A ও B স্বাধীন।

সুতরাং $P(A \cap B) = P(A).\ P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

সুতরাং $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4+9-3}{12} = \frac{13-3}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

খ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের ছক :

নম্বর	ছাত্র সংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{10}$	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
51-60	7	55.5	– 2	– 14	28
61-70	18	65.5	– 1	– 18	18
71-80	15	75.5 = a	0	0	0
81-90	10	85.5	1	10	10
91-100	5	95.5	2	10	20
	$\Sigma f_i = N = 55$			$\Sigma f_i u_i = -12$	$\Sigma f_i u_i^2 = 76$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান $= c\sqrt{\frac{\Sigma f_i u_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{N}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{76}{55} - \left(\frac{-12}{55}\right)^2}$

$= 10\sqrt{1.3818 - 0.0476}$

$= 10\sqrt{1.3342} = 10 \times 1.155$

$= 11.55$ (প্রায়) **(Ans.)**

গ ব্যাগে মোট বল আছে (9 + 7)টি = 16টি

16টি থেকে 6টি বল $^{16}C_6$ প্রকারে তোলা যায়।

সুতরাং 3টি বল লাল ও 3টি বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা

= P(3টি লাল বল ও 3টি সাদা বল)

$= \frac{^9C_3 \times {^7C_3}}{^{16}C_6} = \frac{84 \times 35}{8008} = \frac{105}{286}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $S_1 = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 20\}$ /সি. বো. ১৭/

$S_2 = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

ক. একটি ছক্কা নিরপেক্ষভাবে নিক্ষেপ করা হলে 2 বা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? ২

খ. S_1 এবং S_2 হতে একটি করে সংখ্যা দৈবভাবে বাছাই করা হলে S_1 হতে মৌলিক সংখ্যা এবং S_2 হতে 3 এর গুণিতক সংখ্যা পাবার সম্ভাব্যতা কত? ৪

গ. S_1 এর উপাদানগুলির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা নিরপেক্ষভাবে নিক্ষেপ করলে 1, 2, 3, 4, 5, 6 এর যেকোনো একটি সংখ্যা পাওয়া যায়।

এখানে, 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 2, 4, 6

3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 3, 6

2 ও 3 উভয় দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 6

2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার সেট A হলে ও 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার সেট B হলে,

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

তাহলে, 2 বা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $S_1 = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 20\}$

$S_2 = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

S_1 সেটের মোট সংখ্যা 7টি এবং মৌলিক সংখ্যা 3টি

S_2 সেটের মোট সংখ্যা 7টি এবং 3 এর গুণিতক 3টি

$\therefore$ S_1 হতে মৌলিক সংখ্যা এবং S_2 হতে 3 এর গুণিতক সংখ্যা পাবার সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

গ $S_1 = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 20\}$

প্রদত্ত সংখ্যাগুলির গড়, $\bar{x} = \frac{1+3+4+5+7+9+20}{7} = \frac{49}{7} = 7$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{1}{7}\{(1-7)^2 + (3-7)^2 + (4-7)^2 + (5-7)^2 + (7-7)^2 + (9-7)^2 + (20-7)^2\}}$

$= \sqrt{\frac{1}{7}(36 + 16 + 9 + 4 + 0 + 4 + 169)}$

$= \sqrt{\frac{238}{7}} = \sqrt{34} = 5.831$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ দৃশ্যকল্প-১ : /ব. বো. ১৭/

শ্রেণি ব্যাপ্তি	10-16	17-22	23-28	29-34	35-40	41-46	47-52
গণসংখ্যা	5	4	10	12	8	4	7

দৃশ্যকল্প-২ : একটি কলেজের একাদশ শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 30 জন ফুটবল খেলে, 40 জন ক্রিকেট খেলে এবং 20 জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করা হল।

ক. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ এবং A ও B স্বাধীন ঘটনা হলে $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে যদি ছেলেটি ক্রিকেট খেলে তবে তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা কত? ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু A ও B স্বাধীন ঘটনা

$\therefore P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10}$

$= \frac{5+6-3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত সংখ্যা
10-16	5	5
17-22	4	9
23-28	10	19
29-34	12	31
35-40	8	39
41-46	4	43
47-52	7	50

এখন $Q_1 = \frac{1 \times 50}{4}$ তম সংখ্যা = 12.5 তম সংখ্যা [$\because N = 50$]

যা 23-28 শ্রেণিতে

$Q_1 = L_1 + \frac{C}{f_1}\left(\frac{i \times N}{4} - F_C\right)$

$\therefore Q_1 = 23 + \frac{6}{10}(12.5 - 9) = 25.1$

এবং $Q_3 = \frac{3 \times 50}{4}$ তম সংখ্যা = 37.5 তম সংখ্যা

বা 35-40 শ্রেণিতে।

$\therefore Q_3 = 35 + \frac{6}{8}(37.5 - 31) = 39.875$

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{39.875 - 25.1}{2} = 7.3875$ **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,

একজন ছাত্র দৈবভাবে নির্বাচন করা হলে,

ফুটবল খেলে এরূপ ছাত্রের সম্ভাবনা $P(F) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

ক্রিকেট খেলে এরূপ ছাত্রের সম্ভাবনা $P(C) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

ফুটবল ও ক্রিকেট উভয়ই খেলে এরূপ সম্ভাবনা

$P(P \cap C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ ছাত্রটি যদি ক্রিকেট খেলে তবে তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা $P(F \mid C)$

$= \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ দৃশ্যকল্প-১: একটি ছক্কা এবং দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল।

দৃশ্যকল্প-২: নিম্নে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেওয়া হল: /ব. বো. ১৭/

শ্রেণি ব্যবধান	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
গণসংখ্যা	5	8	14	12	9	6

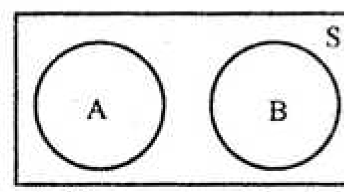
ক. বর্জনশীল এবং অবর্জনশীল ঘটনার সংজ্ঞা দাও। ২

খ. নমুনাক্ষেত্রের সাহায্যে ২টি হেড ও বিজোড় সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা বের কর। ৪

গ. নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **বর্জনশীল ঘটনা (Mutually Exclusive Events):** দুইটি ঘটনা তখনই বর্জনশীল হয় যখন তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ নমুনা বিন্দু থাকে না। দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি পরস্পর এরূপে সম্পর্কিত থাকে যাতে তাদের যে কোনো দুইটি ঘটনা একই সাথে ঘটা সম্ভব নয় তাহলে উক্ত ঘটনা সমূহকে পরস্পর **বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন ঘটনা** বলে।

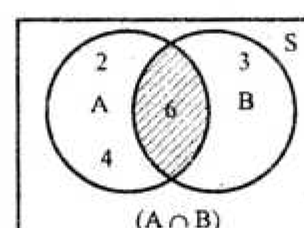


চিত্র: A ও B বর্জনশীল ঘটনা

A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হলে $A \cap B = \varnothing \therefore P(A \cap B) = 0$

উদাহরণ: একজন পরীক্ষার্থীর পাস করার ঘটনা A ও ফেল করার ঘটনা B হলে A ও B ঘটনাদ্বয় পরস্পর বর্জনশীল। একটি মুদ্রা নিক্ষেপে Head এবং Tail পাবার ঘটনাটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা।

অবর্জনশীল ঘটনা (Not mutually Exlusive Events): দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি এরূপে পরস্পর সম্পর্ক যুক্ত হয় যে তাদের মধ্যে যে কোনো দুইটি ঘটনা একত্রে ঘটতে পারে তাহলে এই ঘটনাসমূহকে পরস্পর **অবর্জনশীল ঘটনা** বলে। এরূপ ঘটনাদ্বয়ের মধ্যে অবশ্যই সাধারণ নমুনা বিন্দু থাকবে।



চিত্র: A ও B অবর্জনশীল ঘটনা

52 খানা তাসের প্যাকেট হতে দৈবভাবে একখানা তাস টানলে তাসখানা ইস্কাবন হওয়ার ঘটনাকে A এবং টেক্কা হওয়ার ঘটনাকে B ধরলে A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা।

খ দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপভাবে দেখানো যেতে পারে:

দুটি মুদ্রার নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দু	একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্রের নমুনাবিন্দু 1	2	3	4	5	6
HH	(HH1)	(HH2)	(HH3)	(HH4)	(HH5)	(HH6)
HT	(HT1)	(HT2)	(HT3)	(HT4)	(HT5)	(HT6)
TH	(TH1)	(TH2)	(TH3)	(TH4)	(TH5)	(TH6)
TT	(TT1)	(TT2)	(TT3)	(TT4)	(TT5)	(TT6)

নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, n(S) = 24

ধরি, A দুইটি হেড ও বিজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা

A ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র : {HH1, HH3, HH5}

$\therefore$ A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(A) = 3

অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

গ নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করতে নিম্নলিখিত ছকটি তৈরি করা হলো:

শ্রেণি ব্যবধান	মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	$u_i = \frac{x_i - a}{c}$ a=22, c=5	f_iu_i	$f_iu_i^2$
10-14	12	5	–2	–10	20
15-19	17	8	–1	–8	8
20-24	22	14	0	0	0
25-29	27	12	1	12	12
30-34	32	9	2	18	36
35-39	37	6	3	18	54
	মোট	N = 54		Σf_iu_i=30	$\Sigma f_iu_i^2$ = 130

∴ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_iu_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_iu_i}{N}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{130}{54} - \left(\frac{30}{54}\right)^2} \times 5$

$= \sqrt{2.4074 - 0.3086} \times 5 = \sqrt{2.0988} \times 5$

$= 1.4487 \times 5 = 7.2435$ (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো এবং S = {4, 6, 8, 10, 12, ..., 36}

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

ক. জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. যৌগিক সংখ্যা অথবা 2 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. 'S' এর ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ১টি ছক্কা নিক্ষেপে নমুনাক্ষেত্রটি হবে,

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 6টি

জোড় সংখ্যা পাওয়ার নমুনাক্ষেত্র : {2, 4, 6}

∴ জোড় সংখ্যা পাওয়ার নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 3টি

সুতরাং জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, S = {4, 6, 8, 10, 12, ... 36}

= {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36}

এখানে, মোট সংখ্যা = 17টি অর্থাৎ n(S) = 17

আবার, যৌগিক সংখ্যার সেট, A = {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36}

এবং 2 এর গুণিতক সংখ্যার সেট, B = {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36}

এখন, যৌগিক বা 2 এর গুণিতক হওয়ায় সংখ্যাগুলির সেট,

$A \cup B$ = {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36}

∴ $n(A \cup B) = 17$

∴ সংখ্যাটি যৌগিক বা 2 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা, $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{17}{17} = 1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, S = {4, 6, 8, 10, 12, ..., 36}

= {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36}

ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের সারণি :

x_i	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	$\sum x_i$ = 340
x_i^2	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484	576	676	784	900	1024	1156	1296	$\sum x_i^2$ = 8432

এখানে, n = 17

∴ ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$

$= \frac{8432}{17} - \left(\frac{340}{17}\right)^2 = 496 - 400 = 96$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০ তিনটি থলে আছে। প্রথম থলেতে 5টি সাদা এবং 4টি লাল বল, দ্বিতীয় থলেতে 4টি সাদা এবং 6টি লাল বল এবং তৃতীয় থলেতে 5টি সাদা, 6টি লাল এবং 7টি কালো বল আছে।

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]

ক. অনির্ভরশীল ঘটনা উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. যদি তৃতীয় ব্যাগ হতে পরপর তিনটি বল নেয়া হয়, তবে বলগুলি লাল অথবা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? ৪

গ. যদি প্রথম ও দ্বিতীয় থলে হতে একটি থলে এবং থলে হতে একটি বল নেয়া হল। বলটি লাল হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **অনির্ভরশীল ঘটনা:** কোনো পরীক্ষায় প্রাপ্ত একাধিক ঘটনার যে কোনো একটির ঘটা বা না ঘটা যদি ইতোপূর্বে অন্য ঘটনা বা ঘটনাগুলির ঘটা বা না ঘটার উপর নির্ভর না করে তবে তাদেরকে পরস্পর স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা বলে।

অন্যভাবে বলা যায়, যদি দুইটি ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা উহাদের পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান হয় তবে তাদেরকে স্বাধীন ঘটনা বলে। অর্থাৎ দুইটি ঘটনা A ও B কে স্বাধীন ঘটনা বলা যাবে যদি $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ হয়।

খ দেওয়া আছে, তৃতীয় থলেতে মোট বল সংখ্যা = 5 + 6 + 7 = 18টি

যার মধ্যে লাল বল 6টি ও সাদা বল 5টি

∴ লাল ও সাদা বল সংখ্যার সমষ্টি = (6 + 5) টি = 11টি

∴ তৃতীয় ব্যাগ হতে পরস্পর তিনটি বল তুলে নিলে বলগুলি লাল অথবা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{11}{18} \times \frac{10}{17} \times \frac{9}{16} = \frac{990}{4896} = \frac{55}{272}$ **(Ans.)**

গ এখানে, প্রথম থলেতে 5টি সাদা ও 4টি লাল বল আছে

এবং দ্বিতীয় থলেতে 4টি সাদা ও 6টি লাল বল আছে।

∴ দুটি থলে হতে একটি থলে পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$

প্রথম থলের জন্য, বলটি লাল হবার সম্ভাবনা $= \frac{4}{9}$

এবং দ্বিতীয় থলের জন্য, বলটি লাল হবার সম্ভাবনা $= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

∴ দুইটি থলে হতে একটি থলে এবং একটি থলে একটি বল নেয়া হলে বলটি লাল হবার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} + \frac{3}{5}\right) = \frac{47}{90}$

প্রশ্ন ▶ ১১ একটি নিরপেক্ষ ছক্কা পরপর দুইবার নিক্ষেপ করা হলো।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. উপরের পরীক্ষণের নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। ২

খ. উপরের পরীক্ষণে দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 10 অথবা দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. উপরোক্ত পরীক্ষণে একই সংখ্যাসমূহের সমষ্টির ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা পরপর দুইবার নিক্ষেপ করা হলে, নমুনাক্ষেত্র নিম্নরূপ :

{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} **(Ans.)**

খ 'ক' হতে পাই,

মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 36টি

দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 10 এরূপ নমুনাবিন্দু: {(4, 6), (5, 5), (6, 4)}

∴ দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 10 এরূপ নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 3টি

আবার, দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 5 দ্বারা বিভাজ্য এরূপ নমুনাবিন্দু = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)}

∴ দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 5 দ্বারা বিভাজ্য এরূপ নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 7টি

এখন, দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 10 এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য এরূপ নমুনাবিন্দু = {(4, 6), (5, 5), (6, 4)}

∴ দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 10 এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 3টি।

∴ দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 10 অথবা দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{36} + \frac{7}{36} - \frac{3}{36} = \frac{7}{36}$ **(Ans.)**

গ 'ক' হতে পাই,

একই সংখ্যাসমূহের নমুনাবিন্দু :

{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

সুতরাং একই সংখ্যাসমূহের সমষ্টি যথাক্রমে 2, 4, 6, 8, 10, 12

মনে করি, x_i = 2, 4, 6, 8, 10, 12

এখানে, মোট সদস্য, n = 6

∴ $\sum x_i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$

এবং $\sum x_i^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2$

$= 4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144 = 364$

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 = \frac{364}{6} - \left(\frac{42}{6}\right)^2$

$= 60.67 - 49 = 11.67$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১২ $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ *[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]*

ক. একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। ২

খ. S এর বিজোড় সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর। ৪

গ. S এর যে কোন একটি সংখ্যা 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপে দেখানো যেতে পারে,

একটি মুদ্রার নমুনাক্ষেত্র	একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্র					
	1	2	3	4	5	6
H	H1	H2	H3	H4	H5	H6
T	T1	T2	T3	T4	T5	T6

∴ নমুনাক্ষেত্র $S = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$

নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = 12$

খ দেওয়া আছে, $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$

1 হতে 100 পর্যন্ত সংখ্যাগুলির মধ্যে জোড় সংখ্যা আছে 50টি এবং বিজোড় সংখ্যা আছে 50টি।

মনে করি, S এর বিজোড় সংখ্যাগুলোর চলক x_i।

মোট সদস্য, $n = 50$

$\therefore \sum x_i = 1 + 3 + 5 + ... + 99$

$= 50^2$ [∵ প্রথম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি n^2]

$= 2500$

বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি = সকল সংখ্যার উপর সমষ্টি – জোড় সংখ্যাগুলির বর্গের সমষ্টি

$\therefore \sum x_i^2 = \sum S_i^2 - \sum E_i^2$, যেখানে, E_i = জোড় সংখ্যা

এখন, $\sum S_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$

$= \frac{100\,(100 + 1)\,(2 \times 100 + 1)}{6}$

$= 338350$

এবং $\sum E_i^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 100^2$

$= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 50^2)$

$= 4 \cdot \frac{50(50 + 1)\,(2 \times 50 + 1)}{6}$

$= 4 \cdot \frac{50 \times 51 \times 101}{6} = 171700$

$\therefore \sum x_i^2 = \sum S_i^2 - \sum E_i^2 = 338350 - 171700 = 166650$

আমরা জানি,

ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 = \frac{166650}{50} - \left(\frac{2500}{50}\right)^2$

$= 3333 - 2500 = 833$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$

মনে করি, সংখ্যাটির 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা = P(A)

সংখ্যাটির 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা = P(3) এবং

সংখ্যাটির 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা = P(5) এবং

সংখ্যাটির 3 ও 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা = $P(3 \cap 5)$

1 হতে 100 পর্যন্ত মোট সংখ্যা = 100টি

3 এর গুণিতক সংখ্যা = $\frac{100}{3}$ টি ≈ 33টি

5 এর গুণিতক সংখ্যা = $\frac{100}{5}$ টি = 20টি

3 ও 5 এর ল.সা.গু = 3 × 5 = 15

∴ 3 ও 5 এর গুণিতক সংখ্যা = $\frac{100}{15}$ টি ≈ 6 টি

$\therefore P(A) = P(3) + P(5) - P(3 \cap 5)$

$= \frac{33}{100} + \frac{20}{100} - \frac{6}{100} = \frac{33 + 20 - 6}{100} = \frac{47}{100}$ **(Ans.)**

$= \frac{1}{2}\left(\frac{20 + 27}{45}\right) = \frac{47}{90}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৩ $A = \{x_i : -3 < x_i \leq 3$ এবং $x_i \in Z\}$ *[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]*

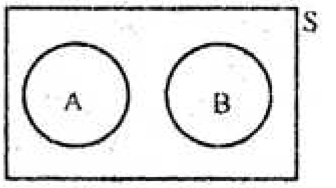
ক. দুইটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার সম্ভাবনার যোগসূত্র প্রতিষ্ঠা কর। ২

খ. প্রদত্ত উপাত্ত সেটের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. সেট A থেকে একটি সংখ্যা দৈবভাবে নির্বাচন করা হলে তা Z এবং N এর উপাদান হওয়ার সম্ভাবনা কত? ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুইটি বর্জনশীল ঘটনার যেকোনো একটি ঘটার সম্ভাবনা, এদের প্রত্যেকটি পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান। অর্থাৎ A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা হলে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



চিত্র: $A \cap B = \varnothing$

প্রমাণ: ধরি, S সসীম নমুনাক্ষেত্রে, A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা যেখানে,

নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n(S)

A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = n(A)

এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = n(B)

সুতরাং, A ঘটনার সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ এবং B ঘটনার সম্ভাবনা, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$

এখন, A ও B বর্জনশীল হওয়ায়, $A \cap B = \varnothing$; অর্থাৎ এদের মধ্যে কোনো সাধারণ নমুনাবিন্দু নেই।

∴ $(A \cup B)$ এর অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা হবে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

কাজেই, $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)}$

বা, $P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

খ দেওয়া আছে,

$A = \{x_i : -3 < x_i \leq 3$ এবং $x_i \in \mathbb{Z}\}$

$\therefore A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

A সেটের উপাদানগুলো হলো –2, –1, 0, 1, 2, 3

∴ গড়, $\bar{x} = \frac{-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

আবার, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$

$= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 19$

∴ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2\right) - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{19}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{19}{6} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{38 - 3}{12}}$

$= \sqrt{\frac{35}{12}} = 1.71$ **(Ans.)**

গ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

A সেটের উপাদান –2, –1, 0, 1,2, 3 অর্থাৎ 6টি।

আমরা জানি, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$

এবং $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

সুতরাং A সেটের সকল উপাদান $\mathbb{Z}$ এর উপাদান এবং 1, 2 ও 3 অর্থাৎ 3টি উপাদান $\mathbb{N}$ এর উপাদান।

এখন, A সেট থেকে দৈবভাবে একটি সংখ্যা নির্বাচন করলে তা $\mathbb{Z}$ ও $\mathbb{N}$ এর উপাদান হওয়ার সম্ভাবনা = P($\mathbb{Z}$ এর উপাদান) + P($\mathbb{N}$ এর উপাদান) – P($\mathbb{Z}$ ও $\mathbb{N}$ এর উপাদান)

$= \frac{6}{6} + \frac{3}{6} - \frac{3}{6} = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৪ দৃশ্যকল্প-১:

শ্রেণি	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
গণসংখ্যা	1	7	10	12	20	10	5

দৃশ্যকল্প-২: একজন শিক্ষার্থীর বাংলায় ফেল করার সম্ভাবনা $\frac{1}{5}$, বাংলা ও ইংরেজি দুটিতেই পাশের সম্ভাবনা $\frac{3}{4}$ এবং দুইটির যে কোন একটিতে পাশের সম্ভাবনা $\frac{7}{8}$।

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

ক. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ হলে $P\left(\frac{A}{B}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রদত্ত সারণি হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. শুধু ইংরেজিতে পাশ করার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

এখন, আমরা জানি, অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

বা, $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{8}$

$= \frac{12 + 16 - 15}{24} = \frac{13}{24}$

শর্তাধীন সম্ভাবনা হতে পাই, $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{13}{24}}{\frac{2}{3}} = \frac{13}{24} \times \frac{3}{2} = \frac{13}{16}$ **(Ans.)**

খ

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা f_i	ধাপ বিচ্যুতি $d = \frac{x_i - A}{C}$, $A \to 65, c = 10$	গণসংখ্যা × ধাপ বিচ্যুতি $f_i d_i$	$f_i d_i^2$
30-40	35	1	− 3	− 3	9
40-50	45	7	− 2	− 14	28
50-60	55	10	− 1	− 10	10
60-70	65	12	0	0	0
70-80	75	20	1	20	20
80-90	85	10	2	20	40
90-100	95	5	3	15	45
		N = 65		$\sum f_i d_i = 28$	$\sum f_i d_i^2 = 152$

∴ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2} \times C$

$= \sqrt{\frac{152}{65} - \left(\frac{28}{65}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{2.3385 - (0.4308)^2} \times 10$

$= \sqrt{2.3385 - 0.1856} \times 10$

$= \sqrt{2.1529} \times 10 = 14.673$ **(Ans.)**

গ মনে করি, বাংলায় পাসের ঘটনা = A

এবং ইংরেজিতে পাসের ঘটনা = B

তাহলে, $P(A) = 1 - \frac{1}{5}$ [পূরক সূত্রানুযায়ী]

$= \frac{4}{5}$

P (বাংলা অথবা ইংরেজি) = $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$

P (বাংলা এবং ইংরেজি) = $P(A \cap B) = \frac{3}{4}$

এখন সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

বা, $\frac{7}{8} = \frac{4}{5} + P(B) - \frac{3}{4}$

বা, $P(B) = \frac{7}{8} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} = \frac{35 + 30 - 32}{40}$

∴ $P(B) = \frac{33}{40}$

অর্থাৎ, ইংরেজিতে পাসের সম্ভাব্যতা $= \frac{33}{40}$

∴ কেবলমাত্র ইংরেজিতে পাসের সম্ভাবনা

= (ইংরেজিতে পাসের সম্ভাবনা) – (বাংলা ও ইংরেজি দুইটিতে পাসের সম্ভাবনা)

$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{33}{40} - \frac{3}{4} = \frac{3}{40}$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৫ দ্বাদশ শ্রেণির 60 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি নিম্নে প্রদত্ত হলো :

প্রাপ্ত নম্বর	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
ছাত্রসংখ্যা	10	20	15	10	5

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]

ক. যদি $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ এবং $P(A/B) = \frac{1}{8}$ হয়, তবে $P(B/A)$ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রদত্ত উপাত্ত থেকে প্রাপ্ত নম্বরের গড় ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপক থেকে প্রাপ্ত নম্বরের ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ এবং $P(A/B) = \frac{1}{8}$

আমরা জানি, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

∴ $P(A \cap B) = P(A/B) . P(B) = \frac{1}{8} . \frac{2}{5} = \frac{1}{20}$

∴ $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{20} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{5}$ **(Ans.)**

খ

শ্রেণিসীমা	ছাত্র সংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
50-59	10	54.5	545	16.67	166.7
60-69	20	64.5	1290	6.67	133.3
70-79	15	74.5	1117.5	3.33	49.95
80-89	10	84.5	845	13.33	133.4
90-99	5	94.5	472.5	23.33	116.65
	N = 60		$\sum f_i x_i = 4270$		$\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 600$

গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{4270}{60} = 71.17$

∴ গড় ব্যবধান $= \frac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N} = \frac{600}{60} = 10$ **(Ans.)**

গ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের গণনা তালিকা :

নম্বর	ছাত্র সংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
50-59	10	54.5	545	29702.5
60-69	20	64.5	1290	83205
70-79	15	74.5	1117.5	83253.75
80-89	10	84.5	845	71402.5
90-99	5	94.5	472.5	44651.25
	N = 60		$\sum f_i x_i = 4270$	$\sum f_i x_i^2 = 312215$

ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum f_i x_i\right)^2$

$= \frac{1}{60} \times 312215 - \left(\frac{4270}{60}\right)^2$

$= 5203.58 - 5064.69 = 138.89$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৬ দৃশ্যকল্প-১:

শ্রেণিব্যাপ্তি	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
গণসংখ্যা	18	30	46	28	20	12	12	6

দৃশ্যকল্প-২: একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে অবাধে পড়ন্ত এক খন্ড পাথর a-মিটার দূরত্বে পৌছালে টাওয়ারের শীর্ষবিন্দুর b-মিটার নিচে কোনো বিন্দু থেকে আর এক খন্ড পাথর নিচে ফেলা হল। পাথরদ্বয় স্থির অবস্থা থেকে একই সাথে মাটিতে পড়ল। *[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. একটি বাক্সে 7টি লাল ও 14টি সাদা বল আছে। একটি বালক যেমন খুশি তুললে প্রতিবারে দুইটি একই রংয়ের বল পাওয়ারা সম্ভাব্যতা কত? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে দেখাও যে, টাওয়ারের উচ্চতা $\frac{(a + b)^2}{4a}$ । ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক লাল বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{^7C_2}{^{21}C_2} = \frac{1}{10}$

সাদা বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{^{14}C_2}{^{21}C_2} = \frac{13}{30}$

∴ একই রংয়ের বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{10} + \frac{13}{30} = \frac{8}{15}$ **(Ans.)**

খ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণির মধ্যবিন্দু x_i	ছাত্রসংখ্যা f_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
5-10	7.5	18	135	1012.5
10-15	12.5	30	375	4687.5
15-20	17.5	46	805	14087.5
20-25	22.5	28	630	14175
25-30	27.5	20	550	15125
30-35	32.5	12	390	12675
35-40	37.5	12	450	16875
40-45	42.5	6	255	10837.5
		N = 172	$\Sigma f_ix_i = 3590$	$\Sigma f_ix_i^2 = 89475$

∴ ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\Sigma f_ix_i^2 - \left(\frac{\Sigma f_ix_i}{N}\right)^2 = \frac{89475}{172} - \left(\frac{3590}{172}\right)^2$

$= 520.20 - 435.64$

$= 84.56$ (প্রায়) **(Ans.)**

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 9.196$ (প্রায়) **(Ans.)**

গ মনে করি, টাওয়ারের চূড়া A বিন্দু থেকে প্রথম পাথর খন্ডটি C বিন্দুতে পৌঁছালে A বিন্দু থেকে b মিটার নিচে অবস্থিত D বিন্দু হতে দ্বিতীয় পাথরখন্ডটি ফেলা হলো।

এখানে AC = a, AD = b, AB = h, DB = h − b

C বিন্দুতে প্রথম পাথর খন্ডটির বেগ v হলে, $v^2 = o + 2ga \Rightarrow v^2 = 2ga$

মনে করি, দ্বিতীয় পাথর খন্ডটি ফেলার t সময় পরে উভয় পাথরের খন্ড একই সাথে ভূমিতে পড়ে।

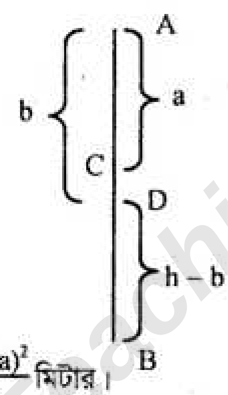
প্রথম পাথর খন্ডটির ক্ষেত্রে, $h - a = vt + \frac{1}{2}gt^2$ ...... (i)

দ্বিতীয় পাথর খন্ডটির ক্ষেত্রে, $h - b = \frac{1}{2}gt^2$ ...... (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে,

$h - a - h + b = vt + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2$ বা, $b - a = vt$ বা, $t = \frac{b-a}{v}$

(ii) নং এ t এর মান বসিয়ে,



$h - b = \frac{1}{2}g\left(\frac{b-a}{v}\right)^2$

বা, $h - b = \frac{1}{2}g\frac{(b-a)^2}{v^2}$

বা, $h - b = \frac{1}{2}g\frac{(b-a)^2}{2ga}$ $[\because v^2 = 2ga]$

বা, $h - b = \frac{(b-a)^2}{4a}$

বা, $h = b + \frac{(b-a)^2}{4a} = \frac{4ab + (b-a)^2}{4a} = \frac{(b+a)^2}{4a}$ মিটার।

অর্থাৎ টাওয়ারের উচ্চতা $h = \frac{(a+b)^2}{4a}$ মিটার। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ উদ্দীপক-১: কিছু সংখ্যক ছাত্রের বিভিন্ন বিষয়ের নম্বর নিচে প্রদত্ত হলো।

নম্বর (x)	30	40	50	60	70	80
ছাত্র সংখ্যা (f)	8	12	20	10	6	4

উদ্দীপক-২: একটি থলিতে 3টি সাদা এবং 2টি কালো বল আছে। অপর একটি থলিতে 2টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলি হতে একটি করে বল তোলা হলো। *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ এবং A, B স্বাধীন ঘটনা হলে $P(A \cap B)$ ও $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দুইটি বলের মধ্যে অন্ততঃ একটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০৬

খ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সারণি :

নম্বর (x)	ছাত্রসংখ্যা (f)	fx	x^2	fx^2
30	8	240	900	7200
40	12	480	1600	19200
50	20	1000	2500	50000
60	10	600	3600	36000
70	6	420	4900	29400
80	4	320	6400	25600
	N = 60	$\Sigma fx = 3060$		$\Sigma fx^2 = 167400$

∴ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{167400}{60} - \left(\frac{3060}{60}\right)^2}$

$= \sqrt{189} = 13.75$ **(Ans.)**

গ ১ম থলিতে মোট বল = 3টি সাদা + 2টি কালো = 5টি বল

২য় থলিতে মোট বল = 2টি সাদা + 5 টি কালো = 7টি বল

১ম থলি হতে দৈবভাবে একটি বল তোলা হলে বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{5}$

∴ বলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা = 1 − বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা

$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$

২য় থলি হতে দৈবভাবে একটি বল তোলা হলে বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{2}{7}$

∴ বলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা = 1 − বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা

$= 1 - \frac{2}{7} = \frac{7-2}{7} = \frac{5}{7}$

∴ প্রত্যেক থলি হতে একটি করে বল তুললে অন্তত একটি বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা = (১ম থলির বল সাদা এবং ২য় থলির বল সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা) + (১ম থলির বল সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা এবং ২য় থলির বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা) + (১ম থলির বল সাদা এবং ২য় থলির বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা)

$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{15}{35} + \frac{4}{35} + \frac{6}{35} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ (i)

প্রাপ্ত নম্বর	15	17	20	25	30	36	44
ছাত্র সংখ্যা	3	5	7	9	8	6	2

(ii) একটি বাক্সে 6টি সাদা, 7টি লাল এবং 9টি কালো বল আছে। *[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. 52টি তাসের এক প্যাকেট তাস হতে একটি তাস উঠানো হল। তাসটি লাল বা টেক্কা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। ২

খ. (i) এর ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান, ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) এর ক্ষেত্রে তিনটি বল দৈবভাবে তোলা হলে কমপক্ষে 2টি কালো বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, লাল হওয়ার ঘটনা R এবং টেক্কা হওয়ার ঘটনা A

তাসে লাল কার্ড $13 \times 2 = 26$টি এবং টেক্কা 4টি যার মধ্যে 2টি লাল

$P(R) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$P(R \cap A) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

∴ $P(R \cup A) = P(R) + P(A) - P(R \cap A)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{13} - \frac{1}{26} = \frac{7}{13}$ **(Ans.)**

খ

নম্বর (x_i)	ছাত্র সংখ্যা (f_i)	f_ix_i	$f_ix_i^2$
15	3	45	675
17	5	85	1445
20	7	140	2800
25	9	225	5625
30	8	240	7200
36	6	216	7776
44	2	88	3872
মোট	N = 40	1039	29393

আমরা জানি, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_ix_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_ix_i}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{29393}{40} - \left(\frac{1039}{40}\right)^2}$

$= 7.75$ **(Ans.)**

ভেদাঙ্ক $= \sigma^2 = (7.75)^2 = 60.06$ **(Ans.)**

গ মোট বল = 6 + 7 + 9 = 22টি

3টি বল থেকে 2টি বল কালো হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{^9C_2 \times {^{13}C_1}}{^{22}C_3} = \frac{117}{385}$

3টি বলই কালো হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{^9C_3}{^{22}C_3} = \frac{3}{55}$

∴ কমপক্ষে একটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{117}{385} + \frac{3}{55} = \frac{138}{385}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৯ X = {7, 8, 9, 11, 12, 14}

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. X থেকে একটি সংখ্যা দৈবভাবে নির্বাচন করলে তা মৌলিক সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা কত? ২

খ. X এর সাথে একটি ছক্কার গুটি নিক্ষেপ করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি করে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 15 হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. সংখ্যাগুলির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করে ফলাফল ব্যাখ্যা কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক X = {7, 8, 9, 11, 12, 14}

এখানে মোট সংখ্যা = 6টি

মৌলিক সংখ্যা = 2টি

∴ X থেকে একটি সংখ্যা দৈবভাবে নির্বাচন করলে তা মৌলিক সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ X = {7, 8, 9, 11, 12, 14}

X এর সাথে একটি ছক্কার গুটি নিক্ষেপ করা হলে নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপ :

{(7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (7, 6),(8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4), (8, 5), (8, 6), (9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4), (9, 5), (9, 6), (11, 1), (11, 2), (11, 3), (11, 4), (11, 5), (11, 6), (12, 1), (12, 2), (12, 3), (12, 4), (12, 5), (12, 6), (14, 1), (14, 2), (14, 3), (14, 4), (14, 5), (14, 6)}

এখানে, মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 36

সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 15 হওয়ার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 4

নমুনাক্ষেত্রে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 15 হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ **(Ans.)**

গ X এর সংখ্যাগুলি নিম্নরূপ : 7, 8, 9, 11, 12, 14

এখানে, n = 6

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের গণনা তালিকা :

x_i	7	8	9	11	12	14	$\sum x_i = 61$
x_i^2	49	64	81	121	144	196	$\sum x_i^2 = 655$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{6} \times 655 - \left(\frac{1}{6} \times 61\right)^2}$

$= \sqrt{109.17 - 103.36} = \sqrt{5.81} = 2.41$

ফলাফল হতে বলা যায় যে, সংখ্যাগুলোর মান এদের গড় মান হতে 2.41 তারতম্যে রয়েছে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২০ একটি পাত্রে ৪টি লাল বল, 6টি কালো বল, 5টি সাদা বল, 4টি হলুদ বল এবং 3টি সবুজ বল আছে।

[ঢাকা সিটি কলেজ, ঢাকা]

ক. দুটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লেখিত পাত্র থেকে দৈবভাবে 3টি বল নেয়া হলে কমপক্ষে 2টি লাল বল পাওয়ার সম্ভাবনা কত? ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত বলের সংখ্যাগুলোর ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপে দেখানো যেতে পারে:

দুটি মুদ্রার নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দু	একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্র					
	1	2	3	4	5	6
HH	(HH1)	(HH2)	(HH3)	(HH4)	(HH5)	(HH6)
HT	(HT1)	(HT2)	(HT3)	(HT4)	(HT5)	(HT6)
TH	(TH1)	(TH2)	(TH3)	(TH4)	(TH5)	(TH6)
TT	(TT1)	(TT2)	(TT3)	(TT4)	(TT5)	(TT6)

অতএব নমুনাক্ষেত্রটি হলো:

S = {HH1, HH2, ..., HH6, HT1, HT2, ..., HT6, TH1, TH2, ..., TH6, TT1, TT2, ... TT6}

খ মোট বল = 8 + 6 + 5 + 4 + 3 = 26টি

লাল বল = ৪টি

অন্য প্রকার বল = 18টি

2টি লাল বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{^8C_2 \times {^{18}C_1}}{^{26}C_3}$

$= \frac{28 \times 18}{2600} = \frac{63}{325}$

3টি লাল বল হওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{^8C_3 \times {^{18}C_0}}{^{26}C_3} = \frac{56 \times 1}{2600} = \frac{7}{325}$

∴ কমপক্ষে 2টি লাল বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{63}{325} + \frac{7}{325}$

$= \frac{70}{325} = \frac{14}{65}$ **(Ans.)**

গ ধরি, সংখ্যার চলক, x_i = 8, 6, 5, 4, 3

মোট সংখ্যা, n = 5

$\sum x_i = 8 + 6 + 5 + 4 + 3 = 26$

$\sum x_i^2 = 8^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 = 150$

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 = \frac{150}{5} - \left(\frac{26}{5}\right)^2$

$= 30 - 27.04 = 2.96$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২১ নিচের কোনটি গণসংখ্যা নিবেশন দেয়া হলো :

মাসিক আয় টাকা (হাজারে)	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34
কর্মচারীর সংখ্যা	15	30	55	17	10	3

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. উপরের তথ্য থেকে গাণিতিক গড় বের কর। ২

খ. উপরের তথ্য গড় ব্যবধান বের কর। ৪

গ. উপরের তথ্য হতে ভেদাঙ্ক বের কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক গাণিতিক গড় নির্ণয়ের প্রয়োজনীয় সারণি:

শ্রেণি	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$, C = 5	$f_i d_i$
5-9	7	15	−2	−30
10-14	12	30	−1	−30
15-19	17 = a	55	0	0
20-24	22	17	1	17
25-29	27	10	2	20
30-34	32	3	3	9
মোট		$N = \sum f_i = 130$		$\sum f_i d_i = -14$

গাণিতিক গড় $\bar{x} = a + c\bar{d}$

$= 17 + 5(-0.108)$

$= 17 - 0.54$

$= 16.46$ **(Ans.)**

a = 17

c = 5

$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{N} = \frac{-14}{130}$

$= -0.108$

খ

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু x_i	$f_i x_i$	গড় $\bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
5-9	15	7	105	$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N}$ $= \frac{2140}{130}$ $= 16.46$	9.46	141.9
10-14	30	12	360		4.46	133.8
15-19	55	17	935		0.54	29.7
20-24	17	22	374		5.54	94.18
25-29	10	27	270		10.54	105.4
30-34	3	32	96		15.54	46.62
	N = 130		$\sum f_i x_i = 2140$			$\sum f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 551.6$

গড় ব্যবধান $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = \frac{551.6}{130} = 4.24$ **(Ans.)**

গ

শ্রেণিব্যাপ্তি	গণসংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
5-9	15	7	105	735
10-14	30	12	360	4320
15-19	55	17	935	15895
20-24	17	22	374	8228
25-29	10	27	270	7290
30-34	3	32	96	3072
মোট	$N = \sum f_i = 130$		$\sum f_i x_i = 2140$	$\sum f_i x_i^2 = 39540$

ভেদাঙ্ক $= \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2$

$= \frac{39540}{130} - \left(\frac{2140}{130}\right)^2 = 33.17$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ দৃশ্যকল্প-১:

শ্রেণিব্যাপ্তি	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
গণসংখ্যা	2	4	6	8	10	9	7	3

দৃশ্যকল্প-২: ক এবং খ একটি সমস্যার সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{5}$ এবং $\frac{2}{7}$ । *[আইনস্টাইন কলেজ, ঢাকা]*

ক. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B^C) = \frac{1}{4}$, A ও B স্বাধীন হলে, $P(A \cap B)$ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরিমিত ব্যবধান এবং ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. ক এবং খ একত্রে চেষ্টা করে সমস্যাটি সমাধানের সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{3}$ এবং $P(B^C) = \frac{1}{4}$

বা, $1 - P(B) = \frac{1}{4}$ বা, $P(B) = 1 - \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(B) = \frac{3}{4}$

$\therefore$ A ও B স্বাধীন

$\therefore$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের ছক :

শ্রেণিব্যাপ্তি	মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \frac{x_i - a}{c}$	f_iu_i	$f_iu_i^2$
5-10	7.5	2	−3	−6	18
10-15	12.5	4	−2	−8	16
15-20	17.5	6	−1	−6	6
20-25	22.5	8	0	0	0
25-30	27.5	10	1	10	10
30-35	32.5	9	2	18	36
35-40	37.5	7	3	21	63
40-45	42.5	3	4	12	48
মোট		$\Sigma f_i = N = 49$		$\Sigma f_iu_i = 41$	$\Sigma f_iu_i^2 = 197$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান $= c\sqrt{\frac{\Sigma f_iu_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_iu_i}{N}\right)^2}$

$= 5\sqrt{\frac{197}{49} - \left(\frac{41}{49}\right)^2}$

$= 5\sqrt{4.02 - 0.7}$

$= 5\sqrt{3.32} = 9.11$ **(Ans.)**

ভেদাঙ্ক = (পরিমিত ব্যবধান)$^2 = 9.11^2 = 82.99$ **(Ans.)**

গ মনে করি, ক অঙ্কটি সমাধান করতে পারার ঘটনা = A

এবং খ ,, ,, ,, ,, ,, = B

$\therefore$ $P(A) = \frac{1}{5}$ এবং $P(B) = \frac{2}{7}$

ক এবং খ একত্রে চেষ্টা করে সমস্যা সমাধানের

সম্ভাবনা $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{7}\right)$

$= \frac{17}{35} - \frac{2}{35}$

$= \frac{17-2}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৩ দৃশ্যকল্প-১: তিনটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। *[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]*

দৃশ্যকল্প-২: নিম্নে একটি গণসংখ্যার তালিকা দেখানো হলো:

বয়স	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
গণসংখ্যা	10	15	30	20	5

ক. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ হলে, $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-২ এর গণসংখ্যা বিন্যাস এর ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে কমপক্ষে দুইটি মাথা পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{1}{4}$

A ও B স্বাধীন হলে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$

$= \frac{4+3-1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ ধরি, শ্রেণির মধ্যবিন্দু, $x_i (i = 1, 2, \ldots 5)$ গণসংখ্যা $f_i = 80$

$c = 11$, $a = 35$ এবং $u_i = \frac{x_i - a}{c}$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	f_i	x_i	$u_i = (x_i - 35)/11$	f_iu_i	$f_iu_i^2$
10-20	10	15	−20/11	−200/11	4000/121
20-30	15	25	−10/11	−150/11	1500/121
30-40	30	35	0	0	0
40-50	20	45	10/11	200/11	2000/121
50-60	5	55	20/11	100/11	2000/121
	$N = \Sigma f_i = 80$			$\Sigma f_iu_i = -50/11$	$\Sigma f_iu_i^2 = 9500/121$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক, $\sigma_x^2 = c^2\left\{\frac{\Sigma f_iu_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_iu_i}{N}\right)^2\right\}$

$= (11)^2\left\{\frac{\frac{9500}{121}}{80} - \left(\frac{-\frac{50}{11}}{80}\right)^2\right\}$

$= 121\left(\frac{9500}{121 \times 80} - \frac{25}{7744}\right)$

$= 118.36$ **(Ans.)**

গ তিনটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে ঘটনাসমূহ:

HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT

$\therefore$ কমপক্ষে দুটি মাথা পাবার সম্ভাবনা $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৪ (i)

থলি	সাদা বল	কালো বল
১ম	3	2
২য়	2	5

(ii) $S = \{1, 3, 4, 5, 7, 7, 9, 20\}$ । *[উদয়ন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, A, B স্বাধীন হলে, $P(A \cup B)$ = কত? ২

খ. (i) নং উদ্দীপক হতে প্রত্যেক থলি হতে একটি করে বল তুললে 2টি বলের মধ্যে অন্ততঃ একটি সাদা হবার সম্ভাবনা কত? ৪

গ. S এর উপাদানগুলোর পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০৬

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ১৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪১১

গ আমরা জানি, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের গণনা তালিকা :

x_i	1	3	4	5	7	7	9	20	$\Sigma x_i = 56$
x_i^2	1	9	16	25	49	49	81	400	$\Sigma x_i^2 = 630$

অতএব, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{630}{8} - \left(\frac{56}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{78.75 - 49}$

$= \sqrt{29.75} = 5.454$ (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৫ *[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা]*

ক. 3, 4, 4, 5 সংখ্যাগুলোর ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দুইটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার যোগসূত্রটি প্রমাণ কর। ৪

গ. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ এবং $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{3}{8}$ হলে $P(A \cap B)$, $P\left(\frac{B}{A}\right)$ এবং $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sum x_i = 3 + 4 + 4 + 5 = 16$

$\sum x_i^2 = 3^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 = 66$

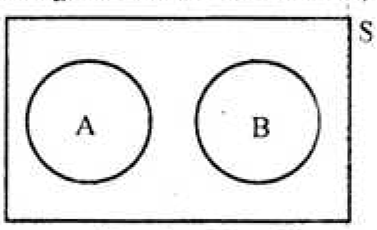
$n = 4$

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 = \frac{66}{4} - \left(\frac{16}{4}\right)^2$

$= 16.5 - 16 = 0.5$ **(Ans.)**

খ বিবৃতি: দুইটি বর্জনশীল ঘটনার যেকোনো একটি ঘটার সম্ভাবনা, এদের প্রত্যেকটি পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান। অর্থাৎ A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা হলে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

প্রমাণ: ধরি, S সসীম নমুনাক্ষেত্রে, A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা যেখানে,



চিত্র: $A \cap B = \varnothing$

নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n(S)

A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = n(A)

এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = n(B)

সুতরাং, A ঘটনার সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ এবং B ঘটনার সম্ভাবনা, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$

এখন, A ও B বর্জনশীল হওয়ায়, $A \cap B = \varnothing$; অর্থাৎ এদের মধ্যে কোনো সাধারণ নমুনাবিন্দু নেই।

∴ $(A \cup B)$ এর অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা হবে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

কাজেই, $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)}$

বা, $P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$

∴ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ এবং $P(A \mid B) = \frac{3}{8}$

আমরা জানি, $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{40}$ **(Ans.)**

$\therefore P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{40} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{20}$ **(Ans.)**

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3}{40}$

$= \frac{20 + 8 - 3}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৬ একটি তথ্য সারি : 10, – 6, 0, 8, 2, 9, 3, 7, 12.

[নারায়ণগঞ্জ সরকারি মহিলা কলেজ, নারায়ণগঞ্জ]

ক. পরিমিত ব্যবধানের সংজ্ঞা লিখ। ২

খ. প্রদত্ত তথ্য সারির মধ্যমা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পরিমিত ব্যবধান: উপাত্তের মানগুলি থেকে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে উপাত্তের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তার ধনাত্মক বর্গমূলকে **পরিমিত ব্যবধান** বলে। পরিমিত ব্যবধানকে গ্রিক অক্ষর σ (সিগমা) বা SD দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

খ প্রদত্ত উপাত্তের মান গুলোকে মানের ঊর্ধ্ব ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাই,

– 6, 0, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 12

এখানে, n = 9 (বিজোড় সংখ্যা)

∴ মধ্যমা $= \frac{n+1}{2}$ তম পদ $= \frac{9+1}{2}$ তম পদ $= \frac{10}{2}$ তম

= 5 তম পদ = 7

∴ প্রদত্ত তথ্য সারির মধ্যমা 7. **(Ans.)**

গ এখানে, n = 9

এবং গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{10 - 6 + 0 + 8 + 2 + 9 + 3 + 7 + 12}{9}$

$= \frac{45}{9} = 5$

এখন, $\sum x_i^2 = 10^2 + (-6)^2 + 0^2 + 8^2 + 2^2 + 9^2 + 3^2 + 7^2 + 12^2 = 487$

∴ ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{487}{9} - 5^2 = 29.11$

∴ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\text{ভেদাঙ্ক}} = \sqrt{29.11} = 5.3954$

আমরা জানি, বিভেদাঙ্ক, $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{5.3954}{5} \times 100\%$

$= 107.91\%$

∴ উদ্দীপকের তথ্যসারির ভেদাঙ্ক 29.11 এবং বিভেদাঙ্ক 107.91% **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৭ দৃশ্যকল্প-১: একটি গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ :

শ্রেণিব্যাপ্তি	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
গণসংখ্যা	7	10	15	13	9	6

দৃশ্যকল্প-২: একটি ব্যাগে 7টি লাল ও 5টি নীল বল আছে। নিরপেক্ষভাবে 5টি বল তুলে নেওয়া হলো।

[রাজেন্দ্রপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, গাজীপুর]

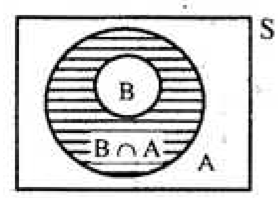
ক. দুইটি নির্ভরশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুণন সূত্রটি লিখ। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে 3টি বল লাল ও 2টি বল নীল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বিবৃতি: দুইটি অধীন ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা, এদের যেকোনো একটির শর্তহীন সম্ভাবনা এবং অপরটির শর্তাধীন সম্ভাবনার গুণফলের সমান। অর্থাৎ A ও B দুইটি অধীন ঘটনা হলে— $P(A \cap B) = P(A).\ P(B \mid A) = P(B).\ P(A \mid B)$



খ ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের তালিকা

শ্রেণি	মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$ a=32, c=5	f_id_i	$f_id_i^2$
20-24	22	7	-2	-14	28
25-29	27	10	-1	-10	10
30-34	32	15	0	0	0
35-39	37	13	1	13	13
40-44	42	9	2	18	36
45-49	47	6	3	18	54
	মোট	N = 60		$\Sigma f_id_i = 25$	$\Sigma f_id_i^2 = 141$

আমরা জানি,

ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \left[\frac{\Sigma f_id_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_id_i}{N}\right)^2\right] \times c^2$

$= \left[\frac{141}{60} - \left(\frac{25}{60}\right)^2\right] \times c^2$

$= 54.41$ **(Ans.)**

আবার, পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\text{ভেদাঙ্ক}}$

$= \sqrt{54.41} = 7.3763$ **(Ans.)**

গ ব্যাগে মোট বল আছে = 7 + 5 = 12টি

12টি বল থেকে 5টি বল $^{12}C_5$ প্রকারে নেওয়া যায়।

সুতরাং 3টি বল লাল এবং 2টি বল নীল হওয়ার সম্ভাবনা,

= P (তিনটি বল লাল ও দুটি বল নীল)

$= \frac{^7C_3 \times {^5C_2}}{^{12}C_5} = \frac{175}{396}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৮ দৃশ্যকল্প-১: A বাক্সে 5টি লাল ও 3টি কালো এবং B বাক্সে 4টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি বাক্স নির্বাচন করা হলো।

দৃশ্যকল্প-২: ইবনে সিনা কলেজের দ্বাদশ শ্রেণির 60 জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো :

নম্বর	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
শিক্ষার্থী সংখ্যা	10	20	15	10	5

[আবদুল কাদির মোল্লা সিটি কলেজ, নরসিংদী]

ক. একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত বাক্স হতে দুইটি বল তোলা হলে একটি লাল ও একটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর উপাত্ত হতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপে দেখানো যেতে পারে:

দুটি মুদ্রার নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দু	একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্র 1	2	3	4	5	6
HH	(HH1)	(HH2)	(HH3)	(HH4)	(HH5)	(HH6)
HT	(HT1)	(HT2)	(HT3)	(HT4)	(HT5)	(HT6)
TH	(TH1)	(TH2)	(TH3)	(TH4)	(TH5)	(TH6)
TT	(TT1)	(TT2)	(TT3)	(TT4)	(TT5)	(TT6)

অতএব, নমুনা ক্ষেত্রটি হলো:
S = {HH1, HH2, ..., HH6, HT1, HT2, ..., HT6, TH1, TH2, ..., TH6, TT1, TT2, ... TT6}

খ A বাক্সটি নির্বাচিত হবার ঘটনা M এবং B বাক্সটি N. বল দুইটির একটি লাল এবং একটি কালো হবার

ঘটনা C. সুতরাং, $P(M) = P(N) = \frac{1}{2}$

∵ A বাক্স থেকে 1টি লাল ও 1টি কালো বল
$({}^5C_1 \times {}^3C_1)$ উপায়ে এবং B বাক্স থেকে 1টি লাল ও 1টি কালো বল
$({}^4C_1 \times {}^5C_1)$ উপায়ে তোলা যায়।

∴ একটি লাল ও একটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা

$$= \frac{1}{2}\frac{{}^5C_1 \times {}^3C_1}{{}^8C_2} + \frac{1}{2}\frac{{}^4C_1 \times {}^5C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{2}\frac{5\times3}{\frac{8\times7}{2}} + \frac{1}{2}\frac{4\times5}{\frac{9\times8}{2}} = \frac{15}{56} + \frac{5}{18}$$

$$= \frac{135+140}{504} = \frac{275}{504} \text{ (Ans.)}$$

গ বিস্তার পরিমাপ নির্ণয়ের তালিকা:

শ্রেণী সীমা	মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	f_ix_i	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$ $a = 75.5$ $c = 10$	f_id_i	$f_id_i^2$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
51-60	55.5	10	555	-2	-20	40	16.66	166.7
61-70	65.5	20	1310	-1	-20	20	6.66	133.3
71-80	75.5	15	1132.5	0	0	0	3.33	49.95
81-90	85.5	10	855	1	10	10	13.33	133.4
91-100	95.5	5	477.5	2	10	20	23.33	116.65
মোট		N = 60	$\Sigma f_ix_i = 4330$		$\Sigma f_id_i = -20$	$\Sigma f_id_i^2 = 90$		$\Sigma f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 600$

পরিমিতি ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\left[\frac{\Sigma f_id_i^2}{N} - \left\{\frac{\Sigma f_id_i}{N}\right\}^2\right] \times c^2}$

$$= \sqrt{\left[\frac{90}{60} - \left(\frac{-20}{60}\right)^2\right] \times 10^2}$$

$$= \sqrt{138.89} = 11.785 \text{ (Ans.)}$$

∴ ভেদাংক $\sigma^2 = 138.89$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ২৯ নিচে একটি শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো :

নম্বর	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
ছাত্র	10	20	15	10	5

একটি বাক্সে 5টি লাল ও 4টি সাদা এবং অপর বাক্সে 3টি লাল ও 6টি সাদা বল আছে।

[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]

ক. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর। ২

খ. নিবেশনটির ভেদাংক নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রত্যেক বাক্স হতে একটি করে বল উঠানো হলে, বল দুইটির মধ্যে কমপক্ষে একটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা কত? ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০৬

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ২৮(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪১৫

গ একটি পাত্রে 5টি লাল ও 4টি সাদা এবং অপর একটি পাত্রে 3টি লাল ও 6টি সাদা বল আছে। একটি করে বল তোলা হলে দুইটি বলের মধ্যে কমপক্ষে একটি বল লাল হওয়ার সম্ভাবনা = ১ম বক্স থেকে লাল ও ২য় বাক্স থেকে সাদা + ১ম বাক্স থেকে সাদা ও ২য় বাক্স থেকে লাল + দুইটি বলই লাল $= \frac{{}^5C_1}{{}^9C_1} \times \frac{{}^6C_1}{{}^9C_1} + \frac{{}^4C_1}{{}^9C_1} \times \frac{{}^3C_1}{{}^9C_1} + \frac{{}^5C_1}{{}^9C_1} \times \frac{{}^3C_1}{{}^9C_1}$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{6}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{9}$$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{10}{27} + \frac{4}{27} + \frac{5}{27} = \frac{19}{27} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৩০ নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

দৃশ্যকল্প-১: একটি ছক্কা এবং দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল।

দৃশ্যকল্প-২: নিম্নে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেওয়া হল:

শ্রেণি ব্যবধান	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
গণসংখ্যা	5	8	14	12	9	6

[সরকারি সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ, ফরিদপুর]

ক. বর্জনশীল এবং অবর্জনশীল ঘটনার সংজ্ঞা দাও। ২

খ. নমুনাক্ষেত্রের সাহায্যে 2টি হেড ও বিজোড় সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা বের কর। ৪

গ. নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৮ নং প্রশ্নের সমধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০৭

প্রশ্ন ▶ ৩১ একটি ব্যাগে 5টি ল্যাংড়া, 10টি ফজলি ও 7টি রুপালি আম আছে,
A = {1, 2, 3, 4, ..., 100}

[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]

ক. একটি মুদ্রা 3 বার নিক্ষেপ করলে নমুনা ক্ষেত্র তৈরি কর। ২

খ. প্রথম উদ্দীপক হতে একটি আম নিরপেক্ষভাবে উঠালে তা ল্যাংড়া অথবা ফজলি অথবা রুপালি আম হবার সম্ভাবনা কত? ল্যাংড়া না হবার সম্ভাবনা কত? ৪

গ. দ্বিতীয় উদ্দীপক হতে একটি সংখ্যা নিরপেক্ষভাবে নিলে তা 3 অথবা 4 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাবনা কত? ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি মুদ্রা 3 বার নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি
S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} **(Ans.)**

খ ব্যাগে মোট আম = 5 + 10 + 7 = 22
একটি আম ল্যাংড়া অথবা ফজলি অথবা রুপালি হওয়ার সম্ভাবনা

$$= \frac{{}^5C_1}{{}^{22}C_1} + \frac{{}^{10}C_1}{{}^{22}C_1} + \frac{{}^7C_1}{{}^{22}C_1}$$

$$= \frac{5}{22} + \frac{10}{22} + \frac{7}{22} = \frac{22}{22} = 1 \text{ (Ans.)}$$

আমটি ল্যাংড়া না হওয়ার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{5}{22} = \frac{17}{22}$ **(Ans.)**

গ 1 থেকে 100 পর্যন্ত মোট সংখ্যা = 100টি
1 থেকে 100 এর মধ্যে 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আছে 33টি এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আছে 25টি
3 ও 4 উভয় দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা ৪টি
ধরি, 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার ঘটনা = T
4 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার ঘটনা = F

∴ $P(T) = \frac{33}{100}$, $P(F) = \frac{25}{100}$

$P(T \cap F) = \frac{8}{100}$

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(T \cup F) = P(T) + P(F) - P(T \cap F)$

$$= \frac{33}{100} + \frac{25}{100} - \frac{8}{100} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৩২ দৃশ্যকল্প-১: শেরপুর সরকারি কলেজের দ্বাদশ শ্রেণির 50 জন ছাত্রের গণিতে নম্বরের একটি ডাটা নিম্নে দেওয়া হলো :

নম্বর	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
ছাত্রসংখ্যা	18	12	10	8	7

দৃশ্যকল্প-২: একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6টি সাদা বল, 7টি লাল বল এবং 9টি কালো বল আছে।

[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]

ক. একটি সুষম মুদ্রা পর পর তিনবার টস করা হলো নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে, এলোমেলোভাবে 3টি বল তোলা হলো। 3টি বলই সাদা অথবা লাল হওয়ার সম্ভাবনা কত? ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি সুষম মুদ্রা পর পর তিনবার টসে প্রাপ্ত নমুনাক্ষেত্র, S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

খ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের ছক :

নম্বর	মধ্যবিন্দু (x_i)	ছাত্র সংখ্যা (f_i)	$d_i = \frac{x_i - A}{C}$ A = 55.5 C = 10	f_id_i	$f_id_i^2$
51-60	55.5	18	0	0	0
61-70	65.5	12	1	12	12
71-80	75.4	10	2	20	40
81-90	85.5	8	3	24	72
91-100	95.5	7	4	28	112
মোট		N = 55		$\Sigma f_id_i = 84$	$\Sigma f_id_i^2 = 236$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_id_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_id_i}{N}\right)^2} \times C$

$= \sqrt{\frac{236}{55} - \left(\frac{84}{55}\right)^2} \times 10$

$= 13.99$ **(Ans.)**

গ সাদা বল = 6টি

লাল বল = 7 টি

কালো বল = 9টি

মোট বল = 6 + 7 + 9 = 22টি

22টি বল থেকে 3টি বল তোলা যায় = $22C_3$ উপায়ে

7টি লাল বল থেকে 3টি বল তোলা যায় = $7C_3$ উপায়ে

6 টি সাদা বল থেকে 3টি বল তোলা যায় = $6C_3$ উপায়ে

বলগুলো লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{7C_3}{22C_3} + \frac{6C_3}{22C_3}$

$= \frac{1}{44} + \frac{1}{77}$

$= \frac{7+4}{308} = \frac{11}{308} = \frac{1}{28}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৩ দৃশ্যকল্প-১: একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হলো।

দৃশ্যকল্প-২:

শ্রেণিব্যাপ্তি	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
গণসংখ্যা	7	10	15	13	9	6

[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]

ক. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ হলে $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর যেখানে A ও B স্বাধীন। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে গঠিত ঘটনা জগতের দুইটি হেড ও একটি বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ২৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪১৩

খ দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপ:

দুটি মুদ্রার নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দু	একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্র 1	2	3	4	5	6
HH	(HH1)	(HH2)	(HH3)	(HH4)	(HH5)	(HH6)
HT	(HT1)	(HT2)	(HT3)	(HT4)	(HT5)	(HT6)
TH	(TH1)	(TH2)	(TH3)	(TH4)	(TH5)	(TH6)
TT	(TT1)	(TT2)	(TT3)	(TT4)	(TT5)	(TT6)

অতএব নমুনাক্ষেত্রটি হলো:

S = {HH1, HH2, ..., HH6, HT1, HT2, ..., HT6, TH1, TH2, ..., TH6, TT1, TT2, ... TT6}

নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, n(S) = 24

ধরি, দুইটি হেড ও বিজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা A

A ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র : {HH1, HH3, HH5}

$\therefore$ A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(A) = 3

অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ **(Ans.)**

গ পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয়ের তালিকা:

শ্রেণি	মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$ a=32, c=5	f_id_i	$f_id_i^2$
20-24	22	7	– 2	– 14	28
25-29	27	10	– 1	– 10	10
30-34	32	15	0	0	0
35-39	37	13	1	13	13
40-44	42	9	2	18	36
45-49	47	6	3	18	54
	মোট	N = 60		$\Sigma f_id_i = 25$	$\Sigma f_id_i^2 = 141$

আমরা জানি,

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\left[\frac{\Sigma f_id_i^2}{N} - \left[\frac{\Sigma f_id_i}{N}\right]^2\right] \times c^2}$

$= \sqrt{\left[\frac{141}{60} - \left(\frac{25}{60}\right)^2\right] \times c^2}$

$= \sqrt{54.41}$

$= 7.37$ **(Ans.)**

$\therefore$ ভেদাংক $\sigma^2 = (7.37)^2 = 54.41$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৪ $f(x) = 2x - 3$ *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. $x, y \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে, $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$। ২

খ. $\frac{1}{|f(x) - 2|} > \frac{2}{3}$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. $|f(x)| < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $|f(x) f(x + 2)| < \frac{21}{25}$ ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(x^{-1}y^{-1})(xy) = (xy)(x^{-1}y^{-1})$ [গুণনের বিনিময়]

$= (yx)(x^{-1}y^{-1})$ [গুণনের বিনিময়]

$= \{(yx)x^{-1}\}y^{-1}$ [গুণনের সংযোজন]

$= \{y(xx^{-1})\}y^{-1}$ [গুণনের সংযোজন]

$= (y.1)y^{-1}$ [গুণনের বিপরীতক]

$= y.y^{-1}$ [গুণনের অভেদক]

$= 1$ [গুণনের বিপরীতক]

আমরা প্রমাণ করেছি যে, $(x^{-1}y^{-1})xy = xy(x^{-1}y^{-1}) = 1$

অর্থাৎ $y^{-1}x^{-1}$ হচ্ছে xy এর গুণনের বিপরীতক যা অনন্য।

সুতরাং $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 2x - 3$

শর্তমতে, $\frac{1}{|f(x) - 2|} > \frac{2}{3}$

বা, $\frac{1}{|2x - 3 - 2|} > \frac{2}{3}$

বা, $\frac{1}{|2x - 5|} > \frac{2}{3}$

বা, $|2x - 5| < \frac{3}{2}$

বা, $-\frac{3}{2} < 2x - 5 < \frac{3}{2}$

বা, $-\frac{3}{2} + 5 < 2x - 5 + 5 < \frac{3}{2} + 5$

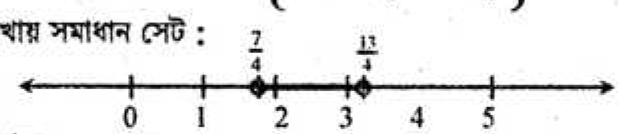
বা, $\frac{7}{2} < 2x < \frac{13}{2}$

$\therefore$ $\frac{7}{4} < x < \frac{13}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\frac{7}{4} < x < \frac{13}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{7}{4} < x < \frac{13}{4}\right\}$ **(Ans.)**

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট :



গ দেওয়া আছে, $f(x) = 2x - 3$

এবং $|f(x)| < \frac{1}{5}$ $\therefore$ $|2x - 3| < \frac{1}{5}$ .... (i)

$\therefore$ $|f(x) f(x + 2)| = |(2x - 3)(2x - 3 + 2)| = |(2x - 3)(2x - 1)|$

দেখাতে হবে যে, $|(2x - 3)(2x - 1)| < \frac{21}{25}$

এখন, $|2x-3|<\frac{1}{5}$

বা, $|2x-3+2|<\frac{1}{5}+2$

বা, $|2x-1|<\frac{1+10}{5}$

∴ $|2x-1|<\frac{11}{5}$ .... (ii)

(i) ও (ii) গুণ করে পাই,

∴ $|2x-3|\,|2x-1|<\frac{1}{5}\times\frac{11}{5}$

বা, $|(2x-3)(2x-1)|<\frac{11}{25}$

বা, $|(2x-3)(2x-1)|<\frac{21}{25}$ $\left[\because \frac{11}{25}<\frac{21}{25}\right]$

∴ $|f(x)\,f(x+2)|<\frac{21}{25}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৩৫ $z=f(x,y)=x+iy,\ \omega=a+ib$ *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. $\sqrt[4]{-36}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $|f(x-4,y)|+|f(x+4,y)|=12$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{\omega}}$ ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt[4]{-36}=(36i^2)^{\frac{1}{4}}$

$=\{(\pm 6i)^2\}^{\frac{1}{4}}$

$=(\pm 6i)^{\frac{1}{2}}$

$=\{3(\pm 2i)\}^{\frac{1}{2}}$

$=\{3(1\pm 2i-1)\}^{\frac{1}{2}}$

$=\{3(1\pm 2i+i^2)\}^{\frac{1}{2}}$

$=\{3(1\pm i)^2\}^{\frac{1}{2}}$

$=\pm\sqrt{3}(1\pm i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x,y)=x+iy$

∴ $|f(x-4,y)|=|(x-4)+iy|$

এবং $f(x+4,y)=|(x+4)+iy|$

∴ $|x-4+iy|+|x+4+iy|=12$

বা, $\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=12$

বা, $\sqrt{x^2-8x+16+y^2}+\sqrt{x^2+8x+16+y^2}=12$

বা, $\sqrt{x^2-8x+16+y^2}=12-\sqrt{x^2+8x+16+y^2}$

বা, $x^2-8x+16+y^2=144-24\sqrt{x^2+8x+16+y^2}+x^2+8x+16+y^2$

বা, $16x=144-24\sqrt{x^2+8x+16+y^2}$

বা, $2x=18-3\sqrt{x^2+8x+16+y^2}$

বা, $3\sqrt{x^2+8x+16+y^2}=18-2x$

বা, $9(x^2+8x+16+y^2)=324-72x+4x^2$

বা, $9x^2+72x+144+9y^2=324-72x+4x^2$

বা, $5x^2+9y^2+144x-180=0$

বা, $\frac{5x^2+144x}{180}+\frac{y^2}{20}=1$ [180 দ্বারা ভাগ করে পাই]

বা, $\frac{x^2+\frac{144}{5}x}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

বা, $\frac{(x)^2+2.x.\frac{72}{5}+\left(\frac{72}{5}\right)^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1+\frac{\left(\frac{72}{5}\right)^2}{36}$

বা, $\frac{\left(x+\frac{72}{5}\right)^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1+\frac{144}{25}$

বা, $\frac{\left(x+\frac{72}{5}\right)^2}{36}+\frac{y^2}{20}=\frac{169}{25}$

বা, $\frac{\left(x+\frac{72}{5}\right)^2}{36\times\frac{169}{25}}+\frac{y^2}{20\times\frac{169}{25}}=1$

বা, $\frac{\left(x+\frac{72}{5}\right)^2}{\left(\frac{78}{5}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{26}{\sqrt{5}}\right)^2}=1$

ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ। অর্থাৎ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\omega=a+ib$ এবং $z=x+iy$

∴ $\omega^{-1}=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$

$\frac{z}{\omega}=z\omega^{-1}=(x+iy)\frac{a-ib}{a^2+b^2}$

$=\frac{ax-ibx+aiy-i^2by}{a^2+b^2}$

$=\frac{ax+by+i(ay-bx)}{a^2+b^2}$

$=\frac{ax+by}{a^2+b^2}+i\frac{ay-bx}{a^2+b^2}$

∴ $\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}-i\frac{ay-bx}{a^2+b^2}$

আবার, $\frac{\bar{z}}{\bar{\omega}}=\frac{x-iy}{a-ib}=\frac{(x-iy)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)}$

$=\frac{ax+ibx-aiy-i^2by}{a^2+b^2}$

$=\frac{ax+by+ibx-aiy}{a^2+b^2}$

$=\frac{ax+by}{a^2+b^2}-i\frac{ay-bx}{a^2+b^2}$

∴ $\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{\omega}}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৩৬ $f(x)=x^4-2x^3-2x^2+8x-8,\ g(x)=5x^2-11x+3.$ *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. k এর মান কত হলে $2x^2-6x+k=0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হবে? ২

খ. $f(x)=0$ সমীকরণের একটি মূল $1+i$ হলে অপর মূলগুলি নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে $\frac{\alpha^2}{\beta}$ ও $\frac{\beta^2}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2x^2-6x+k=0$

∴ নিশ্চায়ক, $D=(-6)^2-4.2.k$

$=36-8k$

$D>0$ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব হবে।

তাহলে, $36-8k>0$

বা, $36>8k$

বা, $2k<9$

∴ $k<\frac{9}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x)=0$

বা, $x^4-2x^3-2x^2+8x-8=0$

বা, $x^4-2x^3-2x^2+4x+4x-8=0$

বা, $x^3(x-2)-2x(x-2)+4(x-2)=0$

বা, $(x-2)(x^3-2x+4)=0$

বা, $(x-2)(x^3+2x^2-2x^2-4x+2x+4)=0$

বা, $(x-2)\{x^2(x+2)-2x(x+2)+2(x+2)\}=0$

∴ $(x-2)(x+2)(x^2-2x+2)=0$ .... (i)

(i) নং সমীকরণের একটি মূল $1+i$ হলে আরেকটি মূল হবে $1-i$। সমীকরণটি চতুর্ঘাত সমীকরণ হওয়ায় এর মূল হবে 4টি। বাকি দুইটি মূল হবে 2 এবং -2.

∴ অপরমূলগুলি, $2, -2, 1-i$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = 5x^2 - 11x + 3$

শর্তমতে, $g(x) = 5x^2 - 11x + 3 = 0$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

$$\alpha + \beta = \frac{11}{5}$$

$$\alpha\beta = \frac{3}{5}$$

এখন, $\frac{\alpha^2}{\beta}$ ও $\frac{\beta^2}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)x + \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta}x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 - \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 - \frac{\left(\frac{11}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{5}}{\frac{3}{5}}x + \frac{3}{5} = 0$

বা, $x^2 - \frac{\frac{1331}{125} - \frac{99}{25}}{\frac{3}{5}}x + \frac{3}{5} = 0$

বা, $x^2 - \frac{\frac{1331 - 495}{125}}{\frac{3}{5}}x + \frac{3}{5} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{836}{125} \times \frac{5}{3}\right)x + \frac{3}{5} = 0$

বা, $x^2 - \frac{836}{75}x + \frac{3}{5} = 0$

∴ $75x^2 - 836x + 45 = 0$

ইহাই $\frac{\alpha^2}{\beta}$ ও $\frac{\beta^2}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৭ S = {3, 5, 9, 12, 15, 18, 20, 25} সেট হতে নিরপেক্ষভাবে একটি সংখ্যা নির্বাচন করা হলো। *[রাণীভবানী সরকারী মহিলা কলেজ, নাটোর]*

ক. দুইটি বর্জনশীল ঘটনার সম্ভাবনার সংযোগ সূত্র বর্ণনা কর। ২

খ. $P(A) = \frac{1}{7}, P(B) = \frac{1}{8}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A \cup B)$ এবং $P(A \cap B)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. S এর উপাদানগুলির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করে ফলাফল বিশ্লেষণ কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ১৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০৯

খ দেওয়া আছে,

$P(A) = \frac{1}{7}$ এবং $P(B) = \frac{1}{8}$

এখানে, A ও B স্বাধীন।

সুতরাং, $P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{56} = \frac{8 + 7 - 1}{56} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$

$\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{4}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{56}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, S = {3, 5, 9, 12, 15, 18, 20, 25}

এখানে, n = 8

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের গণনা তালিকা:

x_i	3	5	9	12	15	18	20	25	$\Sigma x_i = 107$
x_i^2	9	25	81	144	225	324	400	625	$\Sigma x_i^2 = 1833$

∴ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\Sigma x_i\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{8} \times 1833 - \left(\frac{1}{8} \times 107\right)^2}$

$= \sqrt{229.125 - (13.375)^2}$

$= \sqrt{229.125 - 178.89}$

$= \sqrt{50.235} = 7.09$

ফলাফল হতে বলা যায় যে, সংখ্যাগুলোর মান এদের গড় মান হতে 7.09 তারতম্যে রয়েছে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৮ একটি পাত্রে 4টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। অন্য একটি পাত্রে 3টি লাল ও 4টি কালো বল রয়েছে। প্রতি পাত্র থেকে 1টি বল দৈবভাবে তোলা হলো। বল দুটি— *[রংপুর সরকারি কলেজ রংপুর]*

ক. সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? ২

খ. ভিন্ন রং এর হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? ৪

গ. একই রং এর হবার সম্ভাব্যতা কত? ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ১ম পাত্র থেকে সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{0}{9} = 0$

২য় " " " " " $= \frac{0}{7} = 0$

∴ সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা = 0 **(Ans.)**

খ ১ম পাত্র হতে লাল এবং ২য় পাত্র হতে কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{4}{9} \times \frac{4}{7}$

$= \frac{16}{63}$

১ম পাত্র হতে কালো এবং ২য় পাত্র হতে লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{5}{9} \times \frac{3}{7}$

$= \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$

∴ ভিন্ন রংয়ের হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{16}{63} + \frac{5}{21} = \frac{31}{63}$ **(Ans.)**

গ বল দুটি কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{5}{9} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{63}$

বল দুটি লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{4}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{63}$

∴ বল দুটি একই রংয়ের হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{20}{63} + \frac{12}{63} = \frac{32}{63}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৯ S_1 = {1, 2, 3, 4, ……, 19, 20}

S_2 = {1, 2, 5, 8, 11, 15}

[কারমাইকেল কলেজ, রংপুর]

ক. দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর। ২

খ. S_1 এবং S_2 হতে একটি করে সংখ্যা নিরপেক্ষভাবে বাছাই করা হলো। S_1 হতে জোড় সংখ্যা এবং S_2 হতে মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? ৪

গ. S_2 এর উপাদানগুলির পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপ দেখানো হলো :

দুটি মুদ্রার নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দু	একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্র					
	1	2	3	4	5	6
HH	HH1	HH2	HH3	HH4	HH5	HH6
HT	HT1	HT2	HT3	HT4	HT5	HT6
TH	TH1	TH2	TH3	TH4	TH5	TH6
TT	TT1	TT2	TT3	TT4	TT5	TT6

খ দেওয়া আছে, S_1 = {1, 2, 3, 4, 5, ……………, 19, 20}

S_2 = {1, 2, 5, 8, 11, 15}

S_1 হতে দৈবচয়নে একটি সংখ্যা নিলে সেটি জোড় হওয়ার

সম্ভাবনা $= \frac{10}{20}$ [∵ 1 থেকে 20 এর মধ্যে জোড় সংখ্যা = 10টি; মোট সংখ্যা = 20টি]

$= \frac{1}{2}$

S_2 হতে মৌলিক সংখ্যা পাবার সম্ভাবনা

$= \frac{3}{6}$ [∵ S_2 তে মৌলিক সংখ্যা 2, 5, 11]

$= \frac{1}{2}$

S_1 হতে জোড় ও S_2 হতে মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার

সম্ভাবনা $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, S_2 = {1, 2, 5, 8, 11, 15}

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 15^2 = 440$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + 5 + 8 + 11 + 15 = 42$$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{6} \times 440 - \left(\frac{1}{6} \times 42\right)^2}$

= 4.933 **(Ans.)**

ভেদাঙ্ক = $(\sigma)^2 = (4.933)^2 = 24.33$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪০ নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো :

শ্রেণিব্যাপ্তি	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
গণসংখ্যা	7	16	21	12	4

[আহমদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]

ক. প্রচুরক কোন শ্রেণিতে অবস্থিত? ২

খ. গড় ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রচুরক (40-49) শ্রেণিতে অবস্থিত।

খ উপাত্তের গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান,

$MD_{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i|x_i - \bar{x}|;$

যেখানে, গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$

প্রয়োজনীয় গণনা তালিকা :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	গড় $\bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
20-29	7	24.5	171.5	$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N}$ $= \frac{2570}{60}$ $= 42.833$	18.33	128.31
30-39	16	34.5	552		8.33	133.28
40-49	21	44.5	934.5		1.667	35.007
50-59	12	54.5	654		11.667	140.004
60-69	4	64.5	258		21.667	86.668
	N = 60		$\sum f_i x_i =$ 2570			$\sum f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert =$ 523.269

∴ গড় ব্যবধান, $MD_{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i|x_i - \bar{x}| = \frac{523.269}{60} = 8.72115$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত নিবেশনে শ্রেণি সীমাগুলো বিচ্ছিন্ন হওয়ায় প্রথমে প্রকৃত শ্রেণিসীমা নির্ণয় করতে হবে।

প্রয়োজনীয় গণনা সারণি

শ্রেণিব্যাপ্তি	প্রকৃত শ্রেণিসীমা	গণসংখ্যা f_i	যোজিত গণসংখ্যা (f_i)
20-29	19.5-29.5	7	7
30-39	29.5-39.5	16	23
40-49	39.5-49.5	21	44
50-59	49.5-59.5	12	56
60-69	59.5-69.5	4	60
		N = 60	

চতুর্থক ব্যবধান = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

এখানে, $Q_1 = L_1 + \frac{\frac{1 \times N}{4} - F_1}{f_1} \times C$

$= 29.5 + \frac{\frac{1 \times 60}{4} - 7}{16} \times 10$ [∵ $\frac{1 \times 60}{4}$ = 15 তম পদ দ্বিতীয় শ্রেণিতে আছে]

= 34.5

এবং $Q_3 = L_3 + \frac{\frac{3 \times N}{4} - F_3}{f_3} \times C$

$= 49.5 + \frac{\frac{3 \times 60}{4} - 44}{12} \times 10$

[∵ $\frac{3 \times 60}{15}$ = 45, (50-59) শ্রেণিতে আছে]

= 49.5 + 0.833 = 50.33

∴ চতুর্থক ব্যবধান QD = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{50.33 - 34.5}{2} = 7.915$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪১ নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেয়া হলো :

শ্রেণিব্যাপ্তি	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34
গণসংখ্যা	15	30	55	17	10	3

[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]

ক. উপরের তথ্য থেকে গাণিতিক গড় নির্ণয় কর। ২

খ. উপরের তথ্য থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. উপরের তথ্য থেকে ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক গণনা তালিকা:

শ্রেণিব্যাপ্তি	গণসংখ্যা f_i	শ্রেণি মধ্যমান x_i	$d_i = \frac{x_i - a}{C}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
5-9	15	7	−2	−30	60
10-14	30	12	−1	−30	30
15-19	55	17 = a	0	0	0
20-24	17	22	1	17	17
25-30	10	27	2	20	40
30-34	3	32	3	9	27
h = 5	N = 130			$\sum f_i d_i =$ − 14	$\sum f_i d_i^2 =$ 174

গাণিতিক গড় $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times C = 17 + \frac{-14}{130} \times 5 = 17 - 0.54 = 16.46$

খ $\sum f_i|x_i - \bar{x}| = 141.90 + 133.80 + 29.70 + 94.18 + 105.40 + 46.82 = 551.60$

গড় ব্যবধান M.D. = $\frac{\sum f_i|x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{551.60}{130} = 4.24$ **(Ans.)**

গ ভেদাঙ্ক: $\sigma^2 = c^2\left\{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2\right\}$

$= 5^2\left\{\frac{174}{130} - \left(\frac{-14}{130}\right)^2\right\} = 25\left\{\frac{174}{130} - \frac{49}{4225}\right\}$

$= 25 \times 1.327 = 33.172$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪২ S_1 = {15, 18, 24, 35, 40, 42, 54, 60}

একটি ব্যাগে 3টি সাদা এবং 2টি কালো বল আছে। অপর একটি ব্যাগে 2টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে।

[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]

ক. বর্জনশীল এবং অবর্জনশীল ঘটনার উদাহরণসহ সংজ্ঞা দাও। ২

খ. S_1 তথ্যসারি হতে প্রমাণ কর পরিমিত ব্যবধান গড় ব্যবধান অপেক্ষা বড়। ৪

গ. 2টি ব্যাগের প্রতিটি হতে একটি করে বল তুলে দেখাও যে, বল দুটি সাদা হবার সম্ভাবনা = $\frac{6}{35}$ এবং দুইটি বল ভিন্ন রংয়ের হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০৭

খ দেওয়া আছে, S_1 = {15, 18, 24, 35, 40, 42, 54, 60}

এখানে, N = 8

পরিমিত ব্যবধান ও গড় ব্যবধান নির্ণয়ের তালিকা:

S_i	$\bar{S}$	$\lvert S_i - \bar{S}\rvert$	$(S_i - \bar{S})^2$
15	$\bar{S} = \frac{\sum Si}{N}$ $= \frac{288}{8}$ $= 36$	21	441
18		18	324
24		12	144
35		1	1
40		4	16
42		6	36
54		18	324
60		24	576
$\sum S_i = 288$		$\sum\lvert S_i - \bar{S}\rvert =$ 104	$\sum(S_i - \bar{S})^2 =$ 1862

∴ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(Si - \bar{S})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1862}{8}}$

$= \sqrt{232.75} = 15.26$ (প্রায়)

গড় ব্যবধান = $\frac{\sum|S_i - \bar{S}|}{N} = \frac{104}{8} = 13$

এখানে, 15.26 > 13

অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধান গড় ব্যবধান অপেক্ষা বড়। (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে,
একটি ব্যাগে সাদা বল আছে 3টি এবং কালো বল আছে 2টি
∴ মোট বল = (3 + 2)টি = 5টি
ব্যাগটি থেকে 1টি বল তুললে বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{3}{5}$
আবার, অপর ব্যাগে সাদা বল আছে 2টি এবং কালো বল আছে 5টি
∴ মোট বল = (2 + 5)টি = 7টি
∴ ব্যাগটি থেকে 1টি বল তুললে বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{2}{7}$
2টি ব্যাগের প্রতিটি হতে একটি করে বল তুললে বল দুটি সাদা হবার সম্ভাবনা = $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$ **(দেখানো হলো)**
দ্বিতীয় অংশ : 2টি ব্যাগের প্রতিটি হতে একটি করে বল তুললে দুইটি বলই ভিন্ন রংয়ের হবার সম্ভাবনা = $\frac{3}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{7}$
$= \frac{15}{35} + \frac{4}{35} = \frac{15+4}{35} = \frac{19}{35}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৩ দৃশ্যকল্প-১: দুই জন ক্রিকেটারের 6টি ইনিংসের রানের তালিকা নিম্নরূপ :

১ম খেলোয়াড়	5	85	95	50	0	40
২য় খেলোয়াড়	30	45	51	60	35	50

দৃশ্যকল্প-২: 10 থেকে বড় এবং 30 থেকে ছোট সংখ্যা বিবেচনা করা হলো।
[চাঁদপুর সরকারি মহিলা কলেজ, চাঁদপুর]

ক. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ এবং A, B স্বাধীন হলে $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর। ২
খ. দৃশ্যকল্প-২ হতে সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা কত? ৪
গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে কোন ক্রিকেটার তুলনামূলক ভাল? ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{3}$ এবং $P(B) = \frac{3}{4}$
এখানে, A ও B স্বাধীন।
$\therefore P(A \cap B) = P(A) . P(B) = \frac{1}{3} . \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4+9-3}{12} = \frac{13-3}{12}$
$= \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ **(Ans.)**

খ 10 থেকে বড় ও 30 থেকে ছোট সংখ্যাগুলো যথাক্রমে 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 এই 19টি। এদের মধ্যে মৌলিক সংখ্যাগুলো হল 11, 13, 17, 19, 23, 29 এবং 3 এর গুণিতক 12, 15, 18, 21, 24, 27
∴ সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা
$= \frac{6+6}{19} = \frac{12}{19}$ **(Ans.)**

গ 6টি ইনিংসে ১ম খেলোয়াড় ও ২য় খেলোয়াড়ের রানের তালিকা:
১ম খেলোয়াড় : 5, 85, 50, 0, 40, 95
২য় খেলোয়াড় : 50, 30, 35, 45, 60, 51
উপাত্ত থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সারণি:

১ম খেলোয়াড়		২য় খেলোয়াড়	
x_i	x_i^2	y_i	y_i^2
5	25	50	2500
85	7225	30	900
50	2500	35	1225
0	0	45	2025
40	1600	60	3600
95	9025	51	2601
$\Sigma x_i = 275$	$\Sigma x_i^2 = 20375$	$\Sigma y_i = 271$	$\Sigma y_i^2 = 12851$

১ম খেলোয়াড়ের রানের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান
$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{20375}{6} - \left(\frac{275}{6}\right)^2}$
$= \sqrt{3395.83 - 2100.69}$
$= \sqrt{1295.14} = 35.99$

২য় খেলোয়াড়ের রানের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান
$= \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{12851}{6} - \left(\frac{271}{6}\right)^2}$
$= \sqrt{2141.83 - 2040.03} = \sqrt{101.8} = 10.09$
২য় খেলোয়াড়ের রানের পরিমিত ব্যবধান ১ম খেলোয়াড়ের রানের পরিমিত ব্যবধান অপেক্ষা কম। কাজেই প্রদত্ত ইনিংসগুলির ক্ষেত্রে ২য় খেলোয়াড়ের স্কোর তুলনামূলক ভালো।

প্রশ্ন ▶ ৪৪ একটি কোম্পানীতে কর্মরত শ্রমিকদের মধ্যে গবেষণা করে দেখা গেল 30% শ্রমিক 5 বছরের বেশি সময় ধরে কর্মরত। 28% মহিলা, 65% শ্রমিক পি.এফ-এ টাকা জমা রাখেন এবং 50% মহিলা পি.এফ-এ টাকা জমা রাখেন। কোন বিশেষ কাজে দায়িত্ব নেওয়ার জন্য একজন শ্রমিক বাছাই করা হলো। *[চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ল্যাবরেটরী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. শ্রমিকটি পুরুষ হবার সম্ভাবনা কত? ২
খ. শ্রমিকটি 5 বছর বা তার চেয়ে কম সময় কর্মরত থাকার সম্ভাবনা কত? ৪
গ. শ্রমিক মহিলা বা পি.এফ-এ টাকা রাখে এমন হবার সম্ভাবনা কত? ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, 5 বছরের বেশি সময় ধরে কর্মরত এমন ঘটনা : A
মহিলা কর্মকর্তা এমন ঘটনা : F
পিএফ-এ টাকা জমা রাখেন এমন ঘটনা : P
তাহলে, $P(A) = 30\% = 0.30$
$P(F) = 28\% = 0.28$
$P(P) = 65\% = 0.65$
$P(F \cap P) = 50\% = 0.5$
শ্রমিকটি পুরুষ হবার সম্ভাবনা = 1 − P (মহিলা)
$= 1 - 0.28 = 0.72$ **(Ans.)**

খ শ্রমিকটি 5 বছর বা তার চেয়ে কম সময় কর্মরত আছে তার সম্ভাবনা
$= 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.70$ **(Ans.)**

গ শ্রমিকটি মহিলা বা পিএফ-এ টাকা জমা রাখে এমন হবার সম্ভাবনা
$= P(F) + P(P) - P(F \cap P)$
$= 0.28 + 0.65 - 0.50 = 0.43$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৫ বি এন কলেজ চট্টগ্রামে সাংস্কৃতিক সপ্তাহ উদযাপন উপলক্ষে টেনিস বল প্রতিযোগিতা পরিচালনার জন্য দুটি একই রকম বাক্সের ১ম টিতে 10টি নীল, 8টি সবুজ এবং ২য় টিতে 6টি নীল, 7টি সবুজ বল সরবরাহ করলেন। সমসম্ভব উপায়ে 1টি বাক্স নির্বাচন করা হল।
[বাংলাদেশ নৌবাহিনী কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. A ও B ঘটনা দুটি স্বাধীন, $P(A) = \frac{1}{4}$ এবং $P(B) = \frac{5}{6}$ হলে $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর। ২
খ. খেলা পরিচালনার জন্য প্রত্যেক বাক্স থেকে 1টি বল তুলে নিলে কমপক্ষে 1 টি সবুজ বল তোলার সম্ভাবনা কত? ৪
গ. উদ্দীপকের উভয় বাক্সের বল এবং লাল 5টি, সাদা 6টি, কালো 3টি বলের পরিমিত ব্যবধান এবং বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{4}$
$P(B) = \frac{5}{6}$
আমরা জানি, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$ [∵ A ও B স্বাধীন]
$= \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4} . \frac{5}{6}$
$= \frac{6+20-5}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$ **(Ans.)**

খ প্রথম বাক্সে মোট বল = 10 + 8 = 18টি
দ্বিতীয় বাক্সে মোট বল = 6 + 7 = 13টি
প্রথম বাক্সে 10টি নীল ও 8টি সবুজ
এবং দ্বিতীয় বাক্সে 6টি নীল ও 7টি সবুজ বল আছে।
∴ প্রত্যেক বাক্স থেকে 1টি করে বল তোলা হলে অন্তত একটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা = (১ম বাক্সের বল সবুজ এবং ২য় বাক্সের বল নীল) + (১ম বাক্সের বল নীল এবং ২য় বাক্সের বল সবুজ) + (১ম ও ২য় বাক্সের বল সবুজ)
$= \frac{8}{18} \times \frac{6}{13} + \frac{7}{13} \times \frac{10}{18} + \frac{8}{18} \times \frac{7}{13} = \frac{48+70+56}{18 \times 13} = \frac{174}{234} = \frac{29}{39}$

গ উদ্দীপকের উভয় বাক্সে মোট নীল বল আছে 16টি, সবুজ বল আছে 15টি

এখন, 16, 15, 5, 6 এবং 3 এর গাণিতিক গড়, $\bar{x} = 9$

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

এখন, $\sum x_i^2 = 15^2 + 16^2 + 5^2 + 6^2 + 3^2 = 551$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{551}{5} - 9^2 = 29.2$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = 5.4037$ **(Ans.)**

এবং বিভেদাঙ্ক, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{5.4037}{9} \times 100 = 60.04$

প্রশ্ন ▶ ৪৬ একটি কলেজের একাদশ শ্রেণির বর্ষ সমাপণী পরীক্ষায় উচ্চতর গণিত ১ম পত্রের 50 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ :

নম্বর শ্রেণি	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা	5	9	12	18	6

[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]

ক. $P(A^c) = \frac{1}{7}$ হলে $P(A) = ?$ ২

খ. নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৈবভাবে তিনজন পরীক্ষার্থী বাছাই করলে, তাদের একই নম্বরের শ্রেণিতে হওয়ার সম্ভাবনা কত? ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A^C) = \frac{1}{7}$

আমরা জানি, $P(A) + P(A^C) = 1$

বা, $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{7-1}{7}$

$\therefore$ $P(A) = \frac{6}{7}$ **(Ans.)**

খ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের তালিকা :

শ্রেণিসীমা	মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	f_ix_i	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$, $a = 74.5$, $c = 10$	f_id_i	$f_id_i^2$
50-59	54.5	5	272.5	−2	−10	20
60-69	64.5	9	580.5	−1	−9	9
70-79	74.5	12	894	0	0	0
80-89	84.5	18	1521	1	18	18
90-99	94.5	6	567	2	12	24
		N = 50			$\sum f_id_i = 11$	$\sum f_id_i^2 = 71$

পরিমিতি ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\left[\frac{\sum f_id_i^2}{N} - \left\{\frac{f_id_i}{N}\right\}^2\right] \times c^2}$

$= \sqrt{\left[\frac{71}{50} - \left(\frac{11}{50}\right)^2\right] \times 10^2} = 11.71$ **(Ans.)**

গ মোট ছাত্র সংখ্যা = 50

দৈবভাবে তিনজন পরিক্ষার্থী বাছাই করলে তাদের একই নম্বরের শ্রেণিতে হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{^5C_3}{^{50}C_3} + \frac{^9C_3}{^{50}C_3} + \frac{^{12}C_3}{^{50}C_3} + \frac{^{18}C_3}{^{50}C_3} + \frac{^6C_3}{^{50}C_3}$

$= \frac{1}{1960} + \frac{3}{700} + \frac{11}{980} + \frac{51}{1225} + \frac{1}{980}$

$= \frac{23}{392}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ দৃশ্যকল্প-১: 5, 7, 0, – 3, 11, 25, 17, 4, 20, 26।

দৃশ্যকল্প-২: 52 খানা তাসের মধ্য হতে 3টি তাস দৈবভাবে নেওয়া হল।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. $P(A \cap B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ এবং $P(A) = \frac{1}{2}$ হলে, P(B) এর মান কত? ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত উপাত্ত হতে চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত তাস 3টি (i) টেক্কা হবার (ii) টেক্কা না হবার (iii) 2টি ইস্কাবন হবার (iv) কমপক্ষে একটি রাজা হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ এবং $P(A) = \frac{1}{2}$

এখানে $P(A \cap B) \neq 0$

সুতরাং A ও B দুইটি অবর্জনশীল ঘটনা।

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

বা, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3}$

বা, $P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5-3+2}{6} = \frac{4}{6}$

$\therefore P(B) = \frac{2}{3}$

খ প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই, –3, 0, 4, 5, 7, 11, 17, 20, 25, 26.

আমরা জানি, চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

এবং চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

এখানে, Q_1 ও Q_3 হলো প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক।

যেহেতু, n = 10, জোড় সংখ্যা এবং ইহা 4 দ্বারা বিভাজ্য নয়। সেহেতু তথ্যসারিটিকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করে নিয়ে প্রত্যেক অংশের মধ্যমা নিয়ে নিবেশনটির চতুর্থক নির্ণয় করা হলো।

$\therefore$ Q_1 = ১ম অংশের $\frac{5+1}{2}$তম পদ = ১ম অংশের ৩য় পদ = 4

Q_3 = ২য় অংশের $\frac{5+1}{2}$তম পদ = ২য় অংশের ৩য় পদ = 20

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{20-4}{2} = \frac{16}{2} = 8$ এবং চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{20-4}{20+4} \times 100$

$= \frac{16}{24} \times 100 = 66.67\%$ (প্রায়)।

গ এক প্যাকেট তাসে মোট 52টি কার্ড থাকে। যার মধ্যে 4টি টেক্কা, 13টি ইস্কাপন, 4টি রাজা তাস থাকে।

52টি তাস থেকে 3টি তাস $^{52}C_3$ উপায়ে নেওয়া যায়।

i. 4টি টেক্কা থেকে 3টি তাস $^4C_3$ উপায়ে নেওয়া যায়।

$\therefore$ তাস 3টি টেক্কা হবার সম্ভাবনা $= \frac{^4C_3}{^{52}C_3} = \frac{4}{22100} = \frac{1}{5525}$

ii. 4 টি টেক্কা বাদ দিলে বাকি তাস থাকে = (52 – 4) = 48টি

সুতরাং 48টি তাস থেকে 3টি তাস নেওয়া যায় $^{48}C_3$ উপায়ে।

$\therefore$ তাস 3টি টেক্কা না হবার সম্ভাবনা $= \frac{^{48}C_3}{^{52}C_3} = \frac{17296}{22100} = \frac{4324}{5525}$

iii. 3টি তাসের মধ্যে 2টি ইস্কাপন হবার সম্ভাবনা

= P(2টি ইস্কাপন ও অন্য যে কোনো 1টি তাস) $= \frac{^{13}C_2 \times {^{39}C_1}}{^{52}C_3}$

[ইস্কাপন বাদে বাকি তাস = 52 – 13 = 39টি]

$= \frac{3042}{22100} = \frac{117}{850}$

iv. 3টি তাসের মধ্যে কমপক্ষে একটি রাজা হবার সম্ভাবনা,

= P(একটি রাজা ও 2টি অন্য তাস)

অথবা P(2টি রাজা ও 1টি অন্য তাস) অথবা P(3টি রাজা তাস)

$= \frac{^4C_1 \times {^{48}C_2}}{^{52}C_3} + \frac{^4C_2 \times {^{48}C_1}}{^{52}C_3} + \frac{^4C_3}{^{52}C_3}$

$= \frac{4512}{22100} + \frac{288}{22100} + \frac{4}{22100} = \frac{4804}{22100} = \frac{1201}{5525}$

Ans: i. $\frac{1}{5525}$; ii. $\frac{4324}{5525}$; iii. $\frac{72}{5525}$; iv. $\frac{117}{850}$; v. $\frac{1201}{5525}$

প্রশ্ন ▶ ৪৮ ক্যান্টনমেন্ট কলেজের 60 জন ছাত্রের উচ্চতর গণিতের ২য় পত্রের প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো :

প্রাপ্ত নম্বর	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
ছাত্রসংখ্যা	10	15	16	15	4

[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]

ক. $P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = 0.21$ হলে $P(B|A)$ নির্ণয় কর। ২

খ. নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৈব চয়নে 4 জন ছাত্র নির্বাচন করতে হলে তাদের ১ম শ্রেণি ব্যবধান অথবা ৩য় শ্রেণি ব্যবধান অথবা ৫ম শ্রেণি ব্যবধান হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = 0.21$

$\therefore \; P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.21}{\frac{1}{3}} = 0.21 \times 3 = 0.63$ **(Ans.)**

খ **পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের ছক :**

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্র সংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	f_ix_i	$f_ix_i^2$
50-59	10	54.5	545	29702.5
60-69	15	64.5	967.5	62403.75
70-79	16	74.5	1192	88804
80-89	15	84.5	1267.5	107103.75
90-99	4	94.5	378	35721
	N = 60		$\Sigma f_ix_i = 4350$	$\Sigma f_ix_i^2 = 323735$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_ix_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_ix_i}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{323735}{60} - \left(\frac{4350}{60}\right)^2}$

$= \sqrt{5395.5833 - 5256.25}$

$= \sqrt{139.3333} = 11.804$ **(Ans.)**

গ প্রথম, তৃতীয় ও পঞ্চম শ্রেণি ব্যবধানে মোট ছাত্র সংখ্যা

$= (10 + 16 + 4) = 30$ জন

মোট ছাত্র সংখ্যা $= (10 + 15 + 16 + 15 + 4) = 60$ জন

$\therefore$ দৈব চয়নে 4 জন ছাত্র নির্বাচন করলে তাদের ১ম শ্রেণি ব্যবধান অথবা ৩য় শ্রেণি ব্যবধান অথবা ৫ম শ্রেণি ব্যবধানে হওয়ার সম্ভাবতা

$= P(1st \cup 3rd \cup 5th)$

$= \frac{^{30}C_4}{^{60}C_4} = \frac{63}{1121}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৯ কোন পরীক্ষায় 100 জন পরীক্ষার্থীর গণিত বিষয়ের নম্বর নিচে দেওয়া হল:

নম্বর	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	8	15	30	25	15	7

[সরকারি বি এল কলেজ, খুলনা]

ক. $P(A) = \frac{1}{7}$, $P(B) = \frac{1}{9}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$ হলে $P(A \backslash B)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম শিক্ষার্থীর সংখ্যার মধ্যবর্তী যেকোন একটি সংখ্যা বাছাই করলে তা মৌলিক অথবা যৌগিক হওয়ার সম্ভাবনার সমষ্টি 1। ৪

গ. উপাত্তগুলো হতে ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{7}$

$P(B) = \frac{1}{9}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{15}$

আমরা জানি, $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

খ ক্ষুদ্রতম শিক্ষার্থীর সংখ্যা 7, বৃহত্তম শিক্ষার্থীর সংখ্যা 30।

7 থেকে 30 পর্যন্ত মোট সংখ্যা 24টি

মৌলিক সংখ্যা 7টি, যৌগিক সংখ্যা 17টি

$\therefore$ মৌলিক হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{7}{24}$

যৌগিক হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{17}{24}$

$\therefore$ মৌলিক বা যৌগিক হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{7}{24} + \frac{17}{24}$

$= \frac{7 + 17}{24} = 1$ (প্রমাণিত)

গ পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সারণি:

শ্রেণি	শ্রেণি মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$, $a = 65.5$	f_id_i	$f_id_i^2$
41-50	45.5	8	−2	−16	32
51-60	55.5	15	−1	−15	15
61-70	65.5	30	0	0	0
71-80	75.5	25	1	25	25
81-90	85.5	15	2	30	60
91-100	95.5	7	3	21	63
		N = 100		$\Sigma f_id_i = 45$	$\Sigma f_id_i^2 = 195$

পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\left\{\frac{\Sigma f_id_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_id_i}{N}\right)^2\right\}} \times C$

$= \sqrt{\left\{\frac{195}{100} - \left(\frac{45}{100}\right)^2\right\}} \times 10$

$= \sqrt{(1.95 - 0.2025)} \times 10 = \sqrt{1.7475} \times 10$

$= 1.3219 \times 10 = 13.219$ **(Ans.)**

$\therefore$ ভেদাঙ্ক = (পরিমিত ব্যবধান)^2

$= (13.219)^2 = 174.74$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫০ দৃশ্যকল্প-১: একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো।

দৃশ্যকল্প-২: $S = \{1, 2, 3, ..., 42\}$ *[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]*

ক. তাসের প্যাকেট হতে দৈবভাবে একখানা তাস টানলে তাসটি লাল বা টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা কত? ২

খ. নমুনাক্ষেত্রের সাহায্যে 2টি হেড ও বিজোড় সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা বের কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর বিজোড় সংখ্যাগুলোর বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ১৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪১১

খ ধরি, A দুইটি মাথা ও বিজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা

A ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র : {HH1, HH3, HH5}

$\therefore$ A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(A) = 3$

অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

গ দেওয়া আছে, $S = \{1, 2, 3, ..., 42\}$

ধরি, S সেটের বিজোড় সংখ্যার সেট = S′

$\therefore \; S' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$

$\therefore$ মোট বিজোড় সংখ্যা, n = 20টি

$\therefore$ বিজোড় সংখ্যাগুলোর গড়, $\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$

$= \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 31 + 33 + 35 + 37 + 39}{20}$

$= \frac{400}{20} = 20$

এবং $\Sigma y_i^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + ... + 31^2 + 33^2 + 35^2 + 37^2 + 39^2 = 10660$

$\therefore$ বিজোড় সংখ্যাগুলোর পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2}{n} - \bar{y}^2}$

$= \sqrt{\frac{10660}{20} - (20)^2} = \sqrt{533 - 400} = \sqrt{133} = 11.53$ (প্রায়)

$\therefore$ বিজোড় সংখ্যাগুলোর বিভেদাঙ্ক; $C.V = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100\%$

$= \frac{11.53}{20} \times 100\%$

$= 57.65\%$ (প্রায়) **(Ans.)**

★ উপাত্তের বিস্তার

১. নিবেশনের মানগুলির পারস্পরিক ব্যবধানকে কী বলে? (সহজ)
ক কেন্দ্রিকতা খ বিস্তার
গ পরিঘাত ঘ সংশ্লেষ **খ**

২. পরিসংখ্যানের অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে উপাত্তসমূহ মাঝখানে কোনো মানের চতুর্দিকে পুঞ্জিভূত হয়। উপাত্তের এই প্রবণতাকে বলা হয় — (সহজ)
ক গড় খ প্রচুরক
গ কেন্দ্রিয় প্রবণতা ঘ মধ্যমা **গ**

৩. নিম্নের কোন পরিমাপটি আদর্শ বিস্তার পরিমাপ? (সহজ)
ক পরিসর খ গড় ব্যবধান
গ পরিমিত ব্যবধান ঘ বিভেদাঙ্ক **ঘ**

ব্যাখ্যা: বিভেদাংক আদর্শ বিস্তার পরিমাপ।

৪. পরিমিত ব্যবধানের সর্বনিম্ন মান কোনটি? (সহজ)
ক 0 খ 1
গ –1 ঘ কোনটিই নয় **ক**

ব্যাখ্যা: পরিমিত ব্যবধান ঋণাত্মক মান গ্রহণ করে না।

৫. বিস্তার পরিমাপ হলো—
i. তথ্যসারির মানগুলো গড়ের চতুর্দিকে কীভাবে বিস্তৃত তার পরিমাপ।
ii. তথ্যসারির মানগুলো হতে গড়ের পার্থক্য।
iii. মধ্যক মানের প্রতিনিধিত্ব নিরূপক।
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৬. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর।
i. ভেদাঙ্ক পরিমিত ব্যবধান অপেক্ষা সর্বদাই বড়।
ii. ভেদাঙ্ক পরিমিত ব্যবধান অপেক্ষা সর্বদাই বড় হতে পারে না।
iii. ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান সমান।
ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক ii খ i ও ii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: [বি.দ্র. ভেদাঙ্ক, পরিমিত ব্যবধান অপেক্ষা বড় বা, সমান বা, ছোট হতে পারে]

নিচে তিনটি উপাত্ত ও উপাত্তের গড় দেওয়া হলো:

উপাত্ত A	2	5	7	10	14	$\bar{X}_A = 7.6$
উপাত্ত B	1	4	6	9	12	$\bar{X}_B = 6.4$
উপাত্ত C	-2	0	3	6	10	$\bar{X}_C = 3.4$

উপরের উদ্দীপক ব্যবহার করে (৭-৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৭. উপাত্ত A এর পরিসর কত? (সহজ)
ক 14 খ 12
গ 10 ঘ 8 **খ**

ব্যাখ্যা: গড় হতে উপাত্ত A এর অন্যান্য মানগুলোর পরিসর 14 – 2 = 12

৮. কোন উপাত্তের গড় ব্যবধান সবচেয়ে কম? (কঠিন)
ক A খ B
গ C ঘ A ও C **খ**

ব্যাখ্যা: এখানে, $\sum|x_i - \bar{x}_A| = 17.6$, $\sum|x_i - \bar{x}_B| = 16.4$
এবং $\sum|x_i - \bar{x}_C| = 18.4$
এখানে উপাত্ত B-এর গড় থেকে অন্যান্য মানগুলোর দূরত্ব সবচেয়ে কম।

★ উপাত্তের বিস্তার পরিমাপ

উক্ত কারখানাগুলোর মজুরির বিস্তার নিম্নে দেওয়া হলো:

কারখানা	মজুরি বিস্তার	মজুরির গড়
A	40	250
B	30	250
C	22	250
D	35	250

উপরের উদ্দীপকের আলোকে (৯ ও ১০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৯. কোন কারখানার মজুরী বৈষম্য সবচেয়ে কম? (সহজ)
ক A খ B
গ C ঘ D **গ**

১০. কোন কারখানা মন্ত্রণালয়ের নিয়ম মেনে চলছে? (মধ্যম)
ক A খ B
গ C ঘ D **গ**

ব্যাখ্যা: A-কারখানার শতকরা মজুরি বৈষম্য
$= \frac{40 \times 100}{250} = 16$ একইভাবে B-কারখানার 12, C-কারখানার 8.8 এবং D-কারখানার 14. এখানে কারখানা C-এর মজুরী বৈষম্য শতকরা 10 এর কম।

★★ বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ

১১. অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ কোনটি? (সহজ)
ক পরিসরাঙ্ক খ পরিমিত ব্যবধান
গ বিভেদাঙ্ক ঘ চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক **খ**

১২. কোনটি অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপের ক্ষেত্রে সত্য? (মধ্যম)
ক একাধিক উপাত্তের মধ্যে তুলনা করে
খ এটি এককবিহীন সংখ্যা
গ কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানসমূহের ব্যবধানের গড়
ঘ কেন্দ্রীয় মানসমূহের যোগফলের অনুপাত **গ**

১৩. শ্রেণিবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে পরিসর কোনটি? (সহজ)
(ক) সর্বোচ্চ গণসংখ্যা ও সর্বনিম্ন গণসংখ্যার পার্থক্য
(খ) সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্য।
(গ) একই শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমার পার্থক্য।
(ঘ) সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা ও সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমার পার্থক্য **ঘ**

১৪. –3.5, –2, –0.5, 1, 2.5, 4 এই উপাত্তের পরিসর কত ? (সহজ)
(ক) 10.5 (খ) 8.5
(গ) 7.5 (ঘ) 5.5 **গ**

ব্যাখ্যা: পরিসর, $R = |4 - (-3.5)|$
$= |4 + 3.5|$
$= 7.5$

১৫. অবিন্যস্ত উপাত্ত 0, 3, 7, 17, 30, x, 51, 70 এর আন্ত-চতুর্থক পরিসর 41.5 হলে, x এর মান হবে —— (কঠিন)
(ক) 41.5 (খ) 42
(গ) 46.5 (ঘ) 48.5 **খ**

১৬. কোনো নিবেশনের পরিসর 30 এবং সর্বোচ্চ মান 120 হলে সর্বনিম্ন মান কত? (সহজ)
(ক) 90 (খ) 80
(গ) 70 (ঘ) 60 **ক**

১৭. 5 জন ব্যক্তির ভর (কেজি) যথাক্রমে 57, 62, 67, 72, 80. যদি সর্বাপেক্ষা ভারী ব্যক্তিকে বাদ দেওয়া হয় তাহলে পরিসর কত হবে? (সহজ)
(ক) 23 (খ) 20
(গ) 18 (ঘ) 15 **ঘ**

১৮. পরম বিস্তার পরিমাপের সর্বোচ্চ মান কোনটি? (সহজ)
(ক) গড় ব্যবধান (খ) চতুর্থক ব্যবধান
(গ) পরিসর (ঘ) পরিমিত ব্যবধান **গ**

১৯. ভিন্ন এককে প্রকাশিত দুইটি তথ্যসারির তুলনা করতে উপযুক্ত পরিমাপ নিচের কোনটি? (সহজ)
(ক) ভেদাঙ্ক (খ) পরিসর
(গ) বিভেদাঙ্ক (ঘ) পরিমিত ব্যবধান **গ**

২০. পরিসর সম্পর্কে নিচের কোনটি প্রযোজ্য? (সহজ)
(ক) $R = X_{max} + X_{min}$ (খ) $R = X_{min} - X_{max}$
(গ) $R = X_{max} - X_{min}$ (ঘ) $R = \frac{X_{max} - X_{min}}{2}$ **গ**

২১. তথ্যসারির প্রতিটি মানের গড় হতে ব্যবধান নির্ণয় করে কোন পরিমাপ? (সহজ)
(ক) পরিসর (খ) গড় ব্যবধান
(গ) ভেদাঙ্ক (ঘ) বিভেদাঙ্ক **খ**

২২. কোন ক্ষেত্রে গড় ব্যবধান ব্যবহৃত হয়? (সহজ)
(ক) শেয়ার বাজারে (খ) অনুমান যাচাইয়ে
(গ) অতি বঙ্কিম বিন্যাসে
(ঘ) বাণিজ্যিক পূর্বাভাস প্রদানে **ঘ**

২৩. 6, 9, 5, 11, 30, 25 তথ্যসারির মধ্যমা কত? (সহজ)
(ক) 9 (খ) 10
(গ) 11 (ঘ) 10.5 **খ**

ব্যাখ্যা: 6 (জোড় সংখ্যা)
সুতরাং মধ্যমা $= \frac{9 + 11}{2} = 10$

২৪. 4, 6, 7, 10 তথ্যসারির গড় ব্যবধান কত? (কঠিন)
(ক) 1.75 (খ) 2
(গ) 2.5 (ঘ) 2.75 **ক**

ব্যাখ্যা: তথ্যসারির গড় = 6.75
$MD_{\bar{x}} = \frac{|-2.75| + |-0.75| + |0.25| + |3.25|}{4} = 1.75$

২৫. কোনো নিবেশনের গড় ব্যবধান 14.8 এবং গড় হতে মানগুলোর ব্যবধানের সমষ্টি 148 হলে নিবেশনে কতটি মান আছে? (মধ্যম)
(ক) 15 (খ) 10
(গ) 8 (ঘ) 5 **খ**

২৬. 1, 2, 4, 5, 5, 6, 8 তথ্যসারির প্রচুরকের সাপেক্ষে গড় ব্যবধান কত? (মধ্যম)
(ক) 2.4 (খ) 2
(গ) 1.7 (ঘ) 1.5 **গ**

২৭. বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ও সঠিক পরিমাপ কোনটি? (সহজ)
(ক) পরিসর (খ) গড় ব্যবধান
(গ) পরিমিত ব্যবধান (ঘ) চতুর্থক ব্যবধান **গ**

২৮. পরিমিত ব্যবধান কোন ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়? (সহজ)
(ক) সমাজ বিজ্ঞানে
(খ) উচ্চতর পরিসংখ্যানে
(গ) শেয়ার বাজারে
(ঘ) আবহাওয়ার পূর্বাভাস প্রদানে **খ**

২৯. 1, 2, 4, 6 তথ্যসারিরর পরিমিত ব্যবধান কত? (মধ্যম)
(ক) 1.25 (খ) 1.55
(গ) 1.75 (ঘ) 1.92 **ঘ**

৩০. 1, 2, 3......... 20 সংখ্যাগুলির পরিমিত ব্যবধান কত? (সহজ)
(ক) 5.766 (খ) 5.779
(গ) 33.25 (ঘ) 33.4 **ক**

ব্যাখ্যা: $\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} = \sqrt{\frac{20^2 - 1}{12}} = 5.766$

৩১. প্রথম ৭টি স্বাভাবিক সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান কত? (সহজ)

ⓚ 2 ⓛ 2.5

ⓖ 1.9 ⓓ 3 **ক**

৩২. $-3a, -2a, -a, a, 2a, 3a$ তথ্যসারির সংখ্যাগুলির গড় ব্যবধান কত? (কঠিন)

ক) a খ) 2a

গ) 3a ঘ) কোনটি নয় **খ**

৩৩. $-5, 0, 5$ এর পরিমিত ব্যবধান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক) 0 খ) 5

গ) 4.082 ঘ) 50 **গ**

ব্যাখ্যা: গড় $= \frac{-5+0+5}{3} = 0$

পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\frac{(0+5)^2+0+(0-5)^2}{3}}$

$= \sqrt{\frac{50}{3}}$

$= 4.082$

৩৪. $\sum x = 36, \sum x^2 = 218, n = 7$ হলে σ কোনটি? (মধ্যম)

ক) 31.2 খ) 7.1

গ) 2.17 ঘ) 4.03 **গ**

ব্যাখ্যা: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{218}{7} - \left(\frac{36}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{31.14 - 26.44} = \sqrt{4.7} = 2.17$

৩৫. $\sum x = 77, \sum x^2 = 559, n = 12$ হলে σ কোনটি? (মধ্যম)

ক) 3.51 খ) 4.37

গ) 3.74 ঘ) 2.32 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{559}{12} - \left(\frac{77}{12}\right)^2}$

$= \sqrt{46.58 - 41.17}$

$= \sqrt{5.41} = 2.32$

৩৬. $\sum x_i^2 = 80$ ও $\sum x_i = 8$ এবং $n = 4$ হলে পরিমিত ব্যবধান কত ? (মধ্যম)

ক) 4 খ) 5

গ) 6 ঘ) 7 **ক**

ব্যাখ্যা: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{80}{4} - \left(\frac{8}{4}\right)^2}$

$= 4$

৩৭. প্রথম 20টি স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাঙ্ক কত? (মধ্যম)

ক) 30 খ) 32.2

গ) 33.25 ঘ) কোনটিই নয় **গ**

৩৮. $-2a, -a, 0, a, 2a$ সংখ্যাগুলির ভেদাঙ্ক কত? (কঠিন)

ক) $2a^2$ খ) $3a^2$

গ) $5a^2$ ঘ) $4a^2$ **ক**

৩৯. 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, এর আদর্শ বিচ্যুতি —— (সহজ)

ক) 49 খ) 1

গ) 0 ঘ) 7 **গ**

ব্যাখ্যা: ধ্রুবকের ভেদাঙ্ক সর্বদা শূন্য।

৪০. $n = 5, \sum x_i = 25$ এবং $\sum x_i^2 = 250$ হলে ভেদাঙ্ক কত? (কঠিন)

ক) -10 খ) 15

গ) 20 ঘ) 25 **ঘ**

৪১. কোনো নিবেশনের $\sum(x_i - \bar{x})^2 = 30$ এবং ভেদাঙ্ক 5 হলে ঐ নিবেশনে কতটি মান আছে ? (মধ্যম)

ক) 10 খ) 8

গ) 6 ঘ) 4 **গ**

৪২. $-2a, -a, 0, a, 2a$ সংখ্যাগুলির পরিমিত ব্যবধান কত? (কঠিন)

ক) a খ) $\sqrt{2}$

গ) $a\sqrt{2}$ ঘ) 2a **গ**

ব্যাখ্যা: $\bar{x} = \frac{-2a-a+0+a+2a}{5} = 0$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (-2a)^2 + (-a)^2 + 0^2 + a^2 + (2a)^2$

$= 10a^2$

$\sigma = \sqrt{\frac{10a^2}{5}} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

৪৩. $-2a, -a, 0, a, 2a$ সংখ্যাগুলির গড় ব্যবধান কত? (মধ্যম)

ক) $\frac{4a}{5}$ খ) a

গ) $\frac{6a}{5}$ ঘ) $\frac{8a}{5}$ **গ**

৪৪. চতুর্থক ব্যবধান কোনটি? (সহজ)

ক) $\frac{Q_2 - Q_1}{2}$ খ) $\frac{Q_3 - Q_2}{2}$

গ) $\frac{Q_3 - Q_1}{4}$ ঘ) $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ **ঘ**

৪৫. তৃতীয় ও প্রথম চতুর্থকের ব্যবধানকে কী বলে? (সহজ)

ক) চতুর্থক ব্যবধান খ) পরিসর

গ) আন্তঃচতুর্থক পরিসর

ঘ) চতুর্থক পরিসর **গ**

৪৬. আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ কত প্রকার? (সহজ)

ক) 6 খ) 4

গ) 3 ঘ) 2 **খ**

৪৭. কোনটি আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ? (সহজ)
ক পরিসর খ চতুর্থক
গ বিভেদাঙ্ক ঘ ভেদাঙ্ক **গ**

৪৮. সোনার মূল্যের পরিসর 50 ও সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের যোগফল 5035 হলে পরিসরাঙ্ক কত? (মধ্যম)
ক 0.45% খ 0.78%
গ 0.89% ঘ 0.99% **ঘ**

ব্যাখ্যা: পরিসরাঙ্ক $= \frac{50}{5035} \times 100 = 0.99$

৪৯. কোনো তথ্যসারির পরিসরাঙ্ক 20%, পরিসর 20 এবং সর্বোচ্চ মান 60 হলে সর্বনিম্ন মান কত? (মধ্যম)
ক 50 খ 40
গ 35 ঘ 30 **খ**

ব্যাখ্যা: পরিসরাঙ্ক $= \frac{20}{60 + x} \times 100 = 20$

বা, $60 + x = \frac{20}{20} \times 100$

বা, $x = 40$

৫০. 2, 5, 7 উপাত্তের গড় ব্যবধানাঙ্ক কত? (মধ্যম)
ক 40.15% খ 38.12%
গ 30.17% ঘ 25.5% **খ**

ব্যাখ্যা: গড়, $\bar{x} = 4.67$;

$MD_{\bar{x}} = \frac{|-2.67| + |.33| + |2.33|}{3} = 1.78$

গড় ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{1.78}{4.67} \times 100$

$= 38.12\%$

৫১. কোনো তথ্যসারির প্রচুরক 25 এবং প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান 4.15 হলে, গড় ব্যবধানাঙ্ক কত? (মধ্যম)
ক 20% খ 19.5%
গ 18.8% ঘ 16.6% **ঘ**

ব্যাখ্যা: গড় ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{4.15}{25} \times 100 = 16.6\%$

৫২. আসাদের 15 জন বন্ধুর বয়সের গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 10 ও 2 হলে, বয়সের বিভেদাঙ্ক কত? (মধ্যম)
ক 5% খ 10%
গ 15% ঘ 20% **ঘ**

ব্যাখ্যা: $CV = \frac{2}{10} \times 100 = 20\%$

৫৩. প্রথম 13টি স্বাভাবিক সংখ্যার বিভেদাঙ্ক (CV) — (মধ্যম)
ক 53.45% খ 53%
গ 52.5% ঘ কোনটিই নয় **ক**

৫৪. 25 এবং 29 সংখ্যা দুইটির বিভেদাঙ্ক (C.V) কত? (মধ্যম)
ক 6% খ 6.9%
গ 7% ঘ 7.4% **ঘ**

৫৫. কোনো নিবেশনের $Q_1 = 5$ এবং $Q_3 = 25$ হলে, চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক কত? (মধ্যম)
ক 66.67% খ 60.67%
গ 58.57% ঘ 56.65% **ক**

ব্যাখ্যা: চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

$= \frac{25 - 5}{25 + 5} \times 100$

$= \frac{20}{30} \times 100$

$= 66.67\%$

৫৬. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাঙ্ক কোনটি? (সহজ)
ক $\frac{n^2 - 1}{12}$ খ $\frac{n^2 + 1}{12}$
গ $\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$ ঘ $\frac{n - 1}{12}$ **ক**

৫৭. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গড় নিচের কোনটি? (সহজ)
ক $\frac{2n + 1}{2}$ খ $\frac{n + 1}{2}$
গ $\frac{3n + 1}{2}$ ঘ $\frac{4n + 1}{2}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{n(n + 1)}{2.n} = \frac{n + 1}{2}$

৫৮. 5, 7, 3, 2, 3 উপাত্তগুলির গড় কত? (সহজ)
ক 3.5 খ 4
গ 4.2 ঘ কোনটিই নয় **খ**

ব্যাখ্যা: গড়, $\bar{x} = \frac{5 + 7 + 3 + 2 + 3}{5} = \frac{20}{5} = 4$

৫৯. প্রথম 99টি স্বাভাবিক সংখ্যার গাণিতিক গড় কত? (মধ্যম)
ক 45 খ 50
গ 50.25 ঘ 52 **খ**

৬০. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা বিভেদাঙ্ক কোনটি? (মধ্যম)
ক $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n - 1}{n + 1}} \times 100$
খ $\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{n + 1}{n - 1}} \times 100$
গ $\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{n - 1}{n + 1}} \times 100$
ঘ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n + 1}{n - 1}} \times \times 100$ **গ**

৬১. দুইটি সংখ্যার গাণিতিক গড় 10 এবং ভেদাঙ্ক 4 হলে, সংখ্যাদ্বয় কত? (কঠিন)

ⓚ 6 ও 10 ⓚ 8 ও 12

ⓖ 10 ও 16 ⓖ 12 ও 16 **খ**

ব্যাখ্যা: ধরা হলো সংখ্যাদ্বয় x_1 ও x_2.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 = 20 \text{ .... (i)}$$

$$\sigma = \frac{\text{পরিসর}}{2} \Rightarrow 2 = \frac{|x_1 - x_2|}{2} \Rightarrow x_1 - x_2 = 4 \text{ ...... (ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে, $x_1 = 12$; $x_2 = 8$

৬২. 7, 12, 17, 22, ..., 102 রাশিগুলোর ভেদাঙ্ক কত? (কঠিন)

ⓚ 880.25 ⓚ 850.75

ⓖ 845.87 ⓖ 831.25 **ঘ**

ব্যাখ্যা: ধরি নতুন চলক, $u_i = \frac{x_i - 2}{5}$ এর মানগুলো 1, 2, 3, ..., 20

$$\sigma_u^2 = \frac{n^2 - 1}{12} = \frac{(20)^2 - 1}{12} = \frac{399}{12}$$

$$\therefore \sigma_x^2 = (5)^2 \times \frac{399}{12} = 831.25$$

৬৩. দশটি রাশির সমষ্টি 100 এবং বর্গের সমষ্টি 1250 হলে, তাদের ভেদাঙ্ক কত? (মধ্যম)

ⓚ 49 ⓚ 36

ⓖ 25 ⓖ 16 **গ**

৬৪. আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ—

i. দুই বা ততোধিক উপাত্তের মধ্যে তুলনা করার জন্য ব্যবহৃত হয়

ii. একই উপাত্তের সংখ্যাত্মক মানসমূহের মধ্যক মান থেকে দূরত্ব নির্ণয়ে ব্যবহৃত হয়

iii. একটি এককবিহীন সংখ্যা

নিম্নের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii **খ**

৬৫. গড় ব্যবধান ব্যবহৃত হয় —

i. অর্থনৈতিক পূর্বাভাস প্রদানে।

ii. সুদের হার নির্ণয়ে।

iii. সমাজবিজ্ঞানে।

নিম্নের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii **খ**

৬৬. গড় ব্যবধান নির্ণয় করা যায়—

i. গাণিতিক গড় থেকে

ii. মধ্যমা থেকে

iii. প্রচুরক থেকে

নিম্নের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii **ঘ**

৬৭. 18, 20, 24, 35 তথ্যসারির ক্ষেত্রে —

i. $MD_{\bar{x}} > MD_{me}$

ii. $MD_{mo} = 0$

iii. $MD_{\bar{x}} > MD_{me} > MD_{mo}$

নিম্নের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii **ঘ**

৬৮. পরিমিত ব্যবধান—

i. নিবেশনের সকল মানের উপর নির্ণীত

ii. এ বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া আরোপ করা হয়

iii. চরম মান দ্বারা প্রভাবিত হয় না

নিম্নের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii **ক**

৬৯. পরিমিত ব্যবধান—

i. ভেদাঙ্কের বর্গমূলের ধনাত্মক মান

ii. ভেদাঙ্কের বর্গমূলের ঋণাত্মক মান

iii. মূল গড় বর্গ ব্যবধানের চেয়ে বড় হতে পারে না

নিম্নের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii **খ**

৭০. 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15 তথ্যসারির —

i. চতুর্থক ব্যবধান 4

ii. আন্তঃচতুর্থক পরিসর 8

iii. তৃতীয় চতুর্থক 12

নিম্নের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii **ক**

৭১. বিভেদাঙ্ক—

i. শতকরায় প্রকাশিত হয়।

ii. দুইটি উপাত্তের সামঞ্জস্যতা তুলনায় ব্যবহৃত হয়।

iii. কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না।

নিম্নের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii **ঘ**

৭২. ভেদাঙ্ক—
i. ঋণাত্মক হতে পারে না
ii. পরিমিত ব্যবধানের বর্গ
iii. কৃষি ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়
নিম্নের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

10 জন ব্যক্তির বয়স (বছরে) দেওয়া হলো:
10, 12, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 40, 48
উদ্দীপকের আলোকে (৭৩-৭৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৭৩. 10 জন ব্যক্তির বয়সের পরিসর কত? (সহজ)
ক 38 খ 40
গ 42 ঘ 48 **ক**

ব্যাখ্যা: $R = X_{max} - X_{min} = 48 - 10 = 38$

৭৪. নিবেশনের মানগুলোর ঊর্ধ্বক্রমানুসারে কত জন ব্যক্তির বয়সের পরিসর 15 হবে? (মধ্যম)
ক 8 খ 6
গ 5 ঘ 3 **খ**

ব্যাখ্যা: পরিসর, $15 = X_{max} - 10$
বা, $X_{max} = 15 + 10 = 25$
এখানে, 25 হলো ষষ্ঠ পদ সুতরাং প্রথম 6 জনের বয়সের পরিসর 15।

৭৫. নিবেশনের উভয়পাশের প্রান্তীয় মান থেকে 20% বাদ দিলে পরিসর কত হবে? (মধ্যম)
ক 38 খ 28
গ 10 ঘ 8 **ঘ**

ব্যাখ্যা: উভয়পাশ থেকে 20% অর্থাৎ $\frac{20 \times 10}{100}$ = 2টি মান বাদ দিলে নিবেশনটি দাঁড়ায় 20, 22, 24, 25, 26, 28. নতুন নিবেশনের পরিসর = 28 − 20 = 8.

দুইটি সংখ্যা − 60 এবং − 100 এর ক্ষেত্রে (৭৬ ও ৭৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৭৬. প্রদত্ত সংখ্যা দুইটির পরিসর কত? (সহজ)
ক 30 খ 35
গ 40 ঘ 42 **গ**

৭৭. প্রদত্ত সংখ্যা দুইটির পরিমিত ব্যবধান কত? (কঠিন)
ক 16 খ 20
গ 21 ঘ 25 **খ**

উদ্দীপকের আলোকে (৭৮ ও ৭৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
অশ্রেণিকৃত উপাত্ত 12, −5, 0, 7, 2, −9, 5.

৭৮. উপাত্তগুলির পরিসর নিচের কোনটি? (সহজ)
ক −21 খ −3
গ 3 ঘ 21 **ঘ**

ব্যাখ্যা: 12 − (−9) = 12 + 9 = 21

৭৯. উপাত্তগুলির —
i. ১ম চতুর্থক (−5)
ii. ৩য় চতুর্থক 7
iii. চতুর্থক ব্যবধান 1.
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ইন্টারনেট গ্রাহকদের প্রতি ই-মেইল পাঠাতে যে সময় (সেকেন্ড) লাগে তার একটি উপাত্ত দেওয়া হলো:

সময়	5-10	10-15	15-20	20-25
গ্রাহক সংখ্যা	5	7	12	8

উপরের উদ্দীপকের আলোকে (৮০-৮১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৮০. গ্রাহকদের ই-মেইল পাঠাতে গড়ে কত সময় লাগে? (কঠিন)
ক 17.5 খ 16.1
গ 15.7 ঘ 15.2 **খ**

ব্যাখ্যা: গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$
$= \frac{(7.5 \times 5) + (12.5 \times 7) + (17.5 \times 12) + (22.5 \times 8)}{32}$
$= 16.1$

৮১. প্রচুরক হতে নির্ণীত সময়ের গড় ব্যবধান কত? (কঠিন)
ক 4.15 খ 4.1
গ 4.05 ঘ 4.005 **গ**

ব্যাখ্যা: প্রচুরক, $M_{mo} = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$
$= 15 + \frac{(12-7)}{(12-7)+(12-8)} \times 5$
$= 17.78$
$MD_{mo} = \frac{5|-10.28| + 7|-5.28| + 12|-0.28| + 8|4.72|}{32}$
$= 4.05$

উপাত্তটি লক্ষ্য কর—

শ্রেণিব্যাপ্তি	10–20	20–30	30–40
গণসংখ্যা	5	10	4

উপরের উদ্দীপকের আলোকে ৮২ ও ৮৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

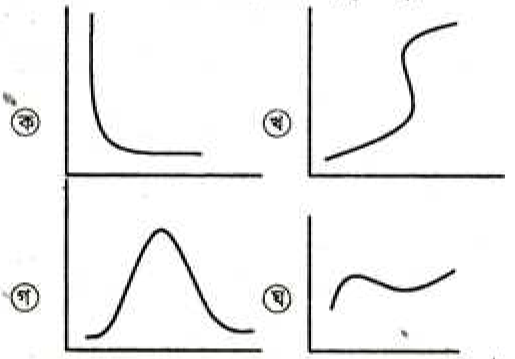
৮২. নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান কত? (কঠিন)
ক 10.45 খ 8.25
গ 6.86 ঘ 4.56 **গ**

ব্যাখ্যা: গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = 24.5;$

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{5(-9.5)^2 + 10(0.5)^2 + 4(10.5)^2}{19}} = 6.86$$

৮৩. নিবেশনটির লেখচিত্র কোনটি? (কঠিন)



উত্তর: গ

নিচের তথ্যের আলোকে ৮৪ ও ৮৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

10টি সংখ্যার সমষ্টি 100 এবং তাদের বর্গের সমষ্টি 1250।

৮৪. সংখ্যা 10টির পরিমিত ব্যবধান কত? (মধ্যম)

ক 12.50　খ 10

গ 5　ঘ 125　উত্তর: গ

৮৫. যদি আগের সংখ্যা 10টির সাথে 10 নেওয়া হয়, তবে —

i. 11টি সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান বাড়বে

ii. 11টি সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান কমবে

iii. 11টি সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান একই থাকবে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i　খ ii

গ iii　ঘ কোনোটিই নয়　উত্তর: খ

তথ্যসারিটি লক্ষ করো: 12, 15, 17, 20, 22, 25, 27

উপরের তথ্যসারির আলোকে (৮৬ ও ৮৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৮৬. তথ্যসারির মধ্যমা কত তম পদ? (সহজ)

ক ২য়　খ ৪র্থ

গ ৫ম　ঘ ৬ষ্ঠ　উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: মধ্যমা, $Q_2 = 20$ যা ৪র্থ পদ

৮৭. তথ্যসারির আন্তঃচতুর্থক ব্যবধান কত? (মধ্যম)

ক 10　খ 8

গ 6　ঘ 5　উত্তর: ক

ব্যাখ্যা: $Q_1 = \frac{7+1}{4}$ তম পদ $= 15$; $Q_2 = 20$;

$Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$ তমপদ $= 25$

এখন, $Q_3 - Q_1 = 25 - 15 = 10$

তিন দিনের প্রতি গ্রাম সোনার মূল্য দেওয়া হলো:

রবিবার	সোমবার	মঙ্গলবার
6100.00	6200.00	6160.00

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে (৮৮ ও ৮৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৮৮. সোনার মূল্যের পারসর কোনটি? (সহজ)

ক 120　খ 110

গ 105　ঘ 100　উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: পরিসর $= x_L - x_S$

= সর্বোচ্চমান – সর্বনিম্ন মান

$= 6200 - 6100 = 100$

৮৯. সোনার মূল্যের পরিসরাঙ্ক কোনটি? (মধ্যম)

ক 08　খ 0.81

গ 0.83　ঘ 0.85　উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: পরিসরাঙ্ক $= \frac{x_L - x_S}{x_L + x_s}$

$= \frac{100}{6200 + 6100} \times 100$

$= 0.81\%$

গাজীপুরে একই দ্রব্য উৎপাদনের সাথে সংশ্লিষ্ট দুটি কারখানা A ও B তে গড় বেতন ও বেতনের পরিমিত ব্যবধান দেওয়া হলো:

কারখানা	গড় বেতন	পরিমিত ব্যবধান
A	70	10
B	60	5

উপরের তথ্যের আলোকে (৯০ ও ৯১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৯০. A কারখানার বেতনের বিভেদাঙ্ক কত? (মধ্যম)

ক 14.00%　খ 14.29%

গ 14.50%　ঘ 14.79%　উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: $CV_A = \frac{s}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10}{70} \times 100 = 14.29\%$

৯১. কোন কারখানার শ্রমিকেরা অধিকতর সামঞ্জস্যপূর্ণ বেতন পায়? (কঠিন)

ক A　খ B

গ সমান বেতন পায়　ঘ তুলনা করা কঠিন　উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: $CV_B = \frac{5}{60} \times 100 = 8.33\%$

এবং $CV_A = 14.29\%$

এখানে, $CV_B < CV_A$, সুতরাং B কারখানার শ্রমিকরা অধিকতর সামঞ্জস্যপূর্ণ বেতন পায়।

নিচের তথ্যসারির আলোকে (৯২ ও ৯৩)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

5, 7, 0, –3, 11, 25, 17, 4, 20, 26

৯২. তথ্যসারির চতুর্থক ব্যবধান কত? (সহজ)

ক 12　খ 10

গ 8　ঘ 6　উত্তর: গ

৯৩. তথ্যসারির চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক কত? (মধ্যম)

ক 99.67%　খ 66.67%

গ 57.67%　ঘ 37.67%　উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

$= \frac{16}{24} \times 100 = 66.67\%$

পাঁচটি সংখ্যামানের গড় 6 এবং ভেদাঙ্ক 8; তাদের মধ্যে তিনটি সংখ্যামান যথাক্রমে 2, 6 ও 8।

উপরের তথ্যের আলোকে (৯৪ ও ৯৫)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৯৪. উদ্দীপকের প্রদত্ত সংখ্যা তিনটির ভেদাঙ্ক কত? (মধ্যম)

ⓚ 6.22 ⓚ 8.22

ⓖ 10.22 ⓖ 12.22 — ক

৯৫. অপর সংখ্যা দুইটি কত? (কঠিন)

ক 3 ও 8 খ 4 ও 10

গ 4 ও 12 ঘ 5 ও 10 — খ

★ সম্ভাবনার ধারণা, সম্ভাবনার সাথে সম্পর্কিত প্রয়োজনীয় ধারণা

৯৬. কেনিয়া দলের সাথে ক্রিকেট খেলায় বাংলাদেশ দলের জয়ের নিশ্চয়তা 90%. এখানে 90% কী? (সহজ)

ক বিভেদাঙ্ক খ পরিসরাঙ্ক

গ সম্ভাবনা ঘ গড় ব্যবধানাঙ্ক — গ

৯৭. আগামীকাল সূর্য না ওঠার সম্ভাবনা কত? (সহজ)

ক 100% খ 75

গ 1 ঘ 0 — ঘ

৯৮. একটি মুদ্রা যদি কতগুলো শর্তে বার বার নিক্ষেপ করা হয় তবে মুদ্রা নিক্ষেপকে কী বলা হবে? (সহজ)

ক চেষ্টা খ পরীক্ষা

গ ঘটনা ঘ নমুনাক্ষেত্র — খ

৯৯. নিশ্চিত ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা সর্বদা — (সহজ)

ক 0 খ 1

গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{2}{3}$ — খ

১০০. অসম্ভব ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা সর্বদা — (সহজ)

ক 0 খ 1

গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{2}{3}$ — ক

১০১. যদি A এবং B ঘটনা দুটি বিচ্ছিন্ন না হয় (অবর্জনশীল) অর্থাৎ A এবং B এর কিছু সাধারণ উপাদান থাকে, তাহলে $P(A \cup B) = ?$ (সহজ)

ক $P(A) + P(B)$ খ $P(A) \cup P(B)$

গ $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ঘ $P(A) + P(B) + P(A \cap B)$ — গ

১০২. একটি মুদ্রা 5 বার নিক্ষেপ করা হলে, প্রতিটি নিক্ষেপকে কী বলে? (সহজ)

ক পরীক্ষা খ চেষ্টা

গ ঘটনা ঘ নমুনা বিন্দু — খ

১০৩. কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফলের সেটকে কী বলা হয়? (সহজ)

ক নমুনাবিন্দু খ দৈব পরীক্ষা

গ নমুনাক্ষেত্র ঘ চেষ্টা — গ

১০৪. এক দম্পতি তিনটি সন্তান নেওয়ার সিদ্ধান্ত নিল। ছেলে ও মেয়ে সন্তান হওয়ার সম্ভাবনা সমান। তাদের দুইটি মেয়ে ও পরে একটি ছেলে হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{3}{8}$ খ $\frac{1}{2}$

গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{1}{3}$ — গ

১০৫. একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করলে নমুনা বিন্দু কয়টি? (সহজ)

ক 2 খ 3

গ 4 ঘ 8 — গ

১০৬. নমুনাক্ষেত্রের উপসেটকে কী বলা হয়? (সহজ)

ক চেষ্টা খ পরীক্ষা

গ নমুনা ঘ ঘটনা — ঘ

১০৭. A ও B দু'টি বর্জনশীল ঘটনা হলে কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক $A \cap B = \varnothing$ খ $A \cap B \neq \varnothing$

গ $A \cup B = \varnothing$ ঘ $A \cup B \neq \varnothing$ — ক

১০৮. একটি ছক্কা নিক্ষেপে—

i. জোড় সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা {2, 4, 6}

ii. বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা {1, 3, 5}

iii. নমুনা বিন্দু 4টি

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii — ক

১০৯. একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপে—

i. 5 পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$

ii. বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভবনা $\frac{1}{3}$

iii. জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভবনা $\frac{1}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii — খ

১১০. একটি মুদ্রা 4 বার নিক্ষেপ করা হলে—

i. এই কাজকে পরীক্ষা বলে।

ii. প্রতিটি ফলাফলের সাথে সম্ভাবনা যুক্ত থাকে।

iii. প্রতিটি ফলাফলই হচ্ছে এক একটি নমুনাবিন্দু।

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii — ঘ

১১১. ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায়, A = {2, 4, 6} এবং B = {1, 3, 5} হলে—
i. A ও B বর্জনশীল
ii. A ও B অবর্জনশীল
iii. A জোড় সংখ্যা পড়ার ঘটনা
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

১১২. ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায়—
i. A = {2, 4, 6} ও B = {3, 6} হলে A ও B অবর্জনশীল
ii. B = {1, 3, 6} হলে, B বিজোড় সংখ্যা পড়ার ঘটনা
iii. নমুনাক্ষেত্র, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

একটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। উপরের তথ্যের আলোকে (১১৩–১১৪)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

১১৩. মোট সম্ভাব্য ফলাফল কতটি? (মধ্যম)
ক 10 খ 12
গ 16 ঘ 20 **খ**

১১৪. নমুনাক্ষেত্র কোনটি? (মধ্যম)
ক $\left\{\begin{matrix} H1, H3, H5 \\ T2, T4, T6 \end{matrix}\right\}$
খ {HT1, HT2, HT3, HT4, HT5, HT6}
গ $\left\{\begin{matrix} H1, H2, H3, H4, H5, H6 \\ T1, T2, T3, T4, T5, T6 \end{matrix}\right\}$
ঘ {T1, T2, T3, T4, T5, T6} **গ**

★★ একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাবনা নির্ণয়

১১৫. একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে 3 পড়ার সম্ভাবনা কত? (সহজ)
ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{6}$
গ $\frac{1}{7}$ ঘ $\frac{1}{8}$ **খ**

১১৬. দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। উভয় ছক্কায় একই সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)
ক $\frac{5}{6}$ খ $\frac{2}{3}$
গ $\frac{1}{6}$ ঘ $\frac{1}{3}$ **গ**

১১৭. একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করা হলে উভয়ক্ষেত্রে টেল আসার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)
ক 0.25 খ .5
গ 0.75 ঘ 1 **ক**

১১৮. একটি নিটাল মুদ্রা ও একটি নিটাল ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। একই সঙ্গে মুদ্রাটির হেড (H) ও ছক্কাটির জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা — (কঠিন)
ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{3}$
গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{1}{5}$ **গ**

১১৯. দুইটি ছক্কা একই সঙ্গে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত বিন্দুর সমষ্টি 7 হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)
ক $\frac{1}{6}$ খ $\frac{1}{36}$
গ $\frac{5}{36}$ ঘ $\frac{7}{36}$ **ক**

ব্যাখ্যা: (4, 3), (6, 1), (5, 2), (3, 4), (1, 6), (2, 5) = 6টি
মোট = 36; সমষ্টি 7 হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

১২০. তিনটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হল। তিনটিতেই একই সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)
ক $\frac{1}{18}$ খ $\frac{1}{6}$
গ $\frac{1}{216}$ ঘ $\frac{1}{36}$ **ঘ**

১২১. একটি মুদ্রা পরপর তিনবার টস করা হলে পর্যায়ক্রমে হেড এবং টেইল পাবার সম্ভাবনা — (মধ্যম)
ক $\frac{1}{4}$ খ $\frac{1}{2}$
গ $\frac{1}{8}$ ঘ কোনটিই নয় **ক**

১২২. একটি ছক্কা পরপর দুইবার নিক্ষেপ করা হলে কেবল প্রথমবার ছয় উঠার সম্ভাবনা — (মধ্যম)
ক $\frac{1}{36}$ খ $\frac{1}{6}$
গ $\frac{5}{36}$ ঘ $\frac{5}{6}$ **গ**

ব্যাখ্যা: মোট নমুনা বিন্দু = 36 টি
অনুকূল নমুনা বিন্দু 5টি (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)
∴ সম্ভাবনা = $\frac{5}{36}$

১২৩. দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। দ্বিতীয় ছক্কায় প্রাপ্ত সংখ্যা প্রথম সংখ্যায় প্রাপ্ত সংখ্যার দ্বিগুণ হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)
ক $\frac{1}{12}$ খ $\frac{1}{8}$
গ $\frac{1}{6}$ ঘ $\frac{1}{2}$ **ক**

ব্যাখ্যা: মোট নমুনাবিন্দু = 36টি
অনুকূল নমুনাবিন্দুগুলো হলো (1, 2), (2, 4), (3, 6)
∴ সম্ভাবনা = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

১২৪. একটি অধিবর্ষে 53টি রবিবার থাকার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)
ক $\frac{53}{360}$ খ $\frac{53}{365}$
গ $\frac{1}{7}$ ঘ $\frac{2}{7}$ **ঘ**

১২৫. একজন লোকের আরো 10 বছর বাঁচার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$ এবং তার স্ত্রীর সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$। 10 বছরে তাদের কারো বেঁচে না থাকার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{1}{12}$ (খ) $\frac{5}{12}$

(গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{11}{12}$ **গ**

১২৬. একটি সমস্যা সমাধান করতে পারার ক্ষেত্রে A এর সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$ এবং B এর সম্ভাবনা $\frac{5}{12}$ হলে তারা একত্রে সমস্যাটি সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{13}{84}$ (খ) $\frac{5}{28}$

(গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{71}{84}$ **গ**

১২৭. চারটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে সব কয়টিতে একই সংখ্যা পাবার সম্ভাবনা— (মধ্যম)

(ক) $\frac{1}{216}$ (খ) $\frac{1}{120}$

(গ) $\frac{1}{48}$ (ঘ) $\frac{1}{41}$ **ক**

১২৮. একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে যে সংখ্যাটি উঠবে তা-2 এর চেয়ে বড় এবং জোড় হবার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{1}{3}$

(গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{5}{6}$ **খ**

১২৯. দুইটি ছক্কার নিক্ষেপে ছক্কা দুইটির পৃষ্ঠের সংখ্যার সমষ্টি 9 হবার সম্ভাবনা— (কঠিন)

(ক) $\frac{1}{6}$ (খ) $\frac{1}{8}$

(গ) $\frac{1}{9}$ (ঘ) $\frac{1}{12}$ **গ**

১৩০. তিনটি নিটোল মুদ্রা টস করা হলে বড়জোর দুইটি হেড (H) পাবার সম্ভাবনা — (মধ্যম)

(ক) $\frac{3}{4}$ (খ) $\frac{1}{4}$

(গ) $\frac{3}{8}$ (ঘ) $\frac{7}{8}$ **ঘ**

১৩১. একটি নিরপেক্ষ মুদ্রাকে দুইবার নিক্ষেপ করা হলে কমপক্ষে 1টি H আসার সম্ভাবনা— (মধ্যম)

(ক) $\frac{1}{4}$ (খ) $\frac{2}{4}$

(গ) $\frac{3}{4}$ (ঘ) $\frac{4}{4}$ **গ**

১৩২. একটি লুডুর গুটি নিক্ষেপ করে 7 অঙ্কিত পৃষ্ঠ উপরে পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? (সহজ)

(ক) 0 (খ) 1

(গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{2}{3}$ **ক**

১৩৩. A ও B দুইটি স্বাধীন ঘটনা এবং P(A) = 0.3, $P(A \cup B) = 0.8$ হলে P(B) = ? (মধ্যম)

(ক) $\frac{6}{25}$ (খ) $\frac{3}{8}$

(গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{5}{7}$ **ঘ**

১৩৪. P(A) = 0.2, P(B) = 0.4 এবং A ও B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হলে P(A|B) এর মান — (মধ্যম)

(ক) 0.2 (খ) 0.5

(গ) 0.08 (ঘ) কোনোটিই নয় **ক**

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, P(A) = 0.2, P(B) = 0.4

$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)}$ [∵ ঘটনাদ্বয় স্বাধীন]

$= \frac{0.08}{0.4} = 0.2$

১৩৫. 40 হতে 50 সংখ্যাগুলি থেকে দৈবচয়নে একটি সংখ্যা নেয়া হলো। সংখ্যাটি মৌলিক না হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{8}{11}$ (খ) $\frac{5}{11}$

(গ) $\frac{3}{11}$ (ঘ) $\frac{1}{11}$ **ক**

১৩৬. 10 থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যেকোন একটি সংখ্যা নিলে সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

(ক) $\frac{5}{21}$ (খ) $\frac{7}{21}$

(গ) $\frac{9}{22}$ (ঘ) $\frac{11}{21}$ **ঘ**

১৩৭. একজন বন্দুক চালনাকারীর গুলি লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করার সম্ভাবনা 0.8। যদি সে পরপর তিনবার গুলি চালায় তবে পর্যায়ক্রমে সফলতা ও ব্যর্থতার অথবা ব্যর্থতা ও সফলতার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

(ক) 0.65 (খ) 0.56

(গ) 0.20 (ঘ) 0.16 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $0.8 \times 0.2 \times 0.8 + 0.2 \times 0.8 \times 0.2 = 0.16$

১৩৮. A = {2, 3, 4, 7, 9, 10} এবং B = {3, 6, 9, 12}. A সেট হতে একটি সংখ্যা দৈব পদ্ধতিতে বেছে নিলে সংখ্যাটি $A \cap B$ তে থাকার সম্ভাব্যতা কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{1}{4}$ (খ) $\frac{1}{3}$

(গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{2}{3}$ **খ**

১৩৯. 1 থেকে 520 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি থেকে দৈবচয়নে একটি সংখ্যা চয়ন করা হলে সংখ্যাটি অযুগ্ম ঘনসংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা — (মধ্যম)

(ক) $\frac{1}{65}$ (খ) $\frac{2}{65}$

(গ) $\frac{1}{64}$ (ঘ) $\frac{1}{130}$ **ঘ**

১৪০. পুনরাবৃত্তি না করে 2, 4, 7, 9, 3, 8 অঙ্কগুলি ব্যবহার করে দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা বানানো হলে সংখ্যাটির জোড় হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ⓚ 0.25 ⓛ 0.50
ⓖ 0.75 ⓘ 1

উত্তর: খ

১৪১. একজন চাকুরী প্রার্থী তিনটি ভিন্ন ভিন্ন প্রতিষ্ঠানে চাকুরীর জন্য আবেদন করেন। জানুয়ারি মাসের তিনটি ভিন্ন ভিন্ন দিনে তার নির্বাচনি পরীক্ষা হবে এমন সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক 1.0 খ 0.992
গ 0.905 ঘ কোনটিই নয়

উত্তর: গ

১৪২. 100 থেকে শুরু করে 999 পর্যন্ত সংখ্যাগুলির মধ্য থেকে একটি পূর্ণসংখ্যা নেওয়া হলো। সংখ্যাটির সবগুলি অঙ্ক বিজোড় হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{25}{102}$ খ $\frac{5}{36}$
গ $\frac{5}{102}$ ঘ $\frac{25}{36}$

উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: 1 হতে 9 পর্যন্ত বিজোড় অঙ্ক 5টি

∴ সম্ভাব্যতা $= \frac{5^3}{900} = \frac{125}{900} = \frac{5}{36}$

১৪৩. ইমন ও শারমিন দ্বাদশ শ্রেণিতে পড়ে। তারা তাদের গণিত বইয়ের যথাক্রমে 75% ও 80% প্রশ্ন সমাধান করতে পারে। দৈবভাবে নেয়া একটি গণিতের প্রশ্ন ইমন অথবা শারমিনের পক্ষে সমাধান করার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{20}$ খ $\frac{9}{20}$
গ $\frac{11}{20}$ ঘ $\frac{19}{20}$

উত্তর: ঘ

১৪৪. তিনজন ছাত্র A, B, C এর একটি সমস্যা সমাধানের সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ হলে তারা একত্রে সমস্যাটি সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{4}$ খ $\frac{3}{4}$
গ $\frac{1}{24}$ ঘ $\frac{23}{24}$

উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: একত্রে না পারার সম্ভাবনা $= \left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

∴ একত্রে পারার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

১৪৫. দুই অংকবিশিষ্ট একটি সংখ্যা দৈবভাবে নির্বাচন করলে তা 3-এর এবং গুণিতক এবং 5-এর গুণিতক না হবার সম্ভাবনা — (কঠিন)

ক $\frac{4}{15}$ খ $\frac{3}{60}$
গ $\frac{1}{25}$ ঘ $\frac{2}{15}$

উত্তর: ক

১৪৬. 1 থেকে 99 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি হতে দৈবচয়নে একটি সংখ্যা নেয়া হলে সংখ্যাটি বর্গ সংখ্যা হবার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{11}$ খ $\frac{10}{99}$
গ $\frac{4}{33}$ ঘ $\frac{1}{10}$

উত্তর: ক

১৪৭. একটি কোম্পানিতে 25% মহিলা। নিরপেক্ষভাবে একজন কর্মী বাছাই করলে তার পুরুষ হবার সম্ভাবনা কত? (সহজ)

ক 75% খ 75
গ 1 ঘ $\frac{3}{4}$

উত্তর: ঘ

১৪৮. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে যদি জোড় সংখ্যা উঠে তাহলে সংখ্যাটি মৌলিক হবার সম্ভাবনা— (মধ্যম)

ক $\frac{1}{6}$ খ $\frac{1}{3}$
গ $\frac{1}{2}$ ঘ এদের একটিও নয়

উত্তর: খ

১৪৯. শ্রাবণ মাসের প্রথমদিন বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা 0.85 হলে; ঐ দিন বৃষ্টি না হবার সম্ভাবনা কত? (সহজ)

ক 0.25 খ 0.15
গ $\frac{3}{20}$ ঘ 0.5

উত্তর: খ

১৫০. 1 থেকে 15 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির যে কোনো একটি সংখ্যা নির্বাচন করলে ঐ সংখ্যাটি 4-এর গুণিতক হবার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{4}{5}$ খ $\frac{4}{15}$
গ $\frac{1}{3}$ ঘ $\frac{1}{5}$

উত্তর: ঘ

১৫১. দুইটি পাশা শূন্যে নিক্ষেপ করা হলে—

i. সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল 6 হবার সম্ভাবনা $\frac{1}{9}$

ii. প্রথম পাশার সংখ্যা দ্বিতীয় পাশার দ্বিগুণ হবার সম্ভাবনা $\frac{1}{12}$

iii. নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা 36

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ

১৫২. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ হলে—

i. $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$, যখন A ও B স্বাধীন

ii. $P(A^c) = \frac{2}{3}$

iii. $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$, যখন A ও B বর্জনশীল

উপরের বাক্যগুলির মধ্যে কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ⓚ ii ও iii

ⓖ i ও iii ⓖ i, ii ও iii **ঘ**

১৫৩. **একটি ছক্কার গুটি নিক্ষেপ করা হলে—**

i. 5 পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{6}$

ii. জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$

iii. 3 না পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{6}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: জোড় সংখ্যাগুলো হল 2, 4, 6

∴ জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3 না পাওয়ার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

১৫৪. **দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে—**

i. নমুনাক্ষেত্র = {HH, HT, TH, TT}

ii. অন্তত একটি টেইল পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4}$

iii. দুইটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১৫৫. **একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করলে—**

i. মুদ্রায় হেড পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$

ii. ছক্কায় জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$

iii. ছক্কায় 5 পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{12}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

১৫৬. **একই সাথে তিনটি ছক্কাগুঁটি নিক্ষেপ করা হলো। সুতরাং—**

i. $P(3টি\ 6) = \frac{1}{6}$ ii. $P(3টি\ 6) = \frac{1}{216}$

iii. $P(3টি\ 1) = \frac{1}{216}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i খ ii

গ iii ঘ ii ও iii **ঘ**

১৫৭. **দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করলে—**

i. প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 11 হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{11}{36}$

ii. দুইটি চার না উঠার সম্ভাবনা $= \frac{35}{36}$

iii. দুইটি একই সংখ্যা উঠার সম্ভাবনা $= \frac{1}{6}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

ব্যাখ্যা: নমুনা বিন্দু = 36টি

সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 11 হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

দুইটি চার না উঠার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

দুইটি একই সংখ্যা উঠার সম্ভাবনা $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

নিচের তথ্যের আলোকে (১৫৮ ও ১৫৯) প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হল।

১৫৮. **জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা A = {2, 4, 6} হলে, A^C কত হবে?** (মধ্যম)

ক {2, 3} খ {1, 3, 4}

গ {1, 2, 3} ঘ {1, 3, 5} **ঘ**

১৫৯. **3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত?** (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{3}$

গ $\frac{2}{3}$ ঘ $\frac{2}{5}$ **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে ১৬০ ও ১৬১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল।

১৬০. **ছক্কায় 5 না উঠার সম্ভাবনা কত?** (মধ্যম)

ক $\frac{5}{8}$ খ $\frac{5}{6}$

গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{7}{8}$ **খ**

১৬১. **দুইটি হেড না পাওয়ার সম্ভাবনা কত?** (মধ্যম)

ক $\frac{1}{12}$ খ $\frac{11}{12}$

গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{3}{4}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: দুইটি হেড না পাওয়ার সম্ভাবনা

$= \left(1 - \frac{6}{24}\right) = \frac{3}{4}$

★★ পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্রসমূহ

১৬২. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$ হলে A ও B ঘটনাদ্বয় কীরূপ? (মধ্যম)

ক স্বাধীন খ বর্জনশীল
গ অবর্জনশীল ঘ নির্ভরশীল **খ**

ব্যাখ্যা: $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$
$= \frac{7}{10} = P(A \cup B)$

১৬৩. A ও B ঘটনাদ্বয় অবর্জনশীল হলে এবং B = {3, 6} হলে A নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক {1, 5} খ {2, 4}
গ {1, 2, 4} ঘ {2, 4, 6} **ঘ**

ব্যাখ্যা: A = {2, 4, 6} হলে $A \cap B = \{6\} \neq \phi$ তখন A ও B অবর্জনশীল।

১৬৪. A ও B ঘটনা দুইটি পরস্পর বর্জনশীল হলে, তাদের যেকোনো একটি ঘটার সম্ভাবনা $P(A \cup B)$ হবে — (সহজ)

ক P(A).P(B) খ P(A) + P(B)
গ P(A+.B) ঘ P(A).P(B/A) **খ**

ব্যাখ্যা: বর্জনশীল ঘটনার শর্তানুসারে।

১৬৫. $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{9}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ হলে A ও B ঘটনাদ্বয় কেমন হবে? (মধ্যম)

ক স্বাধীন খ অধীন
গ বর্জনশীল ঘ অবর্জনশীল **ক**

১৬৬. একটি তাসের প্যাকেটে 52 খানা তাস আছে। তা হতে 2 খানা তাস টানা হলে তাস দুইটি একই রঙের রাজা হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{3}{663}$ খ $\frac{2}{663}$
গ $\frac{1}{663}$ ঘ $\frac{1}{600}$ **গ**

ব্যাখ্যা: P(2টি লাল রাজা) + P(2টি কালো রাজা)
$= \frac{^2C_2}{^{52}C_2} + \frac{^2C_2}{^{52}C_2} = \frac{1}{663}$

১৬৭. একটি বাক্সে 10টি নীল এবং 15টি লাল মার্বেল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে একটি করে পর পর দুইটি মার্বেল উঠালে দুইটি একই রংয়ের মার্বেল হবার সম্ভাবনা — (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{4}{5}$
গ $\frac{3}{20}$ ঘ $\frac{7}{20}$ **ক**

১৬৮. একটি বাক্সে 10টি নীল এবং 15টি সবুজ মার্বেল আছে। দৈবচয়নে পর পর দুইটি মর্বেল বাক্স থেকে তোলা হলো। মার্বেল দুইটি ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{2}{5}$ খ $\frac{3}{5}$
গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{1}{4}$ **গ**

১৬৯. একটি পাত্রে 10টি সাদা এবং 15টি লাল বল আছে। দৈবভাবে একটি বল উঠানো হলো, বলটি সাদা না হবার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{2}{5}$ খ $\frac{3}{5}$
গ $\frac{4}{5}$ ঘ কোনোটি নয় **খ**

ব্যাখ্যা: সাদা না হবার সম্ভাবনা মানে লাল হবার সম্ভাবনা $= \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

১৭০. 16 জন বালক ও 12 জন বালিকা একটি প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করলে, একটি বালক প্রথম ও একটি বালিকা দ্বিতীয় হওয়ার সম্ভাব্যতা নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক 6/7 খ 12/49
গ 5/63 ঘ 16/63 **ঘ**

ব্যাখ্যা: মোট = 16 + 12 = 28 জন
সম্ভাব্যতা $= \frac{16}{28} \times \frac{12}{27} = \frac{16}{63}$

১৭১. 1, 0, 2 দ্বারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাগুলি হতে দৈবচয়ন পদ্ধতিতে একটি সংখ্যা নেয়া হলে সংখ্যাটি 10 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{3}$
গ $\frac{2}{9}$ ঘ $\frac{1}{6}$ **খ**

ব্যাখ্যা: তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $2 \times 3 \times 3$ বা 18 উপায়ে
এদের মধ্যে 10 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা $2 \times 3 \times 1$ বা, 6 উপায়ে গঠন করা যায়।
$\therefore$ সম্ভাব্যতা $= \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

১৭২. একটি বাক্সে 7টি লাল ও 6টি কালো বল আছে। বাক্সটি হতে দৈবচয়নে 6টি বল উঠানো হলে, 4টি কালো ও 2টি লাল বল পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক 0.1836 খ 0.2567
গ 0.3875 ঘ কোনটিই নয় **ক**

ব্যাখ্যা: $\frac{^6C_4 \times ^7C_2}{^{13}C_6} = 0.1836$

১৭৩. একজন লোকের 3 জোড়া কালো মোজা এবং 2 জোড়া বাদামী মোজা আছে। একদিন অন্ধকারে তাড়াহুড়া করে লোকটি কাপড় পরল। সে প্রথমে একটি বাদামী মোজা পরার পর পরবর্তী মোজাও বাদামী হওয়ার সম্ভাবনা — (মধ্যম)

ⓚ $\frac{1}{3}$ ⓚh $\frac{2}{15}$
ⓖ $\frac{1}{10}$ ⓖh $\frac{3}{10}$ খ

১৭৪. একই রকম 3টি বক্সে যথাক্রমে 2টি লাল ও 5টি কালো, 3টি লাল ও 5টি সাদা এবং 5টি লাল ও 7টি কালো বল আছে। দৈবচয়নের মাধ্যমে একটি বক্স হতে একটি বল নেওয়া হলে সেটি কালো হবার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{31}{252}$ খ $\frac{71}{252}$
গ $\frac{97}{252}$ ঘ $\frac{109}{252}$ ঘ

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{0}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}=\frac{5}{21}+\frac{7}{36}=\frac{109}{252}$

১৭৫. একটি ব্যাগে 6টি কালো এবং 8টি সাদা বল আছে। দৈবচয়িত একটি বল সাদা হবার সম্ভাব্যতা — (মধ্যম)

ক $\frac{3}{4}$ খ $\frac{4}{7}$
গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{3}{7}$ খ

১৭৬. একটি থলেতে 6টি লাল, 5টি সবুজ ও 9টি হলুদ সমরূপ গুটি আছে। প্রত্যেকবার একটি করে তুলে সেটা পুন:স্থাপন না করলে তিনবারে তিনটি ভিন্ন গুটি পাওয়ার সম্ভাব্যতা কোনটি? (কঠিন)

ক $\frac{4}{19}$ খ $\frac{14}{57}$
গ $\frac{9}{38}$ ঘ $\frac{3}{76}$ ঘ

ব্যাখ্যা: তিনবারে তিনটি ভিন্ন গুটি পাওয়ার সম্ভাবনা
= P (1 টি লাল, 1 টি সবুজ, 1টি হলুদ)
$= \frac{^6C_1 \times ^5C_1 \times ^9C_1}{^{20}C_1 \times ^{19}C_1 \times ^{18}C_1} = \frac{270}{6840} = \frac{3}{76}$

১৭৭. এক প্যাকেট তাস থেকে একটি তাস দৈবভাবে নেয়া হলো। তাসটি হরতন বা চিরতন হবার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{3}{4}$
গ $\frac{4}{13}$ ঘ $\frac{1}{4}$ ক

১৭৮. 52 খানা তাসের প্যাকেটে 4 খানা টেক্কা আছে। নিরপেক্ষভাবে একখানা তাস টানা হলো। তাসটি টেক্কা না হবার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{13}$ খ $\frac{9}{13}$
গ $\frac{11}{13}$ ঘ $\frac{12}{13}$ ঘ

১৭৯. 52টি তাসের প্যাকেট থেকে 1টি তাস দৈবচয়িকভাবে উঠানো হয়। তাসটি লাল অথবা টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{7}{52}$ খ $\frac{15}{26}$
গ $\frac{11}{13}$ ঘ $\frac{7}{13}$ ঘ

১৮০. এক প্যাকেট তাস হতে দুইটি তাস পুনঃস্থাপন করে তোলা হলে দুইটিই রাজা হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{676}$ খ $\frac{3}{676}$
গ $\frac{1}{221}$ ঘ $\frac{1}{169}$ ঘ

১৮১. একটি বাক্সে তিনটি আম ও তিনটি আপেল আছে। দৈবচয়নে দুইটি ফল বাছাই করা হলে একটি আম এবং একটি আপেল হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{9}$ খ $\frac{1}{3}$
গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{3}{5}$ ঘ

১৮২. এক প্যাকেট তাস হতে দুইটি তাস টেনে তোলা হল একটি রাজা এবং একটি টেক্কা পাবার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{2704}$ খ $\frac{4}{663}$
গ $\frac{8}{663}$ ঘ $\frac{1}{26}$ গ

১৮৩. 52 খানা তাস হতে পরপর তিনখানা তাস টানা হল। প্রথম তাস ইস্কাপনের Q, দ্বিতীয় তাস রুহিতনের 6 হলে তৃতীয় তাসের একটি Q হওয়ার সম্ভাব্যতা কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{3}{51}$ খ $\frac{3}{50}$
গ $\frac{2}{51}$ ঘ $\frac{2}{50}$ খ

ব্যাখ্যা: প্রথম তাস ইস্কাপনের Q, দ্বিতীয় তাস রুহিতনের 6 হলে তৃতীয় তাস Q হবার সম্ভাবনা = $\frac{^3C_1}{^{50}C_1} = \frac{3}{50}$

১৮৪. 52 খানা তাস হতে পরপর দুই খানা তাস টানা হল। প্রথমটির K এবং দ্বিতীয়টির Q হওয়ার সম্ভাব্যতা কোনটি? প্রথম তাস টানার পর সেটি আবার মিশিয়ে ২য় তাস টানা হয়েছে। (মধ্যম)

ⓚ $\frac{7}{52}$ ⓚ $\frac{12}{52}$

ⓖ $\frac{8}{52}$ ⓖ $\left(\frac{4}{52}\right)^2$ **ঘ**

১৮৫. A = {1, 2, 4} এবং B = {3, 5} হলে—

i. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

ii. $P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)}$

iii. $P(A \cap B) = \varnothing$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $A \cap B = \{1, 2, 4\} \cap \{3, 5\} = \varnothing$; A ও B বর্জনশীল।

১৮৬. একটি থলিতে 3টি সাদা, 4টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। দৈবচয়নে—

i. একটি বল তুললে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$

ii. পরপর দুইটি বল তুললে বল দুইটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{22}$

iii. বিনিময় করে দুইটি বল তুললে বল দুইটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{25}{144}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১৮৭. A = {2, 4} ও B = {1, 4} হলে—

i. A ও B অবর্জনশীল

ii. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

iii. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

ব্যাখ্যা: $A \cap B = \{2, 4\} \cap \{1, 4\} = \{4\} \neq \varnothing$

সুতরাং A ও B অবর্জনশীল।

একটি পাত্রে 5টি লাল, 4টি সাদা ও 2টি কালো বল থেকে 3টি বল দৈবভাবে নেয়া হলো।

উপরের উদ্দীপকের আলোকে (১৮৮ ও ১৮৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

১৮৮. বলগুলো একই রঙের হবার সম্ভাবনা নিচের কোনটি? (কঠিন)

ক $\frac{10}{165}$ খ $\frac{12}{165}$

গ $\frac{14}{165}$ ঘ $\frac{16}{165}$ **গ**

ব্যাখ্যা: P (বল 3টি লাল) + P(বল 3টি সাদা)

$= \frac{^5C_3}{^{11}C_3} + \frac{^4C_3}{^{11}C_3} = \frac{14}{165}$

১৮৯. বড়জোড় ২টি বল কালো হবার সম্ভাবনা কোনটি? (কঠিন)

ক 0 খ $\frac{1}{2}$

গ $\frac{1}{3}$ ঘ 1 **ঘ**

ব্যাখ্যা: P(2টি কালো এবং 1টি অন্য রঙের) + P(1টি কালো এবং 2টি অন্য রঙের) + P(0টি কালো এবং 3টি অন্য রঙের)

$= \frac{^2C_2 \times {^9C_1}}{^{11}C_3} + \frac{^2C_1 \times {^9C_2}}{^{11}C_3} + \frac{^2C_0 \times {^9C_3}}{^{11}C_3} = 1$

নিচের তথ্যের আলোকে ১৯০ ও ১৯১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি পাত্রে 7টি লাল বল ও 8টি কালো বল আছে।

১৯০. পাত্রটি হতে পরপর দুইটি বল উত্তোলন করলে বল দুইটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{2}{15}$ খ $\frac{1}{5}$

গ $\frac{2}{7}$ ঘ $\frac{4}{5}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: বল দুটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা

$= \left(1 - \frac{^7C_2}{^{15}C_2}\right) = \left(1 - \frac{21}{105}\right) = \frac{4}{5}$

১৯১. পাত্রটি হতে পরপর তিনটি বল উত্তোলন করলে তিনটি বলই কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{5}$ খ $\frac{3}{8}$

গ $\frac{8}{65}$ ঘ $\frac{57}{65}$ **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১৯২ ও ১৯৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি পাত্রে 3টি সাদা এবং 2টি কালো বল ও অপর পাত্রে 2টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে।

১৯২. পাত্র দুইটি হতে একটি করে বল উঠানো হলে বল দুইটি ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{12}{175}$ খ $\frac{4}{35}$

গ $\frac{3}{7}$ ঘ $\frac{19}{35}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাবনা

$= \left(\frac{3}{5} \times \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{7}\right)$

$= \frac{15}{35} + \frac{4}{35} = \frac{19}{35}$

১৯৩. সমসম্ভাব্য উপায়ে একটি পাত্র নির্বাচন করে সেই পাত্র হতে একটি বল উত্তোলন করলে বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{3}{35}$ খ $\frac{6}{35}$

গ $\frac{31}{70}$ ঘ $\frac{31}{35}$ **গ**

★ অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণন সূত্রসমূহ

১৯৪. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ হলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক A ও B অবর্জনশীল খ A ও B স্বাধীন

গ A ও B অধীন ঘ A ও B বর্জনশীল **খ**

ব্যাখ্যা: $P(A).P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$;
সুতরাং A ও B স্বাধীন।

১৯৫. A ও B সম্পূর্ণ ঘটনার ক্ষেত্রে, $P(A) = 0.65$ এবং $P(B) = 0.47$ হলে A ও B ঘটনাদ্বয় কেমন? (কঠিন)

ক স্বাধীন খ অধীন

গ বর্জনশীল ঘ শর্তাধীন **খ**

১৯৬. A ঘটনার সম্ভাবনার ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক $1 < P(A) < \infty$ খ $-\infty < P(A) < 0$

গ $0 \le P(A) \le 1$ ঘ $1 \le P(A) \le 2$ **গ**

১৯৭. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{4}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ হলে $P(\bar{A}|\bar{B})$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{2}{3}$ খ $\frac{1}{3}$

গ $\frac{1}{5}$ ঘ $\frac{1}{6}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$

$= \frac{11}{12}$, $P(\bar{A} | \bar{B})$

$= \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})}$

$= \frac{1 - \frac{11}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

১৯৮. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{4}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ হলে —

i. A ও B স্বাধীন

ii. $P(A^c) = \frac{2}{3}$

iii. $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: $P(A^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$

১৯৯. $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{3}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ হলে—

i. $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

ii. $P(B^c) = \frac{2}{3}$

iii. A ও B সম্পূর্ণ ঘটনা

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$

$P(B^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

A ও B হলো স্বাধীন ঘটনা।

২০০. A ও B দুইটি সম্পূর্ণ ঘটনার ক্ষেত্রে—

i. $P(A \cup B) = 1$

ii. ঘটনাদ্বয় বর্জনশীল হলে, $P(A) + P(B) = 1$

iii. উভয় বর্জনশীল ও স্বাধীন

নিম্নের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

২০১. তিনটি নিরপেক্ষ মুদ্রাকে একসাথে নিক্ষেপ করলে —

i. তিনটিই হেড আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{6}$

ii. দুইটি হেড আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{8}$

iii. কমপক্ষে একটি হেড আসার সম্ভাবনা $= \frac{7}{8}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

২০২. একটি থলিতে 4টি সাদা, 3টি লাল ও 5টি কালো বল আছে এবং তা থেকে দৈবভাবে একটি বল উত্তোলন করলে—

i. বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{3}$

ii. বলটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{4}$

iii. বলটি লাল বা কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{2}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii　খ ii ও iii

গ i ও iii　ঘ i, ii ও iii　**ঘ**

২০৩. 15টি সাদা এবং 10টি কালো রঙের বল আছে এমন একটি ব্যাগ হতে দৈবচয়ন—

i. একটি বল উত্তোলন করলে তা কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{2}{5}$

ii. পর পর দুইটি বল উত্তোলন করলে উভয়টিই সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{7}{20}$

iii. পর পর দুইটি বল উত্তোলন করলে অন্তত একটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{17}{20}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii　খ ii ও iii

গ i ও iii　ঘ i, ii ও iii　**ঘ**

২০৪. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2}{5}$; A ও B স্বাধীন হলে—

i. $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

ii. $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$

iii. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{10}$

নিম্নের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii　খ i ও iii

গ ii ও iii　ঘ i, ii ও iii　**ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (২০৫ ও ২০৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

10 থেকে 30 পর্যন্ত মোট সংখ্যা 21টি।

২০৫. মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{5}{21}$　খ $\frac{2}{7}$

গ $\frac{11}{21}$　ঘ 1　**ঘ**

২০৬. 5 এর গুণিতক হবার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{3}{21}$　খ $\frac{4}{21}$

গ $\frac{5}{21}$　ঘ $\frac{2}{7}$　**গ**

দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। উপরের তথ্যের আলোকে (২০৭ ও ২০৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২০৭. মুদ্রায় একই পিঠ ও ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা পড়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$　খ $\frac{1}{3}$

গ $\frac{1}{4}$　ঘ $\frac{1}{6}$　**গ**

২০৮. দুইটি মাথা ও বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{6}$　খ $\frac{1}{8}$

গ $\frac{1}{10}$　ঘ $\frac{1}{36}$　**খ**

ব্যাখ্যা: অনুকূল নমুনাবিন্দু : {HH1, HH3, HH5}

∴ সম্ভাবনা $= \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

নিচের তথ্যের আলোকে (২০৯ ও ২১০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি গার্মেন্টস ফ্লোরে 100 জন শ্রমিকের নিম্নরূপে শ্রেণিবিন্যাস করা হলো:

শ্রেণি	শিক্ষিত (E)	অশিক্ষিত	মোট
পুরুষ (M)	10	30	40
মহিলা (F)	7	53	60
মোট	17	83	100

২০৯. লটারির মাধ্যমে একজন শ্রমিক বাছাই করলে তার পুরুষ হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{3}$　খ $\frac{2}{3}$

গ $\frac{1}{5}$　ঘ $\frac{2}{5}$　**ঘ**

২১০. উপর্যুক্ত ছকে তথ্যের ক্ষেত্রে —

i. $P(M \cup F)$ নিশ্চিত ঘটনা

ii. $P\left(\frac{E}{M}\right)$ অনিশ্চিত ঘটনা

iii. P(M) ও P(E) পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i খ ii

গ i ও ii ঘ i ও iii **গ**

তিনটি নিটোল মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো :
(২১১ ও ২১২) নং প্রশ্ন উত্তর দাও।

২১১. কমপক্ষে দুইটি H পাবার সম্ভাবনা— (মধ্যম)

ক 3 খ $\frac{1}{8}$

গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{1}{2}$ **ঘ**

২১২. বড়জোড় দুইটি H পাবার সম্ভাবনা— (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{3}{4}$

গ $\frac{1}{8}$ ঘ কোনটি নয় **খ**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (২১৩ ও ২১৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোনো সমিতির কার্যকরী কমিটিতে 10 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলা সদস্য আছে। এদের মধ্য থেকে 5 জন সদস্যের একটি উপকমিটি গঠন করা হলো।

২১৩. 3 জন পুরুষ সদস্য হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{356}{1001}$ খ $\frac{360}{1001}$

গ $\frac{362}{1001}$ ঘ $\frac{380}{1001}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $P(x=3) = \frac{{}^{10}C_3 \times {}^{4}C_2}{{}^{14}C_5} = \frac{360}{1001}$

২১৪. অন্তত: 3 জন পুরুষ সদস্য হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{912}{1001}$ খ $\frac{910}{1001}$

গ $\frac{908}{1001}$ ঘ $\frac{906}{1001}$ **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (২১৫ ও ২১৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

তাসের একটি প্যাকেটে ৫২ খানা তাস বিদ্যমান।

২১৫. 1 খানা তাস নির্বিচারে টানা হলে টেক্কা পাবার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{52}$ খ $\frac{1}{26}$

গ $\frac{2}{51}$ ঘ $\frac{1}{13}$ **ঘ**

২১৬. একটি হরতন পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{3}$

গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{1}{5}$ **গ**

একটি ব্যাগে 5টি লাল এবং 3টি সবুজ বল আছে। তা থেকে দৈবচয়নে 2টি বল তোলা হলো।

উপরের তথ্যের আলোকে (২১৭-২১৮)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২১৭. উত্তোলিত বল দুইটি একই রঙের হবার সম্ভাবনা — (কঠিন)

ক $\frac{3}{18}$ খ $\frac{5}{14}$

গ $\frac{13}{28}$ ঘ কোনটি নয় **গ**

২১৮. উত্তোলিত বল দুইটি ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা — (কঠিন)

ক $\frac{25}{28}$ খ $\frac{9}{14}$

গ $\frac{11}{28}$ ঘ $\frac{15}{28}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: P(বল দুইটি ভিন্ন রঙের)
= P(বল দুইটির একটি লাল এবং অপরটি সবুজ)
$= \frac{{}^5C_1 . {}^3C_1}{{}^8C_2} = \frac{5 \times 3}{28} = \frac{15}{28}$

দুই অঙ্কের স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে একটি সংখ্যা নির্বাচন করা হলো :
(২১৯ ও ২২০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২১৯. নির্বাচিত সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাবনা — (মধ্যম)

ক $\frac{1}{10}$ খ $\frac{5}{9}$

গ $\frac{7}{9}$ ঘ কোনটি নয় **ক**

২২০. নির্বাচিত সংখ্যাটি 11 অথবা 13 দ্বারা বিভ্যাজ্য হবার সম্ভাবনা— (কঠিন)

ক $\frac{1}{10}$ খ $\frac{7}{90}$

গ $\frac{8}{45}$ ঘ $\frac{37}{45}$ **গ**

নিচের উদ্দীপকের ভিত্তিতে (২২১ ও ২২২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি থলিতে 7টি সাদা ও 3টি লাল বল আছে। অপর একটি থলিতে 2টি সাদা ও 5টি লাল বল আছে।

২২১. ১ম থলি থেকে নিরপেক্ষভাবে পরপর তিনটি বল তুললে বলগুলি লাল হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{135}$ খ $\frac{1}{120}$

গ $\frac{1}{160}$ ঘ $\frac{9}{1000}$ **খ**

ব্যাখ্যা: ১ম থলিতে 7টি সাদা ও 3টি লাল অর্থাৎ মোট 10টি বল আছে।
পরপর 3টি বল তুললে বলগুলি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{^3C_3}{^{10}C_3} = \frac{1}{120}$

২২২. সমসম্ভব উপায়ে যে কোনো থলি নির্বাচন করে সেখান থেকে একটি বল উত্তোলন করলে তা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{69}{70}$ খ $\frac{1}{7}$ গ $\frac{69}{140}$ ঘ $\frac{7}{20}$ — গ

ব্যাখ্যা: সাদা বল পাওয়ার সম্ভাবনা
$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{7}{20} + \frac{1}{7} = \frac{69}{140}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (২২৩ ও ২২৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

২২৩. উপরের সেটটি হতে একট সংখ্যা দৈবচয়নে নির্বাচন করলে 5 পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক 0 খ $\frac{1}{6}$ গ $\frac{5}{6}$ ঘ 1 — খ

২২৪. S এর উপাদানগুলির ভেদাঙ্ক কত? (কঠিন)

ক 2.91 খ 5.83 গ 8.5 ঘ 34.02 — ক

নিচের তথ্যের আলোকে (২২৫ ও ২২৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একজন পরীক্ষার্থীর বাংলায় ফেল করার সম্ভাবনা $\frac{1}{5}$
বাংলা এবং ইংরেজি দুইটিতে পাসের সম্ভাবনা $\frac{3}{4}$ ।
এবং দুইটির যেকোন একটিত্রে পাসের সম্ভাবনা $\frac{7}{8}$ ।

২২৫. পরীক্ষার্থীর কেবল ইংরেজিতে পাসের সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{3}{40}$ খ $\frac{7}{40}$ গ $\frac{13}{40}$ ঘ $\frac{33}{40}$ — ক

২২৬. বাংলায় পাস করার শর্তে ইংরেজিতে পাসের সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{3}{40}$ খ $\frac{33}{40}$ গ $\frac{10}{11}$ ঘ $\frac{15}{16}$ — ঘ

নিচের উদ্দীপকের ভিত্তিতে (২২৭ ও ২২৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি পাত্রে যতগুলি কালো বল আছে, তার তিনগুণ লাল বল। সাদা বল আছে লাল বলের দ্বিগুণ পরিমাণ। এখন পাত্র হতে একটি বল দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো—

২২৭. বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{10}$ খ $\frac{2}{10}$ গ $\frac{3}{10}$ ঘ $\frac{6}{10}$ — ক

ব্যাখ্যা: মনে করি, কালো বল xটি
লাল বল 3xটি এবং সাদা বল $3x \times 2 = 6x$টি
$\therefore$ মোট বল $= x + 3x + 6x = 10x$
$\therefore$ বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{x}{10x} = \frac{1}{10}$

২২৮. বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{10}$ খ $\frac{2}{10}$ গ $\frac{3}{10}$ ঘ $\frac{6}{10}$ — ঘ

ব্যাখ্যা: বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6x}{10x} = \frac{6}{10}$

$P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ এবং $P(A \cup B) = 0.9$
(২২৯ ও ২৩০) পর্যন্ত উপরের তথ্যের আলোকে উত্তর দাও:

২২৯. $P(A \cap B)$ এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 0.2 খ 0.3 গ 0.4 ঘ 0.5 — গ

২৩০. $P(A' \cup B)$ এর মান কোনটি? (কঠিন)

ক 0.8 খ 0.5 গ 0.4 ঘ 0.42 — ক

ব্যাখ্যা: $P(A' \cup B) = 1 - P(A) + P(A \cap B)$

দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ এবং $P(A \cup B) = P$.
উপরের তথ্যের আলোকে (২৩১ ও ২৩২) এর উত্তর দাও:

২৩১. P এর মান কোনটি? (যখন A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা) (মধ্যম)

ক $\frac{7}{12}$ খ $\frac{5}{12}$ গ $\frac{1}{16}$ ঘ 0 — ক

২৩২. P এর মান কোনটি? (যখন A ও B পরস্পর স্বাধীন ঘটনা) (কঠিন)

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{3}$ গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{1}{12}$ — ক